LEVELUP

π × √ ÷ מתמטיקה בחוויה אחרת

קורס בגרות במתמטיקה · 5 יחידות

מחברת הקורס

שאלון 572

כל נושאי הקורס המלא – תרגול מדורג לכל נושא, תשובות סופיות,
סרטוני הסבר מהערוץ והמחשות אינטראקטיביות

991	28	10	86
תרגילים	נושאים	פרקים	ברקודים

אילון פרץ · LevelUp

levelupmath.co.il · YouTube · 050-5100170 💬

תוכן העניינים

1 אלגברה – חזקות ולוגריתמים

1.1 חוקי חזקות ומשוואות מעריכיות 38
1.2 אי-שוויונות מעריכיים 35
1.3 לוגריתמים, $\ln$ ומשוואות לוגריתמיות 40

2 גיאומטריה אנליטית

2.1 הישר – אמצע קטע, אורך קטע, חלוקת קטע ומרחקים 37
2.2 המעגל – משוואה, מעגל וישר, משיקים 36
2.3 פרבולה קנונית, אליפסה ומקום גיאומטרי 33

3 הווקטור הגיאומטרי

3.1 פעולות בווקטורים והרכבת וקטורים בצורות 44
3.2 תלות לינארית, נקודות על ישר ומישור ויחידות הצגה 34
3.3 מכפלה סקלרית, אורך וקטור, זווית וניצבות 36

4 הווקטור האלגברי

4.1 וקטורים אלגבריים – פעולות, אורך, אמצע וחלוקת קטע 37
4.2 ישר ומישור – הצגה פרמטרית, משוואה כללית ווקטור נורמל 36
4.3 מצבים הדדיים וזוויות – ישרים ומישורים 34
4.4 מרחקים במרחב 33

5 מספרים מרובכים

5.1 הצגה אלגברית – פעולות, חזקות של i, צמוד ומשוואות 39
5.2 הצגה טריגונומטרית, דה-מואבר ושורש n מסדר 37
5.3 מישור גאוס ומקומות גיאומטריים 36
5.4 סדרות במרוכבים ושאלות 100 32

6 חקירת פונקציות מעריכיות (e)

6.1 פונקציות מעריכיות – תחום הגדרה, אסימפטוטות, חורים ונגזרת 36
6.2 חקירה מלאה של פונקציות מכפלה ומנה עם e (כולל פרמטרים) 32
6.3 הטרנספורמציה $e^{f(x)}$ ושאלות 100 33

7 חקירת פונקציות לוגריתמיות ($\ln$)

7.1 פונקציות $\ln$ – תחום הגדרה (כולל הדגש החשוב), נגזרת ומשוואות 34
7.2 חקירה מלאה של פונקציות $\ln$ (כולל פרמטרים) 31
7.3 הטרנספורמציה $\ln f(x)$ ושאלות 100 31

8 אינטגרלים – e ו-$\ln$

8.1 אינטגרלים של e ושל פונקציות שנותנות $\ln$ – זיהוי מצב האינטגרל 37
8.2 חישוב שטחים ואינטגרל צובר עם e ו-$\ln$ 31

9 גדילה ודעיכה

9.1 גדילה ודעיכה 36

10 נוספים – בסיסים וטרנספורמציות כפולות

10.1 בסיסים – מעבר בסיס a^x ו-$\log_a x$ בלוגריתמים והפונקציות 34
10.2 טרנספורמציות כפולות – $e^{f(x)}$ ו-$\ln f(x)$ 39

💡 לחיצה על שם נושא מעבירה ישר אליו · כל ברקוד בחוברת גם לחיץ

פרק 1

אלגברה – חזקות ולוגריתמים

הכלים האלגבריים של שאלון 572: משוואות ואי-שוויונות מעריכיים, e, לוגריתמים ו-$\ln$

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

1.1 חוקי חזקות ומשוואות מעריכיות — 38 תרגילים

1.2 אי-שוויונות מעריכיים — 35 תרגילים

1.3 לוגריתמים, $\ln$ ומשוואות לוגריתמיות — 40 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

משוואות מעריכיות
YouTube · 16:16

משוואות מעריכיות עם בסיס e
YouTube · 12:43

אי-שוויון מעריכי – שאלונים 472 ו-572
YouTube · 9:40

פתרון משוואות לן בסיסיות
YouTube · 6:09

1.1 חוקי חזקות ומשוואות מעריכיות

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. במשוואה מעריכית: בסיס משותף ⟸ משווים מעריכים; ביטוי חוזר ⟸ משתנה עזר $t = a^x$ (ותמיד $t > 0$); בסיסים שונים ⟸ מפעילים $\ln$.

צפו לפני שמתחילים:



חוקי חזקות עם הסברים והוכחות
YouTube · 18:37



משוואות מעריכיות
YouTube · 16:16



פתרון משוואות מעריכיות עם בסיס e
YouTube · 12:43

1 פשטו: $\frac{2^5 \cdot 2^{-3}}{2^{-1}}$

2 חשבו: $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$

3 פשטו ($a > 0$): $\frac{a^3 \cdot a^{-5}}{(a^2)^{-3}}$

4 פשטו ($x > 0$): $\sqrt[3]{x^2} \cdot x^{\frac{4}{3}}$

5 פשטו: $\frac{e^{2x} \cdot e^3}{e^{x-1}}$

6 פשטו: $\frac{3^{x+2} - 3^x}{8 \cdot 3^x}$ (הוציאו גורם משותף).

7 כתבו כחזקה אחת של 2: $\frac{4^x \cdot 2^{3-x}}{8^x}$

8 פשטו: $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$

9 פתרו: $2^{x-1}=32$

10 פתרו: $9^x=27$ (רמז: בסיס משותף 3).

11 פתרו: $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}=8^x$

12 פתרו: $5^{x^2-3x}=\frac{1}{25}$

13 פתרו: $3^{x+1}+3^x=36$

14 פתרו: $2^{x+2}-2^{x-1}=56$

15 פתרו בעזרת משתנה עזר: $4^x-6\cdot 2^x+8=0$

16 פתרו: $9^x-10\cdot 3^x+9=0$

17 פתרו: $25^x-4\cdot 5^x-5=0$. איזה ערך של משתנה העזר נפסל, ומדוע?

18 פתרו: $2^x+2^{3-x}=6$

19 פתרו: $e^{2x}-5e^x+6=0$

20 פתרו: $e^x=7$

21 פתרו: $e^{2x-1}=1$

22 פתרו: $e^x-2e^{-x}=1$

23 פתרו: $3e^{2x}=12$

24 פתרו: $2^x=5$. כתבו את התשובה בעזרת $\ln$.

25 פתרו: $3^x=2^{x+1}$ (הפעילו $\ln$ על שני האגפים).

26 פתרו: $x \cdot e^x - 2e^x = 0$

27 פתרו: $\left(x^2 - 4\right) e^x = 0$. מדוע אפשר לחלק ב- e^x?

28 פתרו: $e^{2x} = e^x$

29 פתרו: $\sqrt{e^x} = e^3$

30 פתרו: $4^x + 4^{x+1} = 80$

31 פתרו: $\dfrac{2^x + 2^{-x}}{2} = \dfrac{5}{4}$

32 פתרו: $e^x + e^{-x} = 2$

33 פתרו את מערכת המשוואות: $2^x \cdot 4^y = 64$, $3^{x-y} = 27$

34 פתרו: $e^{x^2} = e^{4x-3}$

35 פתרו: $2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 3^x - 3 = 0$

36 פתרו: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{9}{4}$

37 פתרו: $7^x \cdot 5^x = 35^3$

38 לאילו ערכי a יש למשוואה $4^x - 2^{x+1} + a = 0$ שני פתרונות שונים? (רמז: שני פתרונות חיוביים למשתנה העזר)

✔ תשובות סופיות – נושא 1.1

1	8
2	$\frac{4}{9}$
3	a^4
4	x^2
5	e^{x+4}
6	1
7	2^{3-2x}
8	4
9	$x=6$
10	$x=\frac{3}{2}$
11	$x=-\frac{2}{5}$
12	$x=1$ או $x=2$
13	$x=2$
14	$x=4$
15	$x=1$ או $x=2$
16	$x=0$ או $x=2$
17	$x=1$; $5^x=-1$ נפסל כי $5^x>0$
18	$x=1$ או $x=2$
19	$x=\ln 2$ או $x=\ln 3$
20	$x=\ln 7$
21	$x=\frac{1}{2}$
22	$x=\ln 2$
23	$x=\ln 2$

24 $x = \frac{\ln 5}{\ln 2}$

25 $x = \frac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2} = \frac{\ln 2}{\ln 1.5}$

26 $x = 2$

27 $x = \pm 2$; כי $e^x > 0$ תמיד

28 $x = 0$

29 $x = 6$

30 $x = 2$

31 $x = 1$ או $x = -1$

32 $x = 0$

33 $x = 4,\ y = 1$

34 $x = 1$ או $x = 3$

35 $x = 1$

36 $x = -2$

37 $x = 3$

38 $0 < a < 1$

1.2 אי-שוויונות מעריכיים

בסיס גדול מ-1 (כמו 2, 3, e) – כיוון אי-השוויון **נשמר** כשעוברים למעריכים. בסיס בין 0 ל-1 – כיוון אי-השוויון **מתהפך**. בכל משתנה עזר זכרו: $a^x > 0$.

צפו לפני שמתחילים:



אי-שוויון מעריכי – הסבר ותרגול
YouTube · 9:40



פונקציה מעריכית – כל מה שצריך לדעת
YouTube · 3:15

1. פתרו: $2^x > 8$
2. פתרו: $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 9$. שימו לב לכיוון אי-השוויון!
3. פתרו: $5^{2x-1} < 125$
4. פתרו: $(0.5)^{x-3} > 4$
5. פתרו: $e^x > 1$
6. פתרו: $e^{3-x} \leq e$
7. פתרו: $3^{x^2} < 3^4$
8. פתרו: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} \geq \frac{1}{4}$
9. פתרו: $2^{x^2-2x} > 8$
10. פתרו: $4^x > 2^{x+3}$
11. פתרו: $9^x \leq 27^{x-1}$

12 פתרו: $\left(\frac{1}{4}\right)^x < 8^{1-x}$

13 פתרו: $3^{x+1} - 3^x > 18$

14 פתרו: $2^x + 2^{x+2} \leq 40$

15 פתרו בעזרת משתנה עזר: $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 < 0$

16 פתרו: $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 \geq 0$

17 פתרו: $e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$

18 פתרו: $e^{2x} - e^x - 2 < 0$. מדוע אחד מגבולות התחום \"נעלם\"?

19 פתרו: $2^x > 3$. כתבו את התשובה בעזרת $\ln$.

20 פתרו: $\left(\frac{1}{e}\right)^x > e^2$

21 פתרו: $(x-2) \cdot 3^x > 0$

22 פתרו: $\left(x^2 - 9\right) e^x \leq 0$

23 פתרו: $x\,e^x < 2e^x$

24 פתרו: $\frac{2^x - 4}{x} > 0$ (טבלת סימנים).

25 פתרו: $\frac{e^x - 1}{x - 1} < 0$

26 פתרו: $2^x + 2^{1-x} < 3$

27 פתרו: $e^x + 6e^{-x} \geq 5$

28 לאילו ערכי x מתקיים $3^x > 2^x$? (רמז: חלקו ב- 2^x)

29 פתרו: $\left(\frac{2}{5}\right)^{x} \geq \left(\frac{5}{2}\right)^{x-4}$

30 פתרו: $5^{|x|} < 25$

31 פתרו: $e^{x^2-1} \geq 1$

32 מצאו את ערכי x שעבורם $2^x > \frac{1}{2}$ **וגם** $3^x < 9$.

33 לאילו ערכי a מתקיים $e^x > a$ **לכל** x? הסבירו בעזרת תחום הערכים של e^x.

34 פתרו: $2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x + 4 \leq 0$

35 פתרו: $(x+1)^2 \cdot e^{-x} > 0$

✔ תשובות סופיות – נושא 1.2

1	$x > 3$
2	$x \leq -2$
3	$x < 2$
4	$x < 1$
5	$x > 0$
6	$x \geq 2$
7	$-2 < x < 2$
8	$-1 \leq x \leq 2$
9	$x < -1$ או $x > 3$
10	$x > 3$
11	$x \geq 3$
12	$x < 3$
13	$x > 2$
14	$x \leq 3$
15	$0 < x < 2$
16	$x \leq 0$ או $x \geq 1$
17	$x < 0$ או $x > \ln 2$
18	$x < \ln 2$; כי $e^x > -1$ תמיד
19	$x > \frac{\ln 3}{\ln 2}$
20	$x < -2$
21	$x > 2$
22	$-3 \leq x \leq 3$
23	$x < 2$

24 $x < 0$ או $x > 2$

25 $0 < x < 1$

26 $0 < x < 1$

27 $x \leq \ln 2$ או $x \geq \ln 3$

28 $x > 0$

29 $x \leq 2$

30 $-2 < x < 2$

31 $x \leq -1$ או $x \geq 1$

32 $-1 < x < 2$

33 $a \leq 0$

34 $-1 \leq x \leq 2$

35 $x \neq -1$

1.3 לוגריתמים, ln ומשוואות לוגריתמיות

חוקים: $\log_a b = c \iff a^c = b$. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$,
$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $\log_a x^n = n\log_a x$, מעבר בסיס: $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$. בכל משוואה – קודם תחום הגדרה: מה שבתוך הלוג חיובי.

צפו לפני שמתחילים:

פתרון משוואות לן בסיסיות
YouTube · 6:09

תחום הגדרה ln
YouTube · 6:29

פונקציה לוגריתמית (ln) – מיקוד לבגרות
YouTube · 4:57

1. חשבו: $\log_2 32$
2. חשבו: $\log_3 \frac{1}{81}$
3. חשבו: $\log_{\frac{1}{2}} 8$
4. חשבו: $\log_4 8$ (רמז: כתבו את שני המספרים כחזקות של 2).
5. חשבו: $\ln\sqrt{e} + \ln\frac{1}{e^2}$
6. חשבו: $e^{2\ln 3}$
7. חשבו: $\log_6 4 + \log_6 9$
8. חשבו: $\log_3 54 - \log_3 2$
9. חשבו: $2\log_5 10 - \log_5 4$

10 חשבו בעזרת מעבר בסיס: $\log_2 3 \cdot \log_3 8$

11 חשבו: $\dfrac{\log_7 81}{\log_7 3}$

12 חשבו: $\log_9 27 + \log_{27} 9$

13 נתון $\log_2 3 = a$. הביעו באמצעות a את $\log_2 12$ ואת $\log_2 \dfrac{9}{8}$.

14 נתון $\ln 2 = a$, $\ln 3 = b$. הביעו באמצעות a ו-b את $\ln 18$ ואת $\ln \dfrac{4}{9}$.

15 חשבו: $\log 25 + \log 4$ (לוג בבסיס 10).

16 פתרו: $\log_2(x-3) = 4$

17 פתרו: $\log_3(2x+1) = 2$

18 פתרו: $\ln(x+2) = 0$

19 פתרו: $\ln x = 2$

20 פתרו: $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$. בדקו את הפתרונות בתחום ההגדרה!

21 פתרו: $\log_3(x+1) - \log_3(x-1) = 1$

22 פתרו: $\ln\left(x^2-5\right) = \ln(4x)$

23 פתרו: $\ln x + \ln(x+3) = \ln 10$

24 פתרו: $2\ln x = \ln(x+6)$

25 פתרו: $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$

26 פתרו: $\log_2 x + \log_x 2 = \dfrac{5}{2}$

27 פתרו: $\log_4 x + \log_2 x = 6$ (העבירו לבסיס 2).

28 פתרו: $\log_3 x + \log_9 x = 3$

29 פתרו: $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln 3$

30 פתרו: $\ln\left(e^x - 2\right) = 0$

31 פתרו: $\log_x 16 = 2$

32 פתרו: $\log_2\left(\log_3 x\right) = 1$

33 פתרו: $\ln(x-2) < 0$. אל תשכחו את תחום ההגדרה.

34 פתרו: $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq -2$

35 מצאו את תחום ההגדרה של $f(x) = \ln\left(x^2 - 4\right)$.

36 מצאו את תחום ההגדרה של $f(x) = \ln(3-x) + \ln(x+1)$.

37 פתרו את מערכת המשוואות: $\log_2 x + \log_2 y = 5$, $x - y = 4$

38 פתרו: $\ln(2x) - \ln(x-1) = \ln 4$

39 פתרו: $e^{\ln x + \ln 2} = 10$

40 פתרו: $\log_5\left(x^2 - x - 1\right) = 0$

✔ תשובות סופיות – נושא 1.3

1	5
2	-4
3	-3
4	$\frac{3}{2}$
5	$-\frac{3}{2}$
6	9
7	2
8	3
9	2
10	3
11	4
12	$\frac{13}{6}$
13	$2a-3\ ;\ 2+a$
14	$2a-2b\ ;\ a+2b$
15	2
16	$x=19$
17	$x=4$
18	$x=-1$
19	$x=e^2$
20	$x=4$ ($x=-2$ נפסל)
21	$x=2$
22	$x=5$ ($x=-1$ נפסל)
23	$x=2$

24 $x = 3$

25 $x = e$ או $x = e^2$

26 $x = 4$ או $x = \sqrt{2}$

27 $x = 16$

28 $x = 9$

29 $x = 2$

30 $x = \ln 3$

31 $x = 4$

32 $x = 9$

33 $2 < x < 3$

34 $1 < x \leq 5$

35 $x < -2$ או $x > 2$

36 $-1 < x < 3$

37 $x = 8,\ y = 4$

38 $x = 2$

39 $x = 5$

40 $x = -1$ או $x = 2$

פרק 1 סיכומון סוף פרק – אלגברה – חזקות ולוגריתמים

חוקי חזקות

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^0 = 1$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $(ab)^n = a^n b^n$ – אבל $(a+b)^n \neq a^n + b^n$!

משוואה מעריכית – 3 מצבים

- בסיס משותף: $2^{f(x)} = 2^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$.
- ביטוי חוזר (4^x ו-2^x, e^{2x} ו-e^x): משתנה עזר $t = a^x$, ופוסלים $t \leq 0$.
- בסיסים שונים: מפעילים $\ln$ על שני האגפים, $x = \frac{\ln b}{\ln a}$.
- $e^x \cdot (\dots) = 0$: מחלקים ב-e^x, כי $e^x > 0$ תמיד.

אי-שוויון מעריכי

- בסיס $a > 1$: $f(x) > g(x) \iff a^{f(x)} > a^{g(x)}$.
- בסיס $0 < a < 1$: הכיוון **מתהפך**.
- עם משתנה עזר – פותרים עבור t, ואז חוזרים ל-x (זוכרים $t > 0$).

הגדרת הלוגריתם

- $\log_a b = c \iff a^c = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$).
- $\ln x = \log_e x$, $\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$, $e^{\ln x} = x$.

חוקי לוגריתמים

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^n = n \log_a x$
- מעבר בסיס: $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$, ובפרט $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

משוואה לוגריתמית – סדר עבודה

1. תחום הגדרה: כל מה שבתוך לוג – חיובי.
2. מאחדים לוג אחד בכל אגף (חוקי הלוג).
3. מורידים לוג: $\log_a f(x) = c \Rightarrow f(x) = a^c$.
4. בודקים כל פתרון מול התחום.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לשכוח שמשתנה העזר $t = a^x$ חייב להיות חיובי.
- לא להפוך את כיוון אי-השוויון כשהבסיס קטן מ-1.
- $\ln(x+y) \neq \ln x + \ln y$ – החוק הוא רק למכפלה!
- להשאיר פתרון שמחוץ לתחום ההגדרה של הלוג.

💡 **הטיפ של אילון:** לפני כל משוואה מעריכית שאלו: "האם אפשר לכתוב הכול באותו בסיס?" אם כן – זה תרגיל של שתי שורות. אם לא – משתנה עזר או $\ln$.

פרק 2

גיאומטריה אנליטית

ישר, מרחקים, מעגל ומשיקים, פרבולה קנונית, אליפסה ומקום גיאומטרי

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

2.1 **הישר – אמצע קטע, אורך קטע, חלוקת קטע ומרחקים** — 37 תרגילים

2.2 **המעגל – משוואה, מעגל וישר, משיקים** — 36 תרגילים

2.3 **פרבולה קנונית, אליפסה ומקום גיאומטרי** — 33 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

אנליטית בקלות – 471 • 572
YouTube · 12:55

אנליטית – משוואת מעגל
YouTube · 7:37

משיקים למעגל – שאלון 572
YouTube · 9:39

מקום גיאומטרי – שאלון 572
YouTube · 8:07

🎛️ המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

מעבדת הקו הישר
שנו שיפוע ונקודת חיתוך של שני ישרים וגלו מתי הם מקבילים, מאונכים או נחתכים.

2.1 הישר – אמצע קטע, אורך קטע, חלוקת קטע ומרחקים

אמצע: $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$. אורך: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. חלוקה ביחס $m:n$ מ-A: $\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$. מרחק נקודה מישר $Ax+By+C=0$: $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. שיפוע וזווית: $m=\tan\alpha$.

צפו לפני שמתחילים:

נוסחת אמצע קטע – הסבר ותרגילים
YouTube · 5:44

נוסחת דיסטנס – מרחק בין שתי נקודות
YouTube · 8:28

שיפוע הופכי ונגדי – ישרים מאונכים
YouTube · 3:28

אנליטית בקלות – טכניקות וסדרי פעולה
YouTube · 12:55

1. מצאו את אמצע הקטע AB, כאשר $A(-3,5)$ ו-$B(7,-1)$.

2. הנקודה $M(5,1)$ היא אמצע הקטע AB, ו-$A(2,-4)$. מצאו את B.

3. חשבו את אורך הקטע AB: $A(1,2)$, $B(7,10)$.

4. חשבו את המרחק בין $A(-2,3)$ ל-$B(4,-1)$. השאירו את התשובה בצורת שורש מפושט.

5. הנקודה $A(a,3)$ נמצאת במרחק 5 מהנקודה $B(1,-1)$. מצאו את a.

6. הנקודה C מחלקת את הקטע AB ביחס $AC:CB=1:2$, כאשר $A(0,0)$, $B(9,6)$. מצאו את C.

7. מצאו את הנקודה C על הקטע AB כך ש-$AC:CB=3:2$, כאשר $A(-4,1)$ ו-$B(6,6)$.

8. מצאו את שתי הנקודות המחלקות את הקטע AB לשלושה חלקים שווים, כאשר $A(1,-2)$, $B(13,7)$.

9 הנקודה $C(5,7)$ נמצאת על הקטע AB ומקיימת $AC:CB=1:2$. נתון $A(2,1)$. מצאו את B.

10 חשבו את המרחק של הנקודה $(3,4)$ מהישר $3x+4y-5=0$.

11 חשבו את המרחק של הנקודה $(-1,2)$ מהישר $y=2x+1$. (העבירו קודם לצורה $Ax+By+C=0$.)

12 חשבו את המרחק של ראשית הצירים מהישר $5x-12y+26=0$.

13 הנקודה $(k,1)$ נמצאת במרחק 3 מהישר $4x-3y+2=0$. מצאו את ערכי k.

14 חשבו את המרחק בין הישרים המקבילים $3x-4y+7=0$ ו-$3x-4y-8=0$.

15 חשבו את המרחק בין הישרים $y=2x+3$ ו-$y=2x-2$.

16 מצאו את משוואות הישרים המקבילים לישר $3x+4y+1=0$ ונמצאים במרחק 2 ממנו.

17 מצאו את שיפוע הישר היוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר x, ואת משוואתו אם הוא עובר בנקודה $(2,-1)$.

18 ישר עובר בנקודה $(0,4)$ ויוצר זווית של 120° עם הכיוון החיובי של ציר x. מצאו את משוואתו.

19 מצאו את הזווית שיוצר הישר $y=\sqrt{3}x-2$ עם הכיוון החיובי של ציר x.

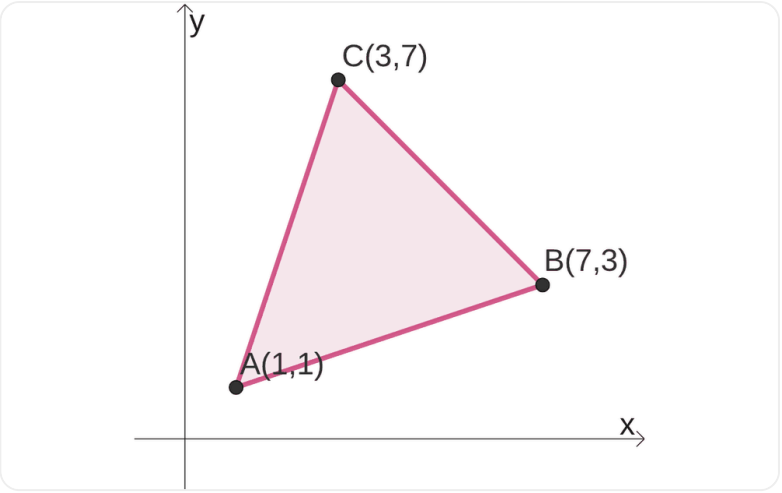
20 מצאו את הזווית (בקירוב) שהישר $2x-y+5=0$ יוצר עם הכיוון החיובי של ציר x.

21 מצאו את משוואת האנך האמצעי לקטע AB, כאשר $A(1,3)$ ו-$B(5,-1)$.

22 במשולש ABC: $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(2,4)$. חשבו את אורך התיכון לצלע AB.

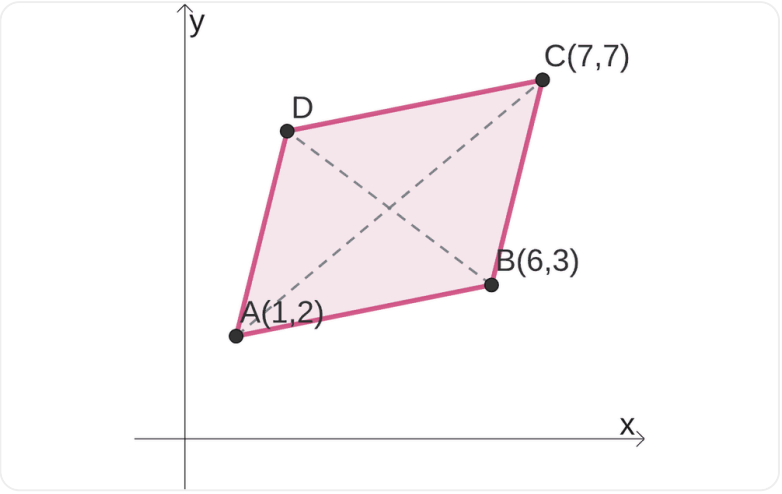
23 במשולש ABC שבסעיף הקודם ($A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(2,4)$) מצאו את מפגש התיכונים.

24 נתון משולש ABC: $A(1,1)$, $B(7,3)$, $C(3,7)$. מצאו את משוואת AB, את המרחק של C מהישר AB, ואת שטח המשולש.



25 הראו שהמשולש ABC שווה שוקיים וישר זווית: $A(-2,1)$, $B(2,4)$, $C(5,0)$.

26 $ABCD$ מקבילית: $A(1,2)$, $B(6,3)$, $C(7,7)$. מצאו את הקודקוד D (רמז: האלכסונים חוצים זה את זה).



27 מצאו את הנקודה הסימטרית לנקודה $P(4,1)$ ביחס לישר $y=x-1$.

28 מצאו את היטל (רגל האנך) הנקודה $P(3,5)$ על הישר $y=2x-4$.

29 מצאו נקודה על ציר x הנמצאת במרחק שווה מהנקודות $A(1,4)$ ו-$B(5,2)$.

30 מצאו נקודה על הישר $y=x$ הנמצאת במרחק שווה מהנקודות $A(0,4)$ ו-$B(6,0)$.

31 המרחק של הנקודה $(2,1)$ מהישר $y=mx$ הוא 1. מצאו את m.

32 חשבו את שטח הריבוע ששתיים מצלעותיו מונחות על הישרים $x+2y-3=0$ ו-$x+2y+7=0$.

33 הישרים $y=2x$ ו-$y=-\frac{1}{2}x+5$ נחתכים בנקודה P. מצאו את P ואת המרחק שלה מראשית הצירים.

34 הנקודות $A(0,6)$, $B(8,0)$. מצאו את אורך הגובה מראשית הצירים O ליתר AB במשולש OAB.

35 מצאו את k כך שהישרים $kx+2y-1=0$ ו-$3x-(k+1)y+4=0$ יהיו מאונכים.

36 נתונות $A(2,1)$ ו-$B(8,9)$. הנקודה C על AB מקיימת $AC=4$. מצאו את C.

37 מצאו את משוואת הישר העובר דרך $(1,2)$ ומרחקו מראשית הצירים מקסימלי.

✔ תשובות סופיות – נושא 2.1

1	$(2,2)$
2	$B(8,6)$
3	10
4	$2\sqrt{13}$
5	$a=-2$ או $a=4$
6	$C(3,2)$
7	$C(2,4)$
8	$(5,1)$ ו-$(9,4)$
9	$B(11,19)$
10	4
11	$\frac{3\sqrt{5}}{5}$
12	2
13	$k=-\frac{7}{2}$ או $k=4$
14	3
15	$\sqrt{5}$
16	$3x+4y+11=0$ או $3x+4y-9=0$
17	$m=1$; $y=x-3$
18	$y=-\sqrt{3}x+4$
19	60°
20	$\approx 63.43^\circ$
21	$y=x-2$
22	$\sqrt{17}$
23	$(\frac{8}{3},\frac{4}{3})$

24	$y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$; $\frac{8\sqrt{10}}{5}$; 16
25	$AB=BC=5$, $m_{AB}\cdot m_{BC}=-1$; זווית ישרה ב-B
26	$D(2,6)$
27	$(2,3)$
28	$(\frac{21}{5},\frac{22}{5})$
29	$(\frac{3}{2},0)$
30	$(5,5)$
31	$m=0$ או $m=\frac{4}{3}$
32	20
33	$P(2,4)$; $2\sqrt{5}$
34	$\frac{24}{5}$
35	$k=2$
36	$(\frac{22}{5},\frac{21}{5})$
37	$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ (מאונך ל-OP)

2.2 המעגל – משוואה, מעגל וישר, משיקים

משוואת המעגל – $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ – מרכז (a,b), רדיוס R. מהצורה הכללית – השלמה לריבוע. מצב הדדי ישר–מעגל: משווים את מרחק המרכז מהישר ל-R. המשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

צפו לפני שמתחילים:

אנליטית – איך מוצאים משוואת מעגל?
YouTube · 7:37

אנליטית במעגל – משיקים למעגל, שאלון 572
YouTube · 9:39

אנליטית מעגל 5 יחידות – תרגיל מסכם
YouTube · 17:48

1. כתבו את משוואת המעגל שמרכזו $(3,-2)$ ורדיוסו 5.
2. כתבו את משוואת המעגל שמרכזו בראשית הצירים והוא עובר בנקודה $(4,-3)$.
3. הקטע AB הוא קוטר במעגל, $A(-1,2)$, $B(5,-6)$. מצאו את משוואת המעגל.
4. מצאו את המרכז ואת הרדיוס של המעגל $x^2+y^2-6x+8y=0$ (השלמה לריבוע).
5. מצאו את המרכז ואת הרדיוס של המעגל $x^2+y^2+4x-2y-20=0$.
6. מצאו את המרכז ואת הרדיוס של המעגל $2x^2+2y^2-8x+12y+8=0$. שימו לב למקדם!
7. האם המשוואה $x^2+y^2-2x+4y+9=0$ מתארת מעגל? נמקו.
8. נתון המעגל $(x-1)^2+(y-2)^2=25$. קבעו לכל נקודה אם היא על המעגל, בתוכו או מחוצה לו: $A(4,6)$, $B(2,1)$, $C(7,0)$.
9. מצאו את משוואת המעגל שמרכזו $(2,5)$ והוא משיק לציר x.

10 מצאו את משוואת המעגל שמרכזו $(-3,4)$ והוא משיק לציר y.

11 מצאו את משוואת המעגל שמרכזו $(1,-1)$ והוא משיק לישר $3x-4y+3=0$.

12 מצאו את משוואת המעגל העובר דרך הנקודות $(0,0)$, $(6,0)$ ו-$(0,8)$.

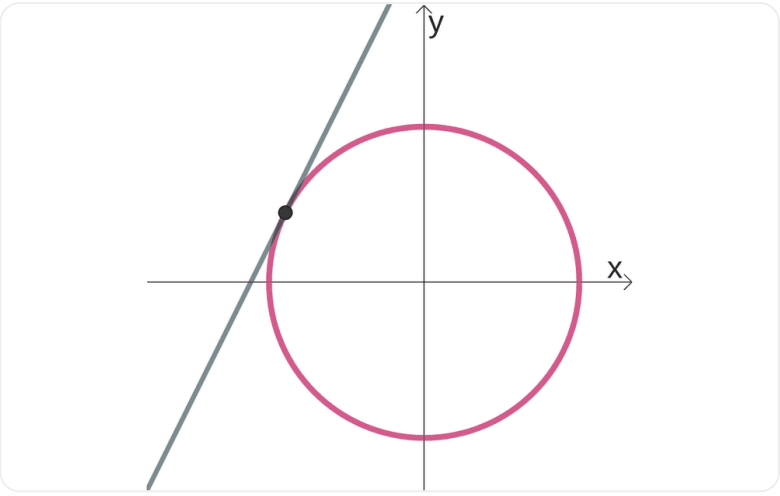
13 מצאו את משוואת המעגל החוסם את המשולש שקודקודיו $(1,1)$, $(5,1)$, $(1,7)$. מה מיוחד במרכז?

14 מרכז מעגל נמצא על הישר $y=x$, והמעגל עובר דרך $(1,0)$ ו-$(5,4)$. מצאו את משוואתו.

15 מצאו את נקודות החיתוך של המעגל $x^2+y^2=25$ עם הישר $y=x+1$.

16 מצאו את נקודות החיתוך של המעגל $(x-2)^2+(y-1)^2=10$ עם הישר $y=3x-5$.

17 קבעו את המצב ההדדי בין המעגל $x^2+y^2=20$ לבין הישר $y=2x+10$ (חותך, משיק או זר) – בעזרת מרחק המרכז מהישר.



18 קבעו את המצב ההדדי בין המעגל $(x-3)^2+y^2=4$ לבין הישר $x+y=6$.

19 לאילו ערכי b הישר $y=x+b$ חותך את המעגל $x^2+y^2=8$ בשתי נקודות?

20 חשבו את אורך המיתר שהישר $y=1$ קוטע מהמעגל $x^2+(y-4)^2=25$.

21 חשבו את אורך המיתר שהישר $x-y+1=0$ קוטע מהמעגל $(x-2)^2+(y-1)^2=10$.

22 מצאו את משוואת המשיק למעגל $x^2+y^2=25$ בנקודה $(3,4)$.

23 מצאו את משוואת המשיק למעגל $(x-1)^2+(y+2)^2=13$ בנקודה $(3,1)$.

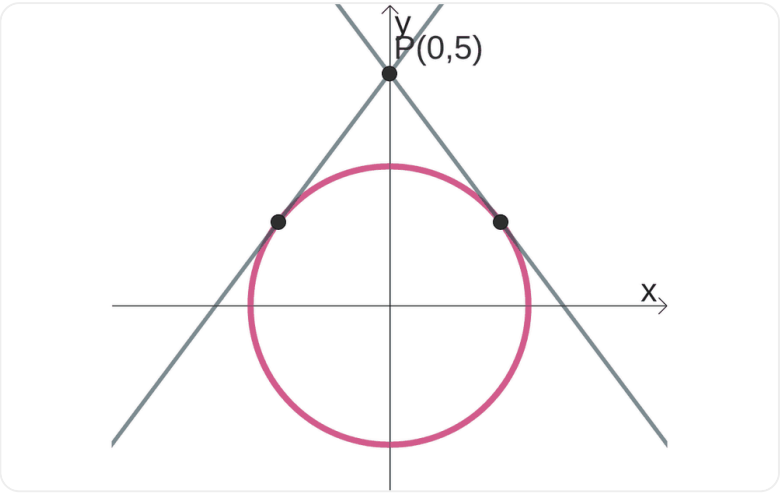
24 מצאו את משוואות המשיקים למעגל $x^2+y^2=5$ שהם בעלי שיפוע 2.

25 מצאו את משוואות המשיקים למעגל $x^2+y^2=10$ המקבילים לישר $y=-3x$.

26 מהנקודה $P(7,1)$ מעבירים משיק למעגל $(x-1)^2+(y-1)^2=20$. חשבו את אורך קטע המשיק מ-P עד נקודת ההשקה.

27 מצאו את משוואות המשיקים למעגל $x^2+y^2=4$ העוברים דרך הנקודה $(4,0)$.

28 מהנקודה $P(0,5)$ מעבירים שני משיקים למעגל $x^2+y^2=9$. מצאו את נקודות ההשקה.

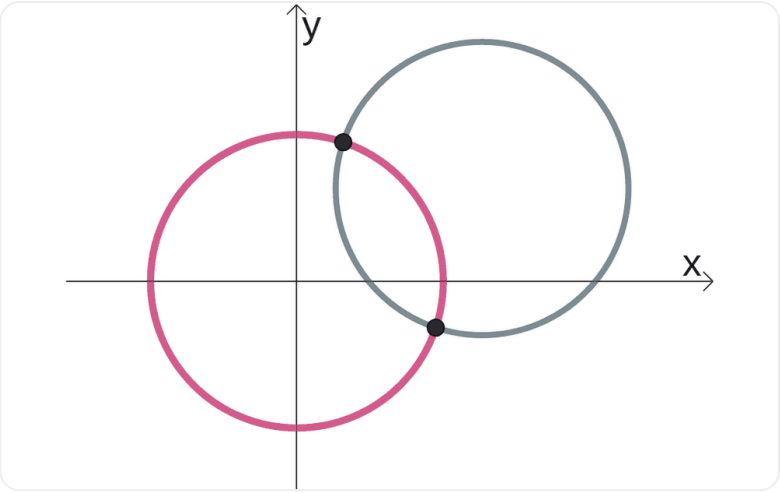


29 מצאו את משוואת המעגל שמרכזו ברביע הראשון, רדיוסו 3, והוא משיק לשני הצירים.

30 קבעו את המצב ההדדי בין המעגלים $x^2+y^2=4$ ו-$(x-5)^2+y^2=9$.

31 קבעו את המצב ההדדי בין המעגלים $x^2+y^2=25$ ו-$(x-2)^2+y^2=4$.

32 מצאו את נקודות החיתוך של המעגלים $x^2+y^2=10$
ו-$(x-4)^2+(y-2)^2=10$, ואת משוואת המיתר המשותף.



33 מצאו את משוואת המעגל שמרכזו $(4,3)$ והוא משיק מבחוץ למעגל $x^2+y^2=4$.

34 הישר $y=kx$ משיק למעגל $(x-4)^2+y^2=8$. מצאו את k ואת נקודות ההשקה.

35 נתון המעגל $x^2+y^2-4x-6y+9=0$. מצאו את הנקודה על המעגל הקרובה ביותר לראשית הצירים ואת מרחקה ממנה.

36 בתוך המעגל $x^2+y^2=25$ מעבירים מיתר שאמצעו $(1,2)$. מצאו את משוואת המיתר.

✔ תשובות סופיות – נושא 2.2

1	$(x-3)^2+(y+2)^2=25$
2	$x^2+y^2=25$
3	$(x-2)^2+(y+2)^2=25$
4	מרכז $(3,-4)$, רדיוס 5
5	מרכז $(-2,1)$, רדיוס 5
6	מרכז $(2,-3)$, רדיוס 3
7	לא - מתקבל $(x-1)^2+(y+2)^2=-4$
8	A על המעגל, B בתוכו, C מחוצה לו
9	$(x-2)^2+(y-5)^2=25$
10	$(x+3)^2+(y-4)^2=9$
11	$(x-1)^2+(y+1)^2=4$
12	$(x-3)^2+(y-4)^2=25$
13	$(x-3)^2+(y-4)^2=13$; המרכז באמצע היתר
14	$(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{17}{2}$
15	$(-4,-3)$, $(3,4)$
16	$(1,-2)$, $(3,4)$
17	משיק (מרחק $=\sqrt{20}=$ רדיוס) ; נקודת ההשקה $(-4,2)$
18	זר (מרחק >2 $\frac{3}{\sqrt{2}}$)
19	$-4<b<4$
20	8
21	$4\sqrt{2}$
22	$y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$
23	$y=-\frac{2}{3}x+3$

24	$y=2x+5$ ו- $y=2x-5$
25	$y=-3x+10$ ו- $y=-3x-10$
26	4
27	$y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)$
28	$(\pm\frac{12}{5},\frac{9}{5})$
29	$(x-3)^2+(y-3)^2=9$
30	משיקים מבחוץ ב- $(2,0)$
31	המעגל הקטן נמצא כולו בתוך הגדול (מרחק המרכזים $2<5-2$) – אין נקודות משותפות
32	$(1,3)$, $(3,-1)$; $y=-2x+5$
33	$(x-4)^2+(y-3)^2=9$
34	$k=\pm1$; $(2,2)$ ו- $(2,-2)$
35	$(2-\frac{4\sqrt{13}}{13},3-\frac{6\sqrt{13}}{13})$; $\sqrt{13}-2$
36	$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

2.3 פרבולה קנונית, אליפסה ומקום גיאומטרי

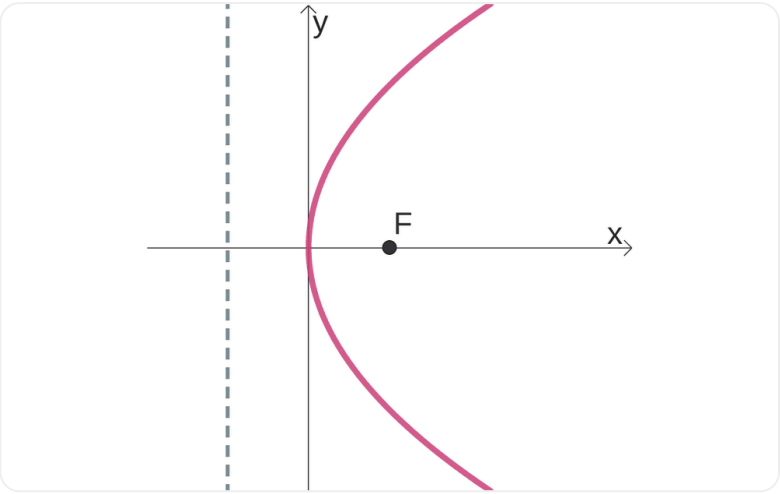
פרבולה $y^2=2px$: מוקד $\left(\frac{p}{2},0\right)$, מדריך $x=-\frac{p}{2}$; כל נקודה רחוקה מהמוקד כמו מהמדריך. אליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$: מוקדים $(\pm c,0)$, $c^2=a^2-b^2$, סכום המרחקים מהמוקדים $2a$. מקום גיאומטרי: מסמנים $P(x,y)$, כותבים את התנאי – ומפשטים.

צפו לפני שמתחילים:

טריקים לפתרון מקום גיאומטרי – שאלון 572
YouTube · 8:07

היפרבולה – שאלון 572, הסבר מלא
YouTube · 10:09

1 מצאו את המוקד ואת המדריך של הפרבולה $y^2=8x$.



2 מצאו את משוואת הפרבולה הקנונית שמוקדה $(3,0)$.

3 מצאו את משוואת הפרבולה הקנונית שהמדריך שלה הוא $x=-\frac{1}{2}$.

4 פרבולה קנונית $y^2=2px$ עוברת בנקודה $(2,4)$. מצאו את p, את המוקד ואת המדריך.

5 על הפרבולה $y^2=4x$ נמצאת נקודה ששיעור ה-x שלה 4. חשבו את מרחקה מהמוקד (בעזרת ההגדרה!).

6 מצאו את הנקודות על הפרבולה $y^2=12x$ שמרחקן מהמוקד 6.

7 מצאו את נקודות החיתוך של הפרבולה $y^2=4x$ עם הישר $y=2x-4$.

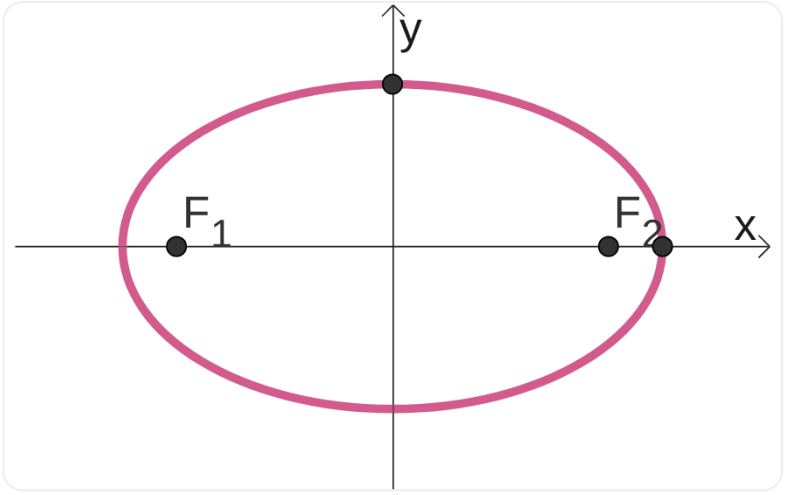
8 לאילו ערכי b הישר $y=x+b$ משיק לפרבולה $y^2=8x$?

9 מצאו את משוואת המשיק לפרבולה $y^2=6x$ בנקודה $(6,6)$.

10 מיתר המוקד של הפרבולה $y^2=8x$ מאונך לציר הסימטריה. חשבו את אורכו.

11 מצאו את משוואת המעגל שמרכזו במוקד הפרבולה $y^2=16x$ והוא משיק למדריך שלה.

12 באליפסה $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ מצאו את הקודקודים ואת המוקדים.



13 מצאו את משוואת האליפסה הקנונית שקודקודיה על ציר x ב-$(\pm6,0)$ ומוקדיה $(\pm4,0)$.

14 מצאו את משוואת האליפסה העוברת דרך $(0,2)$ ומוקדיה $(\pm\sqrt{5},0)$.

15 סכום המרחקים של כל נקודה באליפסה משני המוקדים $(\pm3,0)$ הוא 10. מצאו את משוואת האליפסה.

16 הנקודה $(4,y_0)$ נמצאת על האליפסה $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ברביע הראשון. מצאו את y_0 ואת סכום מרחקיה מהמוקדים.

17 כתבו את האליפסה $4x^2+9y^2=36$ בצורה קנונית ומצאו את מוקדיה.

18 מצאו את נקודות החיתוך של האליפסה $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ עם הישר $y=\frac{1}{2}x$.

19 מצאו את משוואת המשיק לאליפסה $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ בנקודה $\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

20 לאילו ערכי b הישר $y=x+b$ משיק לאליפסה $\frac{x^2}{3}+y^2=1$?

21 איזו צורה מתארת כל משוואה? (1) $x^2+y^2=9$ (2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ (3) $y^2=9x$ (4) $9x^2+9y^2=1$

22 מצאו את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחק שווה מהנקודות $A(1,2)$ ו-$B(5,6)$.

23 מצאו את המקום הגיאומטרי של הנקודות שמרחקן מהנקודה $(2,-1)$ שווה ל-3.

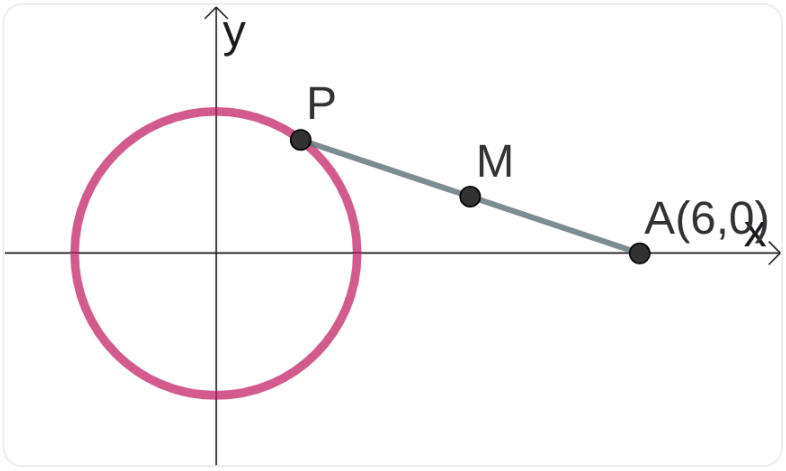
24 מצאו את המקום הגיאומטרי של הנקודות שמרחקן מהנקודה $F(4,0)$ שווה למרחקן מהישר $x=-4$.

25 מצאו את המקום הגיאומטרי של הנקודות שסכום מרחקיהן מהנקודות $(-2,0)$ ו-$(2,0)$ הוא 8.

26 מצאו את המקום הגיאומטרי של הנקודות שמרחקן מהנקודה $A(4,0)$ גדול פי 2 ממרחקן מהנקודה $O(0,0)$.

27 נקודה P נעה על המעגל $x^2+y^2=16$. מצאו את המקום הגיאומטרי של אמצעי הקטעים OP, כאשר O ראשית הצירים.

28 נקודה P נעה על המעגל $x^2+y^2=4$, והנקודה $A(6,0)$ קבועה. מצאו את המקום הגיאומטרי של אמצעי הקטעים AP.



29 נקודה P נעה על הפרבולה $y^2=4x$. מצאו את המקום הגיאומטרי של אמצע הקטע שבין P לבין מוקד הפרבולה.

30 מצאו את המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים העוברים דרך $(0,0)$ ו-$(6,0)$.

31 מצאו את המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים שרדיוסם 2 והמשיקים לציר x מלמעלה.

32 מצאו את המקום הגיאומטרי של הנקודות P שמהן רואים את הקטע AB, $A(-3,0)$, $B(3,0)$, בזווית ישרה ($\angle APB=90^\circ$).

33 נקודה $P(x,y)$ מקיימת: סכום ריבועי מרחקיה מ-$A(-1,0)$ ומ-$B(1,0)$ שווה 10. מצאו את המקום הגיאומטרי.

✔ תשובות סופיות – נושא 2.3

1	מוקד $(2,0)$, מדריך $x=-2$
2	$y^2=12x$
3	$y^2=2x$
4	$p=4$; מוקד $(2,0)$, מדריך $x=-2$
5	5
6	$(3,6)$ ו-$(3,-6)$
7	$(1,-2)$, $(4,4)$
8	$b=2$
9	$y=\frac{1}{2}x+3$
10	8
11	$(x-4)^2+y^2=64$
12	קודקודים $(\pm5,0)$, $(0,\pm3)$; מוקדים $(\pm4,0)$
13	$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$
14	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$
15	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$
16	$y_0=\frac{9}{5}$; 10
17	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; $(\pm\sqrt{5},0)$
18	$(-2,-1)$, $(2,1)$
19	$y=-\frac{1}{2}x+\sqrt{2}$
20	$b=\pm2$
21	(1) מעגל (2) אליפסה (3) פרבולה (4) מעגל
22	הישר $y=-x+7$ (האנך האמצעי)
23	המעגל $(x-2)^2+(y+1)^2=9$

24 הפרבולה $y^2 = 16x$

25 האליפסה $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

26 המעגל $(x + \frac{4}{3})^2 + y^2 = \frac{64}{9}$

27 המעגל $x^2 + y^2 = 4$

28 המעגל $(x - 3)^2 + y^2 = 1$

29 הפרבולה $y^2 = 2x - 1$

30 הישר $x = 3$

31 הישר $y = 2$

32 המעגל $x^2 + y^2 = 9$ (ללא A ו-B)

33 המעגל $x^2 + y^2 = 4$

פרק 2 סיכומון סוף פרק – גיאומטריה אנליטית

נוסחאות היסוד

- אמצע קטע: $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$
- אורך קטע: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
- חלוקה ביחס $m:n$ מ-A: $\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$
- שיפוע: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\tan\alpha$

ישרים ומרחקים

- מקבילים: $m_1=m_2$; מאונכים: $m_1\cdot m_2=-1$.
- מרחק נקודה מישר: $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.
- מרחק בין מקבילים $Ax+By+C_1=0$, $Ax+By+C_2=0$: $\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

המעגל

- $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ – מרכז (a,b), רדיוס R.
- מהצורה הכללית: השלמה לריבוע (ואם מקדם x^2 אינו 1 – מחלקים קודם).
- מעגל דרך 3 נקודות: המרכז על האנכים האמצעיים.

מעגל וישר

- $d<R$ – חותך ; $d=R$ – משיק ; $d>R$ – זר (d = מרחק המרכז מהישר).
- משיק בנקודה – מאונך לרדיוס שבנקודה.
- אורך מיתר: $2\sqrt{R^2-d^2}$; אורך משיק מנקודה P: $\sqrt{PO^2-R^2}$.

פרבולה קנונית $y^2=2px$

- מוקד $\left(\frac{p}{2},0\right)$, מדריך $x=-\frac{p}{2}$.
- מרחק נקודה מהמוקד = מרחקה מהמדריך = $x+\frac{p}{2}$.

אליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

- קודקודים $(\pm a,0)$, $(0,\pm b)$; מוקדים $(\pm c,0)$, $c^2=a^2-b^2$.
- סכום המרחקים מהמוקדים – תמיד $2a$.

מקום גיאומטרי – 3 צעדים

1. מסמנים את הנקודה הנעה $P(x,y)$.
2. מתרגמים את התנאי למשוואה (מרחק, אמצע, שיפוע...).
3. מפשטים ומזהים: ישר, מעגל, פרבולה או אליפסה.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- בנוסחת מרחק נקודה מישר – להשתמש בצורה $y=mx+b$ בלי להעביר ל-$Ax+By+C=0$.
- בחלוקת קטע – להחליף בין m ל-n (m המשקל של A הוא n).
- בהשלמה לריבוע – לשכוח להוסיף את המספרים גם לאגף השני.
- באמצעי קטעים במקום גיאומטרי – להציב את x,y של האמצע במקום הנקודה הנעה.

💡 **הטיפ של אילון:** בכל שאלת אנליטית – שרטטו סקיצה מהירה לפני שמתחילים לחשב. היא חושפת מקבילים, מאונכים ומשיקים, ומונעת טעויות סימן.

פרק 3

הווקטור הגיאומטרי

וקטורים בצורות במישור ובמרחב – הרכבה, תלות לינארית ומכפלה סקלרית

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

3.1 **פעולות בווקטורים והרכבת וקטורים בצורות** — 44 תרגילים

3.2 **תלות לינארית, נקודות על ישר ומישור ויחידות הצגה** — 34 תרגילים

3.3 **מכפלה סקלרית, אורך וקטור, זווית וניצבות** — 36 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

וקטורים – כל מה שצריך לדעת לבגרות
YouTube · 4:23

הרכבת וקטורים ובניית מסלול
YouTube · 10:27

וקטורים – יחידות ההצגה
YouTube · 10:16

מכפלה סקלרית – זווית בין וקטורים
YouTube · 11:09

3.1 פעולות בווקטורים והרכבת וקטורים בצורות

ווקטור נקבע לפי גודל וכיוון. מסלול: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$; חיסור: $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.
בכל תרגיל מבטאים את הווקטור המבוקש באמצעות וקטורי ההצגה $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ – בוחרים מסלול על צלעות הצורה ומחברים.

צפו לפני שמתחילים:



הוקטור הגיאומטרי – חיבור וחיסור וקטורים
YouTube · 2:57



הרכבת וקטורים, חיבור וחיסור ובניית מסלול
YouTube · 10:27



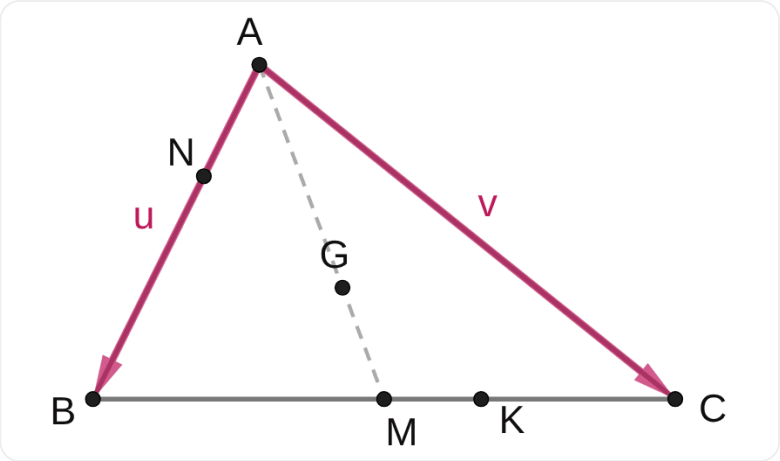
צורות במרחב – תיבה וקובייה
YouTube · 7:01



צורות במרחב – פירמידה
YouTube · 11:06

1. פשטו את הביטוי $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$.
2. פשטו את הביטוי $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.
3. הראו ש-$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$. מה המשמעות הגיאומטרית?
4. פשטו את הביטוי $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}$.
5. פשטו את הביטוי $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MB}$.
6. פשטו את הביטוי $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$.
7. מצאו את הווקטור $\vec{x}$ המקיים $\overrightarrow{AB}+\vec{x}=\overrightarrow{AC}$.
8. פשטו את הביטוי $3(\vec{u}-2\vec{v})-2(\vec{u}-4\vec{v})$.
9. מצאו את $\vec{x}$ המקיים $2\vec{x}+\vec{u}=3(\vec{x}-\vec{v})$.

10 במשולש ABC נתון: $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$. הנקודה M היא אמצע BC. הביעו את $\overrightarrow{AM}$ באמצעות $\vec{u}$ ו-$\vec{v}$.



11 (הציור בתרגיל 10) הביעו את $\overrightarrow{BM}$ באמצעות $\vec{u}$ ו-$\vec{v}$.

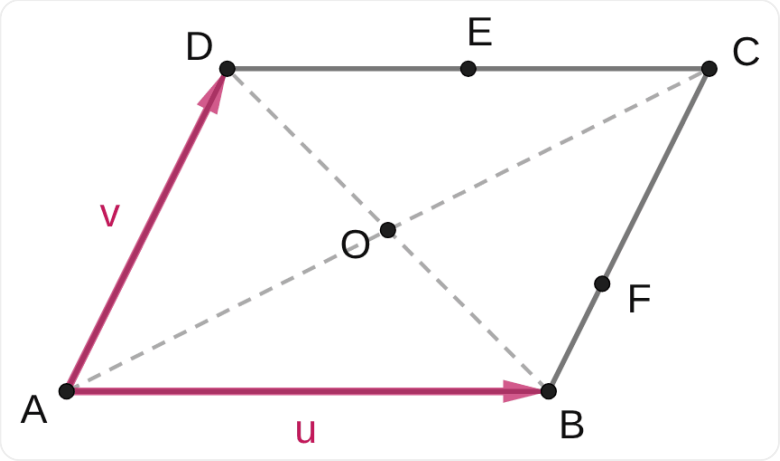
12 (הציור בתרגיל 10) G היא נקודת מפגש התיכונים במשולש. הביעו את $\overrightarrow{AG}$.

13 (הציור בתרגיל 10) הנקודה N על AB מקיימת $AN:NB=1:2$. הביעו את $\overrightarrow{CN}$.

14 (הציור בתרגיל 10) הנקודה K על BC מקיימת $BK:KC=2:1$. הביעו את $\overrightarrow{AK}$.

15 במשולש ABC ($\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$), F אמצע AB ו-E אמצע AC. הביעו את $\overrightarrow{FE}$ והסיקו מה הקשר בין FE ל-BC.

16 $ABCD$ מקבילית, $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$. הביעו את האלכסונים $\overrightarrow{AC}$ ו-$\overrightarrow{BD}$.



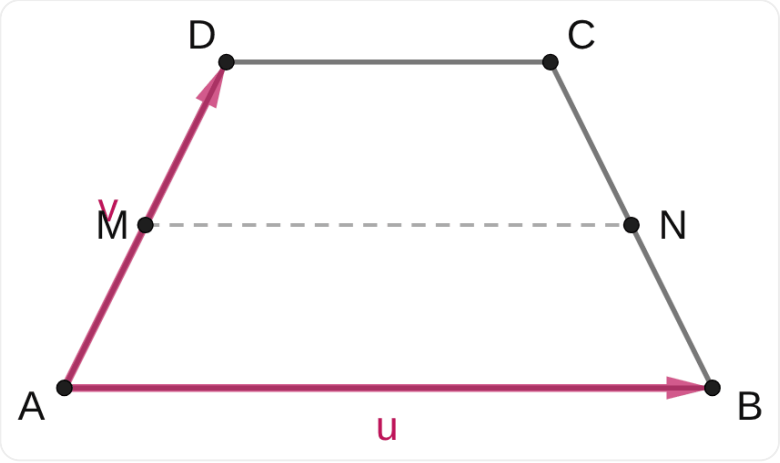
17 (הציור בתרגיל 16) O נקודת מפגש האלכסונים. הביעו את $\overrightarrow{OC}$ ואת $\overrightarrow{OD}$.

18 (הציור בתרגיל 16) E אמצע הצלע DC. הביעו את $\overrightarrow{AE}$.

19 (הציור בתרגיל 16) הנקודה F על BC מקיימת $BF=\frac{1}{3}BC$. הביעו את $\overrightarrow{DF}$.

20 (הציור בתרגיל 16) הביעו את $\overrightarrow{EF}$, כאשר E אמצע DC ו-$BF=\frac{1}{3}BC$.

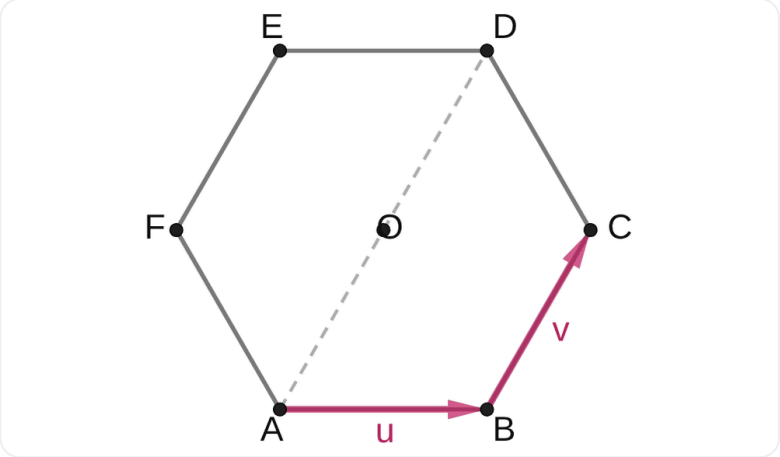
21 $ABCD$ טרפז ($AB \parallel DC$) שבו $AB=2DC$. נתון $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$. הביעו את $\overrightarrow{DC}$ ואת $\overrightarrow{BC}$.



22 (הציור בתרגיל 21) הביעו את האלכסונים $\overrightarrow{AC}$ ו-$\overrightarrow{BD}$.

23 (הציור בתרגיל 21) M ו-N אמצעי השוקיים AD ו-BC. הביעו את $\overrightarrow{MN}$ והסיקו את אורך קטע האמצעים ביחס ל-AB.

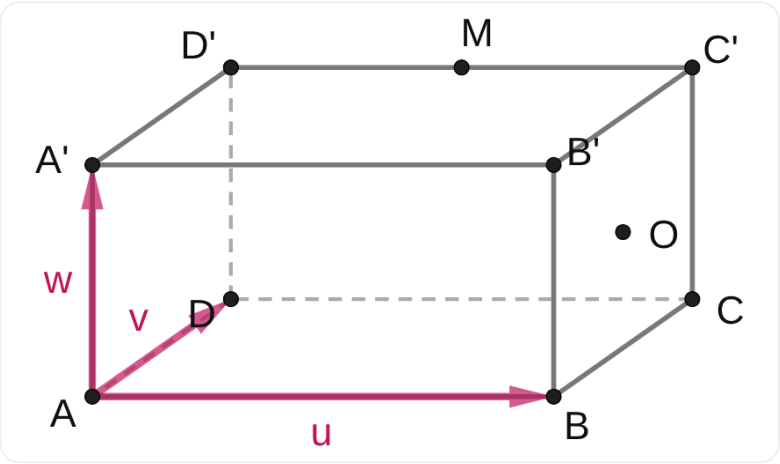
24 $ABCDEF$ משושה משוכלל שמרכזו O. נתון $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$. הביעו את $\overrightarrow{AO}$ ואת $\overrightarrow{AD}$.



25 (הציור בתרגיל 24) הביעו את $\overrightarrow{CD}$ ואת $\overrightarrow{AE}$.

26 (הציור בתרגיל 24) הביעו את $\overrightarrow{FC}$ באמצעות $\vec{u}$ ו-$\vec{v}$.

27 $ABCDA'B'C'D'$ תיבה. נתון $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$. הביעו את האלכסון $\overrightarrow{AC'}$.



28 (הציור בתרגיל 27) הביעו את $\overrightarrow{B'D}$.

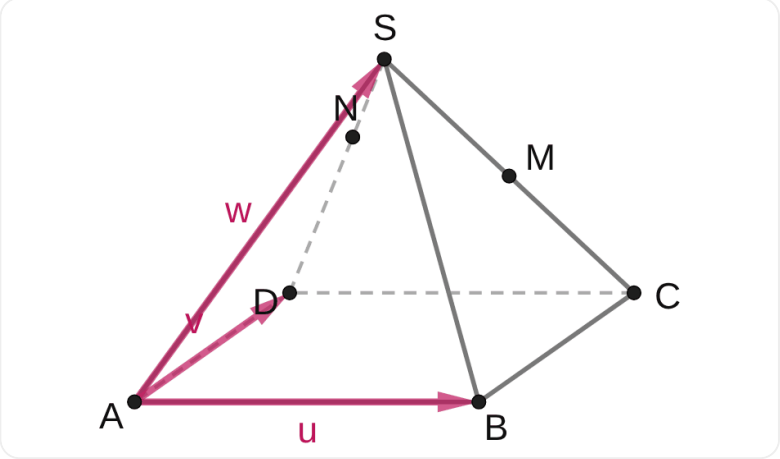
29 (הציור בתרגיל 27) M אמצע המקצוע $C'D'$. הביעו את $\overrightarrow{AM}$ ואת $\overrightarrow{BM}$.

30 (הציור בתרגיל 27) O מרכז הפאה $BCC'B'$. הביעו את $\overrightarrow{AO}$.

31 (הציור בתרגיל 27) K מרכז התיבה (מפגש האלכסונים). הביעו את $\overrightarrow{D'K}$.

32 (הציור בתרגיל 27) מצאו וקטור במסלול על פני המקצועות מ-B ל-D' ובדקו שהוא שווה ל-$-\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.

33 $SABCD$ פירמידה שבסיסה הריבוע $ABCD$. נתון $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AS}=\vec{w}$. הביעו את $\overrightarrow{SC}$.



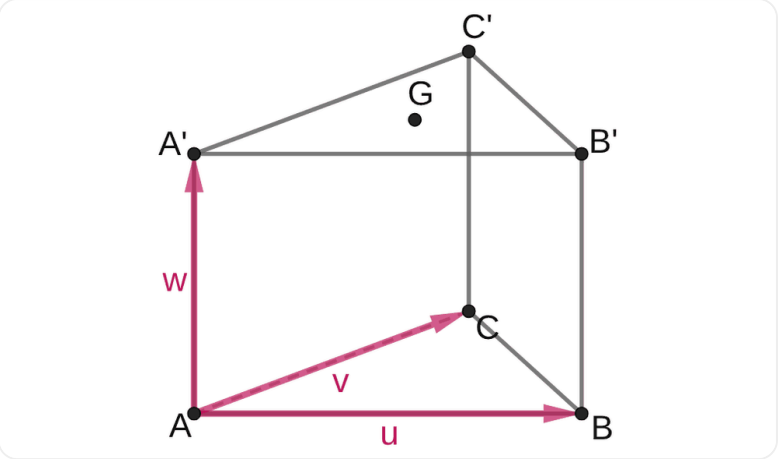
34 (הציור בתרגיל 33) M אמצע המקצוע SC. הביעו את $\overrightarrow{AM}$ ואת $\overrightarrow{BM}$.

35 (הציור בתרגיל 33) הנקודה N על SD מקיימת $SN:ND=1:2$. הביעו את $\overrightarrow{AN}$.

.

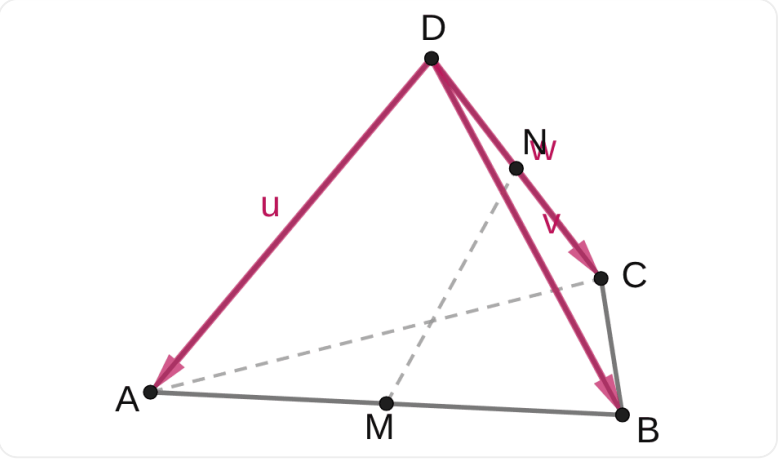
36 (הציור בתרגיל 33) הביעו את $\overrightarrow{MN}$, כאשר M אמצע SC ו-$SN:ND=1:2$.

37 $ABCA'B'C'$ מנסרה משולשת. נתון $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$. הביעו את $\overrightarrow{BC'}$.



38 (הציור בתרגיל 37) G נקודת מפגש התיכונים במשולש $A'B'C'$. הביעו את $\overrightarrow{AG}$.

39 $DABC$ ארבעון. נתון $\overrightarrow{DA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{v}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{w}$. G נקודת מפגש התיכונים בפאה ABC. הביעו את $\overrightarrow{DG}$.



40 (הציור בתרגיל 39) M אמצע AB ו- N אמצע DC. הביעו את $\overrightarrow{MN}$.

41 (הציור בתרגיל 39) הביעו את $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ באמצעות $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

42 בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ ($\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$) הנקודה P על CC' מקיימת $CP:PC'=1:3$. הביעו את $\overrightarrow{AP}$.

43 נתון $\overrightarrow{AB}=2\vec{u}-\vec{v}$ ו-$\overrightarrow{AC}=\vec{u}+3\vec{v}$. הביעו את $\overrightarrow{BC}$ ואת $\overrightarrow{CB}$.

44 $ABCD$ מרובע שבו $\overrightarrow{AB}=\vec{u}+2\vec{v}$, $\overrightarrow{BC}=3\vec{u}$, $\overrightarrow{CD}=-\vec{u}-2\vec{v}$. איזה מרובע זה? נמקו.

✔ תשובות סופיות – נושא 3.1

1	$\overrightarrow{AD}$
2	$\overrightarrow{CB}$
3	חוזרים לנקודת המוצא – מסלול סגור
4	$\vec{0}$
5	$\vec{0}$
6	$\overrightarrow{AB}$
7	$\vec{x}=\overrightarrow{BC}$
8	$\vec{u}+2\vec{v}$
9	$\vec{x}=\vec{u}+3\vec{v}$
10	$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$
11	$\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$
12	$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}$
13	$\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\vec{u}-\vec{v}$
14	$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{2}{3}\vec{v}$
15	$\overrightarrow{FE}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ – מקביל ושווה למחצית
16	$\overrightarrow{BD}=-\vec{u}+\vec{v}\ ;\ \overrightarrow{AC}=\vec{u}+\vec{v}$
17	$\overrightarrow{OD}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\ ;\ \overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$
18	$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$
19	$\overrightarrow{DF}=\vec{u}-\frac{2}{3}\vec{v}$
20	$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{2}{3}\vec{v}$
21	$\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}\ ;\ \overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\vec{u}$

22 $\overrightarrow{BD}=-\vec{u}+\vec{v}\ ;\ \overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$

23 $MN=\frac{3}{4}AB\ ;\ \overrightarrow{MN}=\frac{3}{4}\vec{u}$

24 $\overrightarrow{AD}=2\vec{v}\ ;\ \overrightarrow{AO}=\vec{v}$

25 $\overrightarrow{AE}=-\vec{u}+2\vec{v}\ ;\ \overrightarrow{CD}=-\vec{u}+\vec{v}$

26 $\overrightarrow{FC}=2\vec{u}$

27 $\overrightarrow{AC'}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

28 $\overrightarrow{B'D}=-\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$

29 $\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\ ;\ \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

30 $\overrightarrow{AO}=\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$

31 $\overrightarrow{D'K}=\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{w}$

32 $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}=-\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

33 $\overrightarrow{SC}=\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$

34 $\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}\ ;\ \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$

35 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\vec{v}+\frac{2}{3}\vec{w}$

36 $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{6}\vec{v}+\frac{1}{6}\vec{w}$

37 $\overrightarrow{BC'}=-\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

38 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}+\vec{w}$

39 $\overrightarrow{DG}=\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}$

40 $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$

41 $\overrightarrow{AC}=-\vec{u}+\vec{w}$

42 $\overrightarrow{AP}=\vec{u}+\vec{v}+\frac{1}{4}\vec{w}$

43 $\overrightarrow{CB}=\vec{u}-4\vec{v}\ ;\ \overrightarrow{BC}=-\vec{u}+4\vec{v}$

44 מקבילית: $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}$, כלומר $AB\parallel DC$ ו- $AB=DC$

3.2 תלות לינארית, נקודות על ישר ומישור ויחידות הצגה

$\vec{u}$, $\vec{v}$ שאינם מקבילים הם יחידות הצגה במישור: $a\vec{u}+b\vec{v}=c\vec{u}+d\vec{v}$ גורר $a=c$, $b=d$. אם $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ – הנקודה P על הישר AB אם ורק אם $\alpha+\beta=1$ (ובמרחב: על המישור ABC כשסכום שלושת המקדמים 1).

צפו לפני שמתחילים:



הוקטור הגיאומטרי – תלות לינארית
YouTube · 3:52



וקטורים שמוצאם באותה נקודה וסופם על אותו ישר
YouTube · 6:35



תיאור של מישור וקומבינציה לינארית
YouTube · 3:33



וקטורים – יחידות ההצגה
YouTube · 10:16

1 האם הווקטורים $2\vec{u}-4\vec{v}$ ו-$-\vec{u}+2\vec{v}$ תלויים לינארית? נמקו.

2 $\vec{u}$ ו-$\vec{v}$ אינם מקבילים. מצאו את k שעבורו $k\vec{u}+6\vec{v}$ מקביל ל-$2\vec{u}+3\vec{v}$.

3 $\vec{u}$ ו-$\vec{v}$ אינם מקבילים, ו-$(a-1)\vec{u}+(b+2)\vec{v}=3\vec{u}-\vec{v}$. מצאו את a ואת b.

4 $\vec{u}$ ו-$\vec{v}$ בלתי תלויים לינארית, ו-$a\vec{u}+b\vec{v}=\vec{0}$. מה אפשר לומר על a ו-b? נמקו.

5 נתון $\overrightarrow{AB}=2\vec{u}-\vec{v}$ ו-$\overrightarrow{BC}=4\vec{u}-2\vec{v}$. הוכיחו ש-$A$, B, C על ישר אחד ומצאו את היחס $BC:AB$.

6 $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ (O, A, B לא על ישר אחד) ו-$\overrightarrow{OC}=3\vec{u}-2\vec{v}$. האם C על הישר AB?

7 $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$, $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}$. האם C על הישר AB?

8 $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$, $\overrightarrow{OP}=k\vec{u}+(3-2k)\vec{v}$. מצאו את k שעבורו P על הישר AB, ואת $\overrightarrow{OP}$.

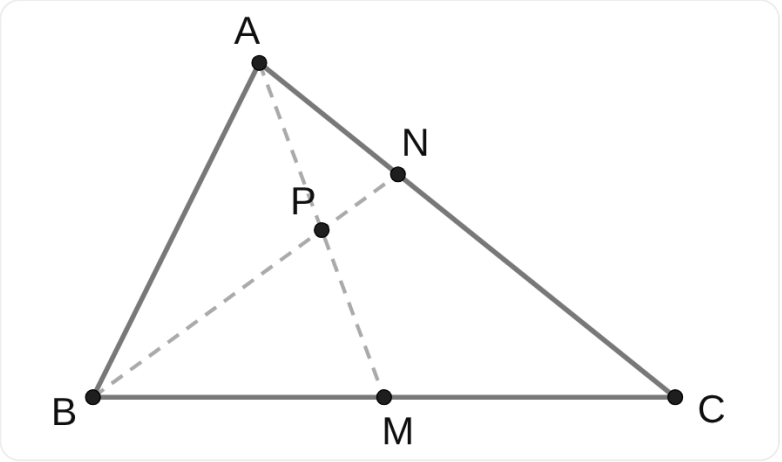
9 $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$ (לא באותו מישור), ו- $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{4}\vec{v}+\frac{1}{4}\vec{w}$.
האם P במישור ABC?

10 באותם נתונים ($\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$),
$\overrightarrow{OP}=t\vec{u}+(t+1)\vec{v}+(2t-3)\vec{w}$. מצאו את t שעבורו P במישור ABC.

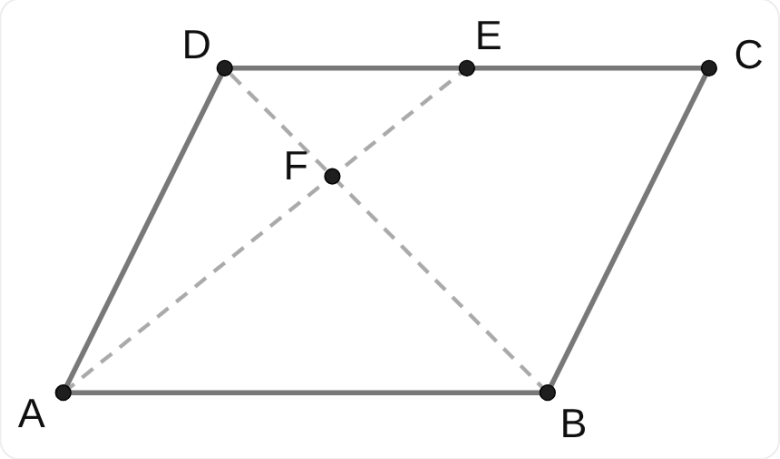
11 $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$. הנקודה C על הקטע AB ו- $AC:CB=1:3$. הביעו את $\overrightarrow{OC}$.

12 במשולש ABC ($\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$) הנקודה P מקיימת $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$. האם P בתוך המשולש?

13 במשולש ABC, M אמצע BC ו- N על AC כך ש- $AN:NC=1:2$. הקטעים AM ו- BN נחתכים ב- P. מצאו את היחסים $AP:PM$ ו- $BP:PN$.



14 $ABCD$ מקבילית ו-E אמצע DC. הקטע AE חותך את האלכסון BD בנקודה F. מצאו את $FE:AF$ ואת $FD:BF$.



15 במשולש ABC, D על AB כך ש-$AD:DB=2:1$ ו-E אמצע AC. הקטעים CD ו-BE נחתכים ב-P. מצאו את $CP:PD$ ואת $BP:PE$.

16 $ABCD$ טרפז ($AB\parallel DC$) שבו $AB=3DC$. האלכסונים נחתכים ב-O. מצאו את $AO:OC$ בעזרת וקטורים.

17 $ABCD$ מקבילית ו-M אמצע BC. הקטע DM חותך את האלכסון AC ב-K. מצאו את $AK:KC$ ואת $DK:KM$.

18 בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ ($\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$) האלכסון AC' חותך את המישור $A'BD$ בנקודה P. הביעו את $\overrightarrow{AP}$ ומצאו את $AP:PC'$.

19 בארבעון $DABC$ ($\overrightarrow{DA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{v}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{w}$), G מפגש התיכונים של ABC ו-P על DG כך ש-$DP:PG=3:1$. הביעו את $\overrightarrow{DP}$.

20 נתון $\vec{x}=2\vec{u}+\vec{v}$ ו-$\vec{y}=\vec{u}-\vec{v}$. הביעו את $\vec{u}$ ואת $\vec{v}$ באמצעות $\vec{x}$ ו-$\vec{y}$.

21 במקבילית $ABCD$ ($\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$) הביעו את $\vec{u}$ ואת $\vec{v}$ באמצעות האלכסונים $\overrightarrow{AC}$ ו-$\overrightarrow{BD}$.

22 מצאו את a ואת b המקיימים $a(\vec{u}+\vec{v})+b(\vec{u}-\vec{v})=5\vec{u}+\vec{v}$ ($\vec{u}$, $\vec{v}$ לא מקבילים).

23 מצאו את t שעבורו הווקטורים $\vec{u}+2\vec{v}$ ו-$3\vec{u}+t\vec{v}$ מקבילים.

24 $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ אינם באותו מישור. מצאו את k שעבורו הווקטור $\vec{u}+k\vec{v}+\vec{w}$ נמצא במישור של $\vec{u}$ ושל $\vec{v}+\vec{w}$.

25 נתון $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AD}=2\vec{u}-3\vec{v}$. האם A, B, C, D באותו מישור? נמקו.

26 נתון $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$, כאשר $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ אינם באותו מישור. האם A, B, C, D באותו מישור?

27 נתון $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AD}=m\vec{u}+(m-2)\vec{v}+(m-4)\vec{w}$. מצאו את m שעבורו ארבע הנקודות באותו מישור.

28 $ABCDEF$ משושה משוכלל. הביעו את $\overrightarrow{AD}$ באמצעות $\overrightarrow{AB}$ ו-$\overrightarrow{AF}$.

29 במרובע $ABCD$ נתון $\overrightarrow{AB}=2\vec{u}-\vec{v}$ ו-$\overrightarrow{DC}=2\vec{u}-\vec{v}$. מה אפשר להסיק על המרובע?

30 בקובייה $ABCDA'B'C'D'$ ($\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$) M אמצע $A'B'$ ו-N אמצע BC. הביעו את $\overrightarrow{MN}$. האם MN מקביל למישור $ABCD$?

31 האם הווקטורים $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{u}+\vec{w}$ תלויים לינארית, אם $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ אינם באותו מישור?

32 נתון $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$. הנקודה C על המשך AB מעבר ל-B כך ש-$BC=2AB$. הביעו את $\overrightarrow{OC}$.

33 במשולש OAB ($\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$) הנקודה P מקיימת $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\vec{u}+\frac{3}{5}\vec{v}$. הראו ש-$P$ על AB ומצאו את $AP:PB$.

34 בפירמידה $SABCD$ שבסיסה מקבילית ($\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AS}=\vec{w}$), M אמצע SC. האם $\overrightarrow{AM}$ במישור של $\overrightarrow{AS}$ ו-$\overrightarrow{AC}$? נמקו.

✔ תשובות סופיות – נושא 3.2

1	כן: הראשון שווה ל-(-2) כפול השני
2	$k=4$
3	$a=4$, $b=-3$
4	$a=b=0$ – אחרת אחד הווקטורים היה כפולה של השני
5	$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}$; $AB:BC=1:2$
6	כן – סכום המקדמים $3+(-2)=1$; C מחוץ לקטע AB
7	לא – סכום המקדמים $\frac{7}{12}\neq 1$
8	$k=2$; $\overrightarrow{OP}=2\vec{u}-\vec{v}$
9	כן – סכום המקדמים שווה ל-1
10	$t=\frac{3}{4}$
11	$\overrightarrow{OC}=\frac{3}{4}\vec{u}+\frac{1}{4}\vec{v}$
12	כן – המקדמים חיוביים וסכומם $\frac{5}{6}<1$
13	$AP:PM=1:1$; $BP:PN=3:1$
14	$AF:FE=2:1$; $BF:FD=2:1$
15	$CP:PD=3:1$; $BP:PE=1:1$
16	$AO:OC=3:1$
17	$AK:KC=2:1$; $DK:KM=2:1$
18	$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}$; $AP:PC'=1:2$
19	$\overrightarrow{DP}=\frac{1}{4}\vec{u}+\frac{1}{4}\vec{v}+\frac{1}{4}\vec{w}$
20	$\vec{u}=\frac{1}{3}\vec{x}+\frac{1}{3}\vec{y}$; $\vec{v}=\frac{1}{3}\vec{x}-\frac{2}{3}\vec{y}$
21	$\vec{u}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$; $\vec{v}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$
22	$a=3$, $b=2$

23 $t = 6$

24 $k = 1$

25 כן – $\overrightarrow{AD}$ צירוף לינארי של $\overrightarrow{AB}$ ו-$\overrightarrow{AC}$

26 לא – המקדם של $\vec{w}$ אינו 0

27 $m = 4$

28 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}$

29 מקבילית ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$)

30 $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}$; לא (יש רכיב של $\vec{w}$)

31 לא – הם בלתי תלויים

32 $\overrightarrow{OC} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$

33 $AP : PB = 3 : 2$

34 כן: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

3.3 מכפלה סקלרית, אורך וקטור, זווית וניצבות

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$; $|\vec{u}|^2=\vec{u}\cdot\vec{u}$; $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \iff \vec{u}\perp\vec{v}$. לחישוב אורך של צירוף – מעלים בריבוע ופותחים סוגריים כמו בכפל מקוצר.

צפו לפני שמתחילים:



מכפלה סקלרית – מה זה?
YouTube · 1:28



מכפלה סקלרית – מציאת זווית בין וקטורים
YouTube · 11:09



הוקטור הגיאומטרי – גודל של וקטור
YouTube · 4:07



תרגול מכפלה סקלרית ויצירתיות
YouTube · 9:23

1 נתון $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=4$ והזווית בין הווקטורים 60°. חשבו את $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

2 (נתוני תרגיל 1) חשבו את $|\vec{u}+\vec{v}|$.

3 נתון $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=5$ ו-$\vec{u}\cdot\vec{v}=-5$. מצאו את הזווית בין $\vec{u}$ ל-$\vec{v}$.

4 $\vec{u}$ ו-$\vec{v}$ וקטורי יחידה מאונכים. חשבו את $|\vec{u}-\vec{v}|$ ואת $|3\vec{u}+4\vec{v}|$.

5 נתון $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ והזווית ביניהם 60°. מצאו את k שעבורו $\vec{u}+k\vec{v}$ מאונך ל-$2\vec{u}-\vec{v}$.

6 ידוע ש-$|\vec{u}|=|\vec{v}|=|\vec{u}-\vec{v}|$. מצאו את הזווית בין $\vec{u}$ ל-$\vec{v}$.

7 הוכיחו: אם $|\vec{u}|=|\vec{v}|$ אז $(\vec{u}+\vec{v})\perp(\vec{u}-\vec{v})$. איזו תכונה של המעוין נובעת מכך?

8 ידוע ש-$|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}-\vec{v}|$. מה הזווית בין $\vec{u}$ ל-$\vec{v}$? איזה מרובע נוצר?

9 $|\vec{u}|=|\vec{v}|$ והזווית ביניהם 60°. מצאו את הזווית בין $\vec{u}$ ל-$\vec{u}+\vec{v}$.

10 במקבילית $ABCD$: $AB=4$, $AD=6$, $\angle BAD=60^\circ$. חשבו את אורכי האלכסונים בעזרת מכפלה סקלרית.

11 נתון $|\vec{u}|=3$, $|\vec{u}+\vec{v}|=7$ והזווית בין $\vec{u}$ ל-$\vec{v}$ היא 60°. מצאו את $|\vec{v}|$.

12 $|\vec{u}|=|\vec{v}|=2$ ו-$(\vec{u}+2\vec{v})\perp(5\vec{u}-4\vec{v})$. מצאו את הזווית בין $\vec{u}$ ל-$\vec{v}$.

13 $\vec{u}$ ו-$\vec{v}$ וקטורי יחידה והזווית ביניהם 120°. חשבו את $|2\vec{u}+\vec{v}|$.

14 משולש ABC שווה צלעות שאורך צלעו 2. חשבו את $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$. (שימו לב לזווית!)

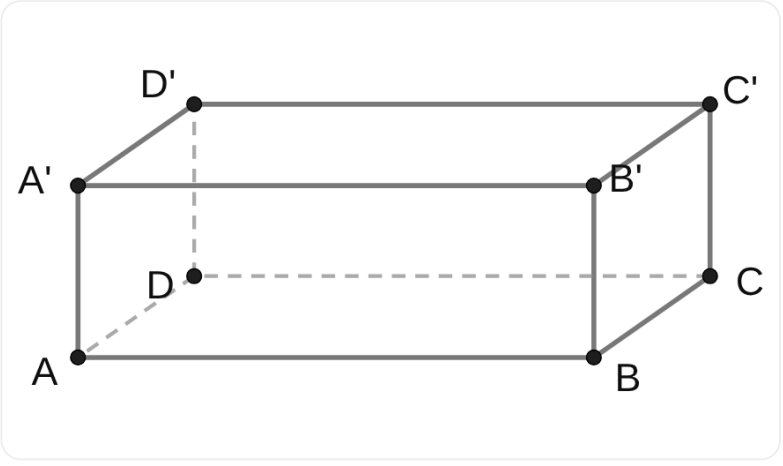
15 במשולש ABC: $AB=5$, $AC=8$, $\angle A=60^\circ$. חשבו את $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ואת אורך BC.

16 (נתוני תרגיל 15) חשבו את אורך התיכון AM לצלע BC.

17 $ABCD$ ריבוע שאורך צלעו 4 ו-E אמצע BC. חשבו את $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}$.

18 $ABCD$ מלבן שבו $AB=6$, $AD=4$, ו-P אמצע DC. מצאו את $\angle APB$ בעזרת מכפלה סקלרית.

19 בתיבה $ABCDA'B'C'D'$: $AB=6$, $AD=3$, $AA'=2$. חשבו את אורך האלכסון AC' בעזרת וקטורים.



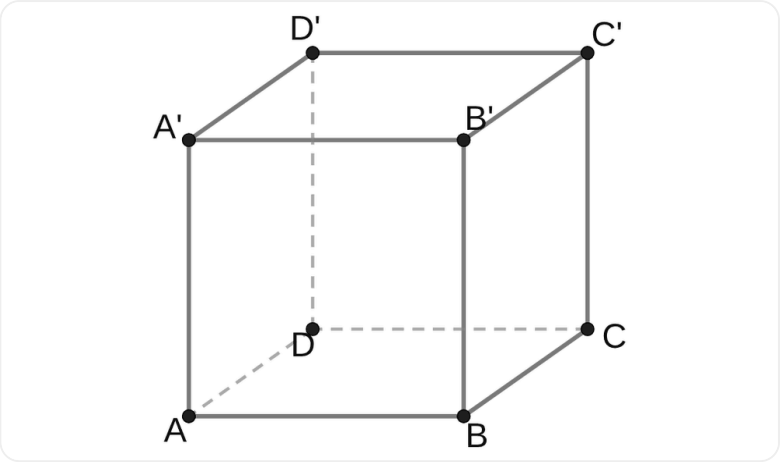
20 (הציור בתרגיל 19) מצאו את הזווית בין האלכסון AC' לאלכסון הבסיס AC.

21 (הציור בתרגיל 19) מצאו את הזווית בין AC' למקצוע AB.

22 (הציור בתרגיל 19) מצאו את הזווית החדה בין האלכסונים AC' ו-BD' של התיבה.

23 (הציור בתרגיל 19) חשבו את $\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{BD'}$.

24 בקובייה $ABCDA'B'C'D'$ מצאו את הזווית בין האלכסונים AC' ו-BD'.

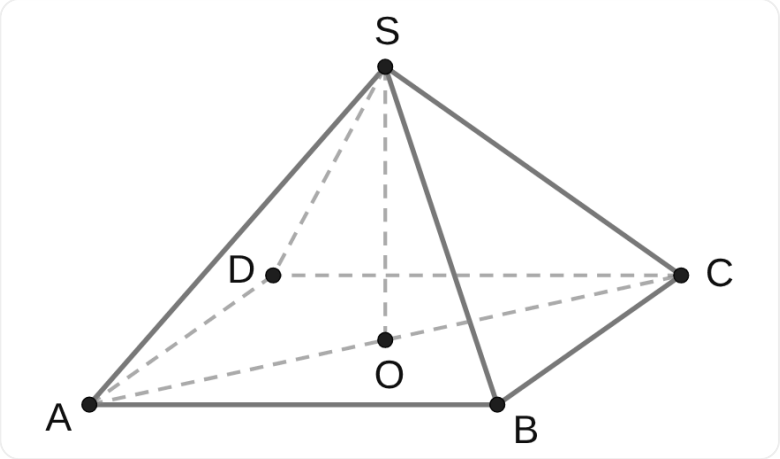


25 (הציור בתרגיל 24) מצאו את הזווית בין האלכסונים AB' ו-AD' של שתי פאות סמוכות.

26 (הציור בתרגיל 24) הוכיחו שהאלכסון AC' מאונך לאלכסון הבסיס BD.

27 (הציור בתרגיל 24) מצאו את הזווית החדה בין הישרים AC' ו-$A'C$.

28 $SABCD$ פירמידה ישרה שבסיסה ריבוע שאורך צלעו 6, וגובהה $SO=4$ (O מרכז הבסיס). חשבו את אורך המקצוע הצדדי SA.



29 (הציור בתרגיל 28) מצאו את הזווית $\angle ASC$.

30 (הציור בתרגיל 28) מצאו את הזווית $\angle ASB$ בין שני מקצועות צדדיים סמוכים.

31 (הציור בתרגיל 28) מצאו את הזווית בין המקצוע SB לבסיס (הזווית $\angle SBO$).

32 $DABC$ ארבעון משוכלל שאורך מקצועו 3 ($\overrightarrow{DA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{v}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{w}$).
חשבו את $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ואת אורך הגובה DG (G מרכז הפאה ABC).

33 (נתוני תרגיל 32) M אמצע AB ו-N אמצע DC. חשבו את אורך MN.

34 (נתוני תרגיל 32) הוכיחו שבארבעון משוכלל מקצועות נגדיים מאונכים: $\overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{BC}$.

35 $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=1$, והזווית ביניהם 60°. חשבו את $(3\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+2\vec{v})$.

36 $|\vec{u}|=4$ ו-$|\vec{v}|=3$. לאילו ערכים יכולה להגיע המכפלה $\vec{u}\cdot\vec{v}$? מתי היא מקסימלית?

✔ תשובות סופיות – נושא 3.3

1	6
2	$\sqrt{37}$
3	120°
4	5 ; $\sqrt{2}$
5	$k=\frac{5}{3}$
6	60°
7	$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\lvert\vec{u}\rvert^2-\lvert\vec{v}\rvert^2=0$; האלכסונים מאונכים
8	90° ; מלבן (אלכסונים שווים)
9	30°
10	$AC=2\sqrt{19}$; $BD=2\sqrt{7}$
11	5
12	60°
13	$\sqrt{3}$
14	-2
15	20 ; $BC=7$
16	$AM=\frac{\sqrt{129}}{2}$
17	-8
18	$\cos\angle APB=\frac{7}{25}$; 73.74°
19	7
20	$\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{7}$; 16.60°
21	$\cos\alpha=\frac{6}{7}$; 31°
22	$\cos\alpha=\frac{23}{49}$; 62.01°
23	-31

24	70.53° ; $\cos\alpha=\frac{1}{3}$
25	60°
26	$\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{BD}=0$
27	70.53° ; $\cos\alpha=\frac{1}{3}$
28	$\sqrt{34}$
29	93.37° ; $\cos=-\frac{1}{17}$
30	61.93° ; $\cos=\frac{8}{17}$
31	43.31° ; $\cos=\frac{3\sqrt{17}}{17}$
32	$DG=\sqrt{6}$; $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{9}{2}$
33	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
34	$\vec{u}\cdot(\vec{w}-\vec{v})=0$
35	15
36	$-12\le\vec{u}\cdot\vec{v}\le 12$; מקסימום כשהווקטורים באותו כיוון

פרק 3 סיכומון סוף פרק – הווקטור הגיאומטרי

חיבור, חיסור וכפל בסקלר

- כלל המשולש: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$; מסלול סגור נותן $\vec{0}$.
- חיסור: $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ (מהסוף של המחסר לסוף של המחוסר).
- $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$; $k\vec{u}$ מקביל ל-$\vec{u}$ ($k<0$ – כיוון הפוך).

נקודות מיוחדות

- אמצע M של BC: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.
- מפגש תיכונים: $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.
- P על AB ו-$AP:PB=m:n$: $\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

הרכבה בצורות

- מקבילית: $\overrightarrow{AC}=\vec{u}+\vec{v}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{v}-\vec{u}$.
- תיבה: $\overrightarrow{AC'}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ – מסלול על שלושה מקצועות.
- טרפז ($AB=k\cdot DC$): $\overrightarrow{DC}=\frac{1}{k}\vec{u}$.

תלות לינארית ויחידות הצגה

- $\vec{a}\parallel\vec{b}\iff\vec{a}=k\vec{b}$.
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ לא מקבילים:
  $a\vec{u}+b\vec{v}=c\vec{u}+d\vec{v}\Rightarrow a=c,\ b=d$.

על ישר אחד / באותו מישור

- A, B, C על ישר: $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$.
- P – $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ אם AB על $\alpha+\beta=1$.
- D – $\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$ במישור ABC.

נקודת חיתוך של קטעים

- מבטאים את $\overrightarrow{AP}$ בשתי דרכים: $t\cdot(\dots)$ ו-$\overrightarrow{AB}+s\cdot(\dots)$.
- משווים מקדמים של $\vec{u}$ ושל $\vec{v}$ ופותרים את t, s – מהם היחסים.

מכפלה סקלרית

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$; $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$.
- ניצבות: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
- אורך צירוף:
  $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2$.
- זווית: $\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ במשולש שווה צלעות – הזווית בין הווקטורים 120°, לא 60°!
- לבלבל בין $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ ל-$\overrightarrow{BC}$ (התשובה: $\overrightarrow{CB}$).
- זווית בין ישרים היא חדה – אם יצא cos שלילי לוקחים ערך מוחלט.

💡 **הטיפ של אילון:** לפני כל חישוב – סמנו על הציור את $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ והחליטו על מסלול. כמעט כל שאלה נפתרת ב"ללכת על הצלעות".

פרק 4

הווקטור האלגברי

וקטורים בשיעורים – ישרים ומישורים במרחב, זוויות, מצבים הדדיים ומרחקים

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

4.1 וקטורים אלגבריים – פעולות, אורך, אמצע וחלוקת קטע — 37 תרגילים

4.2 ישר ומישור – הצגה פרמטרית, משוואה כללית ווקטור נורמל — 36 תרגילים

4.3 מצבים הדדיים וזוויות – ישרים ומישורים — 34 תרגילים

4.4 מרחקים במרחב — 33 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

מצבים הדדיים – סיכום מלא
YouTube · 6:59

וקטור המאונך לשני וקטורים
YouTube · 7:14

מכפלה סקלרית ומציאת זווית
YouTube · 4:21

נקודה כללית בוקטורים
YouTube · 6:19

4.1 וקטורים אלגבריים – פעולות, אורך, אמצע וחלוקת קטע

$\overrightarrow{AB}=B-A$; $|(x,y,z)|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; אמצע קטע $\frac{A+B}{2}$; נקודה המחלקת את AB ביחס $m:n$ מ-A: $A+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$; מפגש תיכונים $\frac{A+B+C}{3}$.

צפו לפני שמתחילים:

הוקטור האלגברי – פעולות בסיסיות
YouTube · 3:58

מערכת צירים ואוקטנטים
YouTube · 5:59

הוקטור האלגברי – אמצע קטע
YouTube · 3:12

הוקטור האלגברי – חלוקת קטע ביחס נתון
YouTube · 5:06

1. נתונות הנקודות $A(1,2,3)$ ו-$B(3,-1,5)$. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{AB}$ ואת אורכו.
2. מצאו את אמצע הקטע AB עבור $A(1,2,3)$ ו-$B(3,-1,5)$.
3. נתונות $A(1,2,3)$, $B(3,-1,5)$, $C(-1,4,7)$. מצאו את הנקודה D כך ש-$ABCD$ מקבילית.
4. מצאו את הנקודה P על הקטע AB כך ש-$AP:PB=1:2$, עבור $A(2,-1,4)$ ו-$B(8,5,-2)$.
5. מצאו את נקודת מפגש התיכונים של המשולש שקודקודיו $A(1,0,2)$, $B(4,3,-1)$, $C(-2,6,5)$.
6. נתונות $A(1,3,-2)$ ו-$B(k,5,4)$. מצאו את k אם ידוע ש-$AB=7$.
7. מצאו נקודה על ציר x שמרחקה מ-$A(1,2,3)$ שווה למרחקה מ-$B(5,2,-3)$.
8. מצאו נקודה על ציר y שנמצאת במרחק שווה מ-$A(2,1,3)$ ומ-$B(1,5,2)$.
9. בדקו אם הנקודות $A(1,2,3)$, $B(3,5,4)$, $C(7,11,6)$ נמצאות על ישר אחד.

10 מצאו את m ואת n שעבורם הנקודות $A(1,1,2)$, $B(2,3,5)$, $C(m,5,n)$ על ישר אחד.

11 מצאו וקטור יחידה בכיוון של $\vec{a}=(2,-1,2)$.

12 מצאו וקטור שאורכו 9 ומקביל ל-$(1,2,2)$.

13 הראו שהמשולש שקודקודיו $A(2,1,0)$, $B(4,3,1)$, $C(1,3,-2)$ ישר זווית, וקבעו באיזה קודקוד.

14 הוכיחו שהמשולש שקודקודיו $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ שווה צלעות ומצאו את אורך צלעו.

15 מצאו את הזווית $\angle BAC$ במשולש $A(1,2,0)$, $B(3,0,1)$, $C(0,1,4)$.

16 חשבו את המכפלה הסקלרית $(1,5,-1)\cdot(2,-1,3)$ וקבעו אם הזווית בין הווקטורים חדה, ישרה או קהה.

17 מצאו את k שעבורו $(k,3,4)\perp(2,k,-1)$.

18 חשבו את שטח המשולש שקודקודיו $A(0,0,0)$, $B(4,0,0)$, $C(1,3,0)$ בעזרת חישוב הזווית $\angle A$.

19 באיזה אוקטנט נמצאת הנקודה $(-2,3,-5)$? ומה המרחק שלה מהראשית?

20 מצאו את מרחק הנקודה $(3,-4,12)$ מציר z ומציר x.

21 $M(2,-1,4)$ אמצע הקטע AB ו-$A(5,3,-2)$. מצאו את B.

22 נתונות $A(1,1,1)$ ו-$B(7,4,-2)$. מצאו את הנקודה P על AB כך ש-$AP=2PB$.

23 $G(1,2,3)$ נקודת מפגש התיכונים של משולש ABC, $A(0,0,0)$, $B(2,1,4)$. מצאו את C.

24 הישר העובר דרך $A(1,2,3)$ ו-$B(3,1,1)$ חותך את המישור xy. מצאו את נקודת החיתוך.

25 האם המרובע $A(1,0,1)$, $B(3,1,2)$, $C(6,3,2)$, $D(2,1,0)$ הוא טרפז? נמקו.

26 הוכיחו ש-$ABCD$ מעוין: $A(0,0,0)$, $B(2,1,2)$, $C(4,-1,3)$, $D(2,-2,1)$.

27 מצאו את a, b, c המקיימים $(a,2b,3)+(1,4,c)=(5,10,-2)$.

28 הביעו את $(5,1,6)$ כצירוף לינארי של $(1,1,2)$ ו-$(1,-1,0)$.

29 האם $(1,2,3)$ צירוף לינארי של $(1,0,1)$ ו-$(0,1,1)$? אם כן, מצאו את המקדמים.

30 האם $(1,2,4)$ צירוף לינארי של $(1,0,1)$ ו-$(0,1,1)$?

31 מצאו את קוסינוס הזווית בין הווקטור $(1,2,2)$ לבין ציר z.

32 מצאו את ההיטל של $A(3,-2,5)$ על המישור xy ואת הנקודה הסימטרית לה ביחס למישור xy.

33 מצאו את הנקודה הסימטרית ל-$A(2,-3,1)$ ביחס לראשית ואת הסימטרית ביחס לציר z.

34 נתון משולש $A(1,1,1)$, $B(2,3,1)$, $C(1,1,3)$. מצאו את אורך התיכון לצלע BC.

35 מצאו את t שעבורו אורך הווקטור $(t,t+1,2)$ מינימלי, ואת האורך המינימלי.

36 קודקודי משולש: $A(0,0,0)$, $B(6,0,0)$, $C(0,8,0)$. מצאו את מרכז המעגל החוסם (רמז: ישר זווית).

37 מצאו את כל הנקודות על ציר z שמרחקן מ-$A(2,2,1)$ הוא 3.

✔ תשובות סופיות – נושא 4.1

1	$\overrightarrow{AB}=(2,-3,2)$; $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{17}$
2	$(2,\frac{1}{2},4)$
3	$D(-3,7,5)$
4	$P(4,1,2)$
5	$G(1,3,2)$
6	$k=-2$ או $k=4$
7	$(3,0,0)$
8	$(0,2,0)$
9	כן: $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$
10	$m=3$,$n=8$
11	$(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$
12	$(3,6,6)$ או $(-3,-6,-6)$
13	ישר זווית ב-A: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$
14	כל הצלעות $\sqrt{2}$
15	$\cos=\frac{2\sqrt{2}}{9}$; $71.68°$
16	-6 ; הזווית קהה
17	$k=\frac{4}{5}$
18	6
19	האוקטנט שבו $x<0$,$y>0$,$z<0$; $\sqrt{38}$
20	מציר z: 5 ; מציר x: $4\sqrt{10}$
21	$B(-1,-5,10)$
22	$P(5,3,-1)$

23 $C(1,5,5)$

24 $(4,\frac{1}{2},0)$

25 כן: $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$

26 מקבילית ($\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$) עם $AB=AD=3$

27 $a=4$,$b=3$,$c=-5$

28 $(5,1,6)=3(1,1,2)+2(1,-1,0)$

29 כן: $(1,2,3)=(1,0,1)+2(0,1,1)$

30 לא – המערכת אינה פתירה

31 $\frac{2}{3}$

32 היטל $(3,-2,0)$; סימטרית $(3,-2,-5)$

33 ביחס לראשית $(-2,3,-1)$; ביחס לציר z: $(-2,3,1)$

34 $\frac{3}{2}$

35 $t=-\frac{1}{2}$; $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

36 אמצע היתר: $(3,4,0)$

37 $(0,0,0)$ ו-$(0,0,2)$

4.2 ישר ומישור – הצגה פרמטרית, משוואה כללית ווקטור נורמל

ישר: $\underline{x} = A + t\vec{d}$. מישור פרמטרי: $\underline{x} = A + t\vec{d}_1 + s\vec{d}_2$. מישור כללי:
$ax + by + cz + d = 0$ כאשר $\vec{n} = (a, b, c)$ מאונך לכל וקטור במישור.

צפו לפני שמתחילים:



ישר – הצגה פרמטרית
YouTube · 2:17



הצגה פרמטרית של מישור
YouTube · 5:13



משוואה כללית של מישור
YouTube · 6:30



מהצגה פרמטרית לכללית
YouTube · 13:06

1. מצאו הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך $A(1,2,-1)$ ו-$B(3,0,4)$.

2. האם הנקודה $(5,-2,9)$ נמצאת על הישר $\underline{x} = (1,2,-1) + t(2,-2,5)$: ℓ?

3. מצאו את a ו-b אם $(a,8,b)$ על הישר $\underline{x} = (1,2,3) + t(1,3,-1)$.

4. כתבו הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך $(2,-1,5)$ ומקביל לציר y.

5. מצאו את נקודת החיתוך של הישר $\underline{x} = (1,-1,4) + t(2,1,-2)$ עם המישור xy.

6. מצאו את נקודות החיתוך של הישר $\underline{x} = (2,3,4) + t(1,1,2)$ עם מישורי הצירים xz ו-yz.

7. כתבו הצגה פרמטרית של המישור העובר דרך $A(1,0,2)$, $B(2,1,3)$, $C(0,3,1)$.

8. מצאו את המשוואה הכללית של המישור העובר דרך $A(1,0,2)$, $B(2,1,3)$, $C(0,3,1)$.

9. עברו מההצגה הפרמטרית $\underline{x} = (1,2,0) + t(1,0,2) + s(0,1,-1)$ להצגה כללית.

10 מצאו הצגה פרמטרית של המישור $2x-y+z-4=0$.

11 מהו וקטור נורמל למישור $3x-2y+6z=12$? ומהן נקודות החיתוך של המישור עם הצירים?

12 מצאו את משוואת המישור העובר דרך $(2,-1,3)$ ומאונך לווקטור $(1,4,-2)$.

13 מצאו את משוואת המישור העובר דרך $(1,1,1)$ ומקביל למישור $x-3y+2z=7$.

14 מצאו את משוואת המישור המכיל את הישר $\underline{x}=(1,0,1)+t(2,1,1)$ ואת הנקודה $(3,2,0)$.

15 מצאו את משוואת המישור המכיל את הישרים המקבילים $\underline{x}=(1,2,0)+t(1,-1,2)$ ו-$\underline{x}=(0,1,3)+s(1,-1,2)$.

16 הישרים $\underline{x}=(1,1,1)+t(1,0,1)$ ו-$\underline{x}=(1,1,1)+s(0,2,1)$ נחתכים. מצאו את משוואת המישור שהם קובעים.

17 מצאו את משוואת המישור המקביל לציר z ועובר דרך $(1,2,5)$ ו-$(3,-2,0)$.

18 מצאו את משוואת מישור האנך האמצעי לקטע AB, $A(1,3,-1)$, $B(3,-1,5)$.

19 מצאו את משוואת המישור העובר דרך $(0,2,-1)$ ומאונך לישר $\underline{x}=(1,1,1)+t(3,-1,2)$.

20 מצאו את k שעבורו הנקודה $(1,3,k)$ על המישור $2x+ky-4z+5=0$.

21 מצאו וקטור המאונך לשני הווקטורים $(1,2,-1)$ ו-$(3,0,2)$.

22 כתבו את משוואת המישור המקביל למישור xz ועובר דרך $(4,-3,7)$, ואת משוואת המישור המקביל למישור xy דרך אותה נקודה.

23 מצאו את משוואת המישור המכיל את ציר z ואת הנקודה $(2,5,1)$.

24 בדקו אם הנקודות $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $D(1,1,-1)$ באותו מישור.

25 מצאו את a שעבורו הישר $\underline{x}=(0,1,2)+t(1,2,4)$ מוכל במישור $ax+y-z+1=0$.

26 מצאו הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך $(1,-2,3)$ ומאונך למישור $2x+y-3z=0$.

27 הראו שההצגות $\underline{x}=(1,0,0)+t(1,1,0)+s(0,1,1)$ ו-$\underline{x}=(2,1,0)+t(1,0,-1)+s(1,2,1)$ מתארות את אותו מישור.

28 מצאו את משוואת המישור העובר דרך הראשית ומאונך לישר $\underline{x}=(5,1,1)+t(1,-1,3)$.

29 מצאו את הנקודות על הישר $\underline{x}=(1,0,2)+t(2,1,-1)$ המתאימות ל-$t=-1$ ול-$t=3$, ואת המרחק ביניהן.

30 מצאו ישר העובר דרך $(0,4,-2)$ ומקביל לישר $\underline{x}=(1,1,1)+t(3,0,-1)$.

31 במשולש $A(0,0,0)$, $B(6,0,0)$, $C(0,6,6)$: כתבו את משוואת הישר של התיכון מ-A ובדקו שנקודת מפגש התיכונים עליו.

32 מצאו את משוואת המישור המכיל את הישר $\underline{x}=(1,2,3)+t(1,1,0)$ ומקביל לישר $\underline{x}=(0,0,0)+s(0,1,1)$.

33 מצאו את משוואת המישור העובר דרך $(1,1,1)$ ומאונך לשני המישורים $x+y=3$ ו-$y+z=5$.

34 כתבו את משוואות המישורים xy, xz, yz ואת הצגת ציר x כישר.

35 הישר $\underline{x}=(2,-1,3)+t(1,2,-2)$ חותך את המישור $x+y+z=0$. מצאו את נקודת החיתוך.

36 מצאו את m שעבורו הווקטור $(m,2,-1)$ מקביל למישור $3x-y+2z=1$.

✔ תשובות סופיות – נושא 4.2

1	$\underline{x} = (1,2,-1) + t(2,-2,5)$
2	כן, עבור $t = 2$
3	$t = 2$: $a = 3$, $b = 1$
4	$\underline{x} = (2,-1,5) + t(0,1,0)$
5	$(5,1,0)$
6	עם xz: $(-1,0,-2)$; עם yz: $(0,1,0)$
7	$\underline{x} = (1,0,2) + t(1,1,1) + s(-1,3,-1)$
8	$x - z + 1 = 0$
9	$2x - y - z = 0$
10	לדוגמה $\underline{x} = (2,0,0) + t(1,2,0) + s(0,1,1)$
11	$\vec{n} = (3,-2,6)$; $(4,0,0)$, $(0,-6,0)$, $(0,0,2)$
12	$x + 4y - 2z + 8 = 0$
13	$x - 3y + 2z = 0$
14	$3x - 4y - 2z - 1 = 0$
15	$x + 5y + 2z - 11 = 0$
16	$2x + y - 2z - 1 = 0$
17	$2x + y - 4 = 0$
18	$x - 2y + 3z - 6 = 0$
19	$3x - y + 2z + 4 = 0$
20	$k = 7$
21	לדוגמה $(4,-5,-6)$
22	$y = -3$; $z = 7$
23	$5x - 2y = 0$

24	כן: כולן על $x+y+z-1=0$
25	$a=2$
26	$\underline{x}=(1,-2,3)+t(2,1,-3)$
27	לשתיהן אותה משוואה: $x-y+z-1=0$
28	$x-y+3z=0$
29	$4\sqrt{6}$; $(7,3,-1)$,$(-1,-1,3)$
30	$\underline{x}=(0,4,-2)+t(3,0,-1)$
31	$\underline{x}=(0,0,0)+t(3,3,3)$; $G(2,2,2)$ עבור $t=\frac{2}{3}$
32	$x-y+z-2=0$
33	$x-y+z-1=0$
34	$z=0$,$y=0$,$x=0$; $\underline{x}=t(1,0,0)$
35	$(-2,-9,11)$
36	$m=\frac{4}{3}$

4.3 מצבים הדדיים וזוויות – ישרים ומישורים

ישרים: מקבילים/זהים, נחתכים או מצטלבים. ישר ומישור: $\vec{n}\cdot\vec{d}=0$ – מקביל או מוכל; אחרת חותך. זוויות: בין ישרים $\cos\alpha=\frac{|\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2|}{|\vec{d}_1||\vec{d}_2|}$, בין ישר למישור $\sin\alpha=\frac{|\vec{d}\cdot\vec{n}|}{|\vec{d}||\vec{n}|}$, בין מישורים לפי הנורמלים.

צפו לפני שמתחילים:

וקטורים – מצבים הדדיים בין ישרים ומישורים
YouTube · 6:59

וקטורים – מצב הדדי בין ישרים
YouTube · 10:55

ישר החיתוך בין מישורים
YouTube · 7:55

זווית בין ישר למישור
YouTube · 4:20

1 קבעו את המצב ההדדי בין הישרים $\ell_1:\ \underline{x}=(1,2,3)+t(2,-1,1)$ ו-$\ell_2:\ \underline{x}=(3,1,4)+s(1,1,-1)$. אם הם נחתכים – מצאו את נקודת החיתוך.

2 קבעו את המצב ההדדי בין הישרים $\ell_1:\ \underline{x}=(1,0,1)+t(1,2,-1)$ ו-$\ell_2:\ \underline{x}=(3,4,-1)+s(-2,-4,2)$. אם הם נחתכים – מצאו את נקודת החיתוך.

3 קבעו את המצב ההדדי בין הישרים $\ell_1:\ \underline{x}=(0,1,2)+t(1,1,1)$ ו-$\ell_2:\ \underline{x}=(1,0,0)+s(2,2,2)$. אם הם נחתכים – מצאו את נקודת החיתוך.

4 קבעו את המצב ההדדי בין הישרים $\ell_1:\ \underline{x}=(1,1,0)+t(1,0,1)$ ו-$\ell_2:\ \underline{x}=(0,2,1)+s(0,1,1)$. אם הם נחתכים – מצאו את נקודת החיתוך.

5 קבעו את המצב ההדדי בין הישרים $\ell_1:\ \underline{x}=(2,0,1)+t(1,-1,2)$ ו-$\ell_2:\ \underline{x}=(0,2,-3)+s(1,1,0)$. אם הם נחתכים – מצאו את נקודת החיתוך.

6 מצאו את a שעבורו הישרים $\underline{x}=(1,2,3)+t(1,2,-1)$ ו-$\underline{x}=(0,0,-2)+s(1,a,2)$ נחתכים, ומצאו את נקודת החיתוך.

7 מצאו את k שעבורו הישרים $\underline{x}=(0,0,0)+t(2,k,-4)$ ו-$\underline{x}=(1,1,1)+s(-1,3,2)$ מקבילים.

8 קבעו את המצב ההדדי בין הישר $\underline{x} = (1,2,0) + t(1,1,1)$ למישור $x - 2y + z + 2 = 0$.

9 קבעו את המצב ההדדי בין הישר $\underline{x} = (1,0,1) + t(2,1,-1)$ למישור $x - y + z - 2 = 0$.

10 קבעו את המצב ההדדי בין הישר $\underline{x} = (0,1,2) + t(1,0,1)$ למישור $x + 2y + z = 0$.

11 קבעו את המצב ההדדי בין הישר $\underline{x} = (1,1,1) + t(1,-1,0)$ למישור $2x + y + z - 1 = 0$.

12 מצאו את a שעבורו הישר $\underline{x} = (1,1,1) + t(2,a,1)$ מקביל למישור $x + 3y - 2z = 10$ (ואינו מוכל בו).

13 קבעו את המצב ההדדי בין המישורים $x + 2y - z - 3 = 0$ ו-$2x + 4y - 2z + 5 = 0$.

14 קבעו את המצב ההדדי בין המישורים $x - y + 2z - 4 = 0$ ו-$2x + y - z - 1 = 0$.

15 קבעו את המצב ההדדי בין המישורים $x + y + z - 6 = 0$ ו-$2x + 2y + 2z - 12 = 0$.

16 קבעו את המצב ההדדי בין המישורים $x - z = 0$ ו-$y + z - 2 = 0$.

17 מצאו את k שעבורו המישורים $x + ky + 2z = 1$ ו-$3x - y + z = 4$ מאונכים.

18 מצאו את הזווית בין הישרים שכיווניהם $(1,1,0)$ ו-$(0,1,1)$.

19 מצאו את הזווית בין הישרים שכיווניהם $(2,-1,2)$ ו-$(1,2,2)$.

20 מצאו את הזווית בין הישרים שכיווניהם $(1,0,1)$ ו-$(1,-1,0)$.

21 מצאו את הזווית בין הישרים שכיווניהם $(1,2,3)$ ו-$(3,2,1)$.

22 מצאו את הזווית בין הישר שכיוונו $(1,0,1)$ למישור $z=0$.

23 מצאו את הזווית בין הישר שכיוונו $(1,1,1)$ למישור $x-2=0$.

24 מצאו את הזווית בין הישר שכיוונו $(2,1,2)$ למישור $x+2y+2z-5=0$.

25 מצאו את הזווית בין הישר שכיוונו $(1,-1,2)$ למישור $2x+y+z+3=0$.

26 מצאו את הזווית בין המישורים $x=0$ ו-$x+y=0$.

27 מצאו את הזווית בין המישורים $x+y+z-1=0$ ו-$x-y+2=0$.

28 מצאו את הזווית בין המישורים $2x-y+2z-3=0$ ו-$x+2y-2z+4=0$.

29 מצאו את הזווית בין המישורים $x+y-2=0$ ו-$y+z+1=0$.

30 מצאו את הזווית בין הישר $\underline{x}=(1,2,3)+t(1,0,-1)$ לבין ציר z.

31 מצאו את הזווית בין המישור $x+y+z=3$ לבין המישור xy.

32 מצאו את נקודת החיתוך של שלושת המישורים $x+y+z=6$, $x-y=0$, $z=2$.

33 מצאו ישר העובר דרך $(1,0,2)$, מקביל למישור $x+y+z=1$ ומאונך לישר שכיוונו $(1,2,0)$.

34 הישר ℓ הוא ישר החיתוך של המישורים $x+y=2$ ו-$y+z=3$. מצאו את הזווית בין ℓ למישור xy.

✔ תשובות סופיות – נושא 4.3

1	נחתכים בנקודה $(3,1,4)$
2	זהים
3	מקבילים
4	מצטלבים
5	נחתכים בנקודה $(0,2,-3)$
6	$a=2$; $(2,4,2)$
7	$k=-6$
8	מקביל למישור
9	מוכל במישור
10	חותך בנקודה $(-2,1,0)$
11	חותך בנקודה $(-2,4,1)$
12	$a=0$
13	מקבילים
14	נחתכים ; ישר החיתוך: $\underline{x}=(0,6,5)+t(1,-5,-3)$
15	זהים
16	נחתכים ; ישר החיתוך: $\underline{x}=(0,2,0)+t(1,-1,1)$
17	$k=5$
18	$\cos\alpha=\frac{1}{2}$; 60°
19	$\cos\alpha=\frac{4}{9}$; 63.61°
20	$\cos\alpha=\frac{1}{2}$; 60°
21	$\cos\alpha=\frac{5}{7}$; 44.42°
22	$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 45°
23	$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$; 35.26°

$62.73^\circ \ ; \ \sin\alpha = \frac{8}{9}$	24
$30^\circ \ ; \ \sin\alpha = \frac{1}{2}$	25
$45^\circ \ ; \ \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$	26
$90^\circ \ ; \ \cos\alpha = 0$	27
$63.61^\circ \ ; \ \cos\alpha = \frac{4}{9}$	28
$60^\circ \ ; \ \cos\alpha = \frac{1}{2}$	29
$45^\circ \ ; \ \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$	30
$54.74^\circ \ ; \ \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$	31
$(2,2,2)$	32
$\underline{x} = (1,0,2) + t(2,-1,-1)$	33
$35.26^\circ \ ; \ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$	34

4.4 מרחקים במרחב

נקודה ממישור: $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. נקודה מישר – בעזרת נקודת העקב (מכפלה סקלרית 0).
בין ישרים מצטלבים – מרחק נקודה של ישר אחד מהמישור המכיל את השני ומקביל לראשון.

צפו לפני שמתחילים:



מרחק נקודה ממישור
YouTube · 5:21



מרחק נקודה מישר
YouTube · 7:41



מרחק בין מישורים
YouTube · 4:21



מרחק ישרים מצטלבים
YouTube · 6:59

1. מצאו את המרחק בין הנקודות $(1,-2,3)$ ו-$(4,2,15)$.
2. מצאו את מרחק הנקודה $(1,2,3)$ מהמישור $2x-y+2z-3=0$.
3. מצאו את מרחק הנקודה $(0,0,0)$ מהמישור $x+2y+2z-9=0$.
4. מצאו את מרחק הנקודה $(3,1,3)$ מהמישור $x+y+z-4=0$.
5. מצאו את מרחק הנקודה $(1,1,1)$ מהמישור $3x+4z+10=0$.
6. מצאו את מרחק הנקודה $(1,2,3)$ מהישר $\underline{x}=(0,0,0)+t(1,1,1)$.
7. מצאו את מרחק הנקודה $(2,0,1)$ מהישר $\underline{x}=(1,1,0)+t(1,0,1)$.
8. מצאו את מרחק הנקודה $(3,4,3)$ מהישר $\underline{x}=(1,0,0)+t(0,1,2)$.
9. מצאו את נקודת העקב של האנך מהנקודה $(3,4,3)$ לישר $\underline{x}=(1,0,0)+t(0,1,2)$.

10 מצאו את נקודת העקב של האנך מ-$(5,1,-2)$ למישור $2x+y-2z-6=0$.

11 מצאו את הנקודה הסימטרית ל-$(5,1,-2)$ ביחס למישור $2x+y-2z-6=0$.

12 מצאו את המרחק בין המישורים המקבילים $x+2y+2z-3=0$ ו-$x+2y+2z+9=0$.

13 מצאו את המרחק בין המישורים המקבילים $2x-y+2z+1=0$ ו-$2x-y+2z-8=0$.

14 מצאו את המרחק בין המישורים המקבילים $3x+4z-5=0$ ו-$3x+4z+5=0$.

15 מצאו את המרחק בין המישורים $x-2y+2z=3$ ו-$2x-4y+4z=18$.

16 הראו שהישר $\underline{x}=(1,1,1)+t(2,0,-1)$ מקביל למישור $x+2y+2z=11$ ומצאו את המרחק ביניהם.

17 הראו שהישרים $\underline{x}=(0,0,0)+t(1,0,0)$ ו-$\underline{x}=(0,1,2)+s(0,0,1)$ מצטלבים ומצאו את המרחק ביניהם.

18 הראו שהישרים $\underline{x}=(1,0,1)+t(1,1,0)$ ו-$\underline{x}=(0,2,0)+s(0,1,1)$ מצטלבים ומצאו את המרחק ביניהם.

19 הראו שהישרים $\underline{x}=(1,2,3)+t(1,-1,1)$ ו-$\underline{x}=(2,0,1)+s(2,1,-1)$ מצטלבים ומצאו את המרחק ביניהם.

20 מצאו את המרחק בין הישרים המקבילים $\underline{x}=(1,0,0)+t(1,2,2)$ ו-$\underline{x}=(2,3,1)+s(1,2,2)$.

21 מצאו את k שעבורו מרחק הנקודה $(2,2,1)$ מהמישור $x+2y+2z+k=0$ שווה ל-3.

22 מצאו את משוואות המישורים המקבילים למישור $2x-y+2z=4$ שמרחקם ממנו 2.

23 מצאו את הנקודות על הישר $\underline{x}=(2,0,0)+t(1,2,-1)$ שמרחקן מהמישור $2x+y-2z-1=0$ הוא 3.

24 מצאו את מרחק הנקודה $(3,-4,5)$ מציר z ומהמישור xy.

25 מצאו נקודה על ציר x שמרחקה מהמישור $2x+y+2z=4$ שווה ל-2.

26 מצאו את מרחק הראשית מהמישור העובר דרך $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,2)$.

27 חשבו את גובה הפירמידה שבסיסה המשולש $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,2)$ וקודקודה $D(2,2,2)$.

28 מצאו את אורך הגובה מ-C במשולש $A(0,0,0)$, $B(4,4,2)$, $C(3,0,3)$ (מרחק C מהישר AB).

29 מצאו את המרחק בין הנקודה $(1,1,1)$ לישר החיתוך של המישורים $x=0$ ו-$y=0$.

30 מצאו את המרחק בין הישר $\underline{x}=(0,0,5)+t(1,1,0)$ לבין המישור xy.

31 מצאו את הנקודה (x,y,z) במישור $z=0$ הקרובה ביותר ל-$(2,-3,7)$ ואת המרחק.

32 מצאו את המרחק בין המישור $x+y+z=3$ לבין המישור המקביל לו שעובר דרך הראשית.

33 מצאו את מרחק הנקודה $(1,2,3)$ מהישר העובר דרך הראשית ודרך $(2,2,1)$.

✔ תשובות סופיות – נושא 4.4

1	13
2	1
3	3
4	$\sqrt{3}$
5	$\frac{17}{5}$
6	$\sqrt{2}$
7	1
8	3
9	$(1,2,4)$
10	$(3,0,0)$
11	$(1,-1,2)$
12	4
13	3
14	2
15	2
16	$2\ ;\ \vec{n}\cdot\vec{d}=0$
17	1
18	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$
19	$2\sqrt{2}$
20	$\sqrt{2}$
21	$k=-17$ או $k=1$
22	$2x-y+2z-10=0$ ו- $2x-y+2z+2=0$
23	$(0,-4,2)$, $(3,2,-1)$

24 $5\ ;\ 5$

25 $(5,0,0)$ או $(-1,0,0)$

26 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

27 $\sqrt{6}$

28 3

29 $\sqrt{2}$

30 5

31 $7\ ;\ (2,-3,0)$

32 $\sqrt{3}$

33 $\sqrt{5}$

פרק 4 סיכומון סוף פרק – הווקטור האלגברי

בסיס

- $\overrightarrow{AB} = B - A$; $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.
- אמצע: $\frac{A+B}{2}$; מפגש תיכונים: $\frac{A+B+C}{3}$.
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

ישר

- $\underline{x} = A + t\vec{d}$ – נקודה ווקטור כיוון.
- נקודה על ישר: מציבים ומוצאים t אחד לכל השיעורים.
- חיתוך עם מישור xy: $z = 0$.

מישור

- פרמטרי: $\underline{x} = A + t\vec{d}_1 + s\vec{d}_2$.
- כללי: $ax + by + cz + d = 0$, $\vec{n} = (a, b, c)$.
- מעבר: $\vec{n} \perp \vec{d}_1, \vec{d}_2$ (פותרים $\vec{n} \cdot \vec{d} = 0$), ואז מציבים נקודה.
- מישור מקביל לציר z – אין z במשוואה.

מצבים הדדיים

- ישרים: כיוונים מקבילים – מקבילים/זהים; אחרת משווים – פתרון: נחתכים, אין פתרון: מצטלבים.
- ישר-מישור: $\vec{n} \cdot \vec{d} = 0$ – מקביל או מוכל (בודקים נקודה).
- מישורים: נורמלים מקבילים – מקבילים/זהים; אחרת ישר חיתוך שכיוונו מאונך לשני הנורמלים.

זוויות

- ישר-ישר: $\cos\alpha = \frac{|\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2|}{|\vec{d}_1||\vec{d}_2|}$.
- ישר-מישור: $\sin\alpha = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}||\vec{n}|}$.
- מישור-מישור: $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$.

מרחקים

- נקודה ממישור: $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
- נקודה מישר: נקודת עקב $Q(t)$ עם $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{d} = 0$.
- מישורים מקבילים / ישר מקביל למישור: מרחק נקודה אחת.
- ישרים מצטלבים: מישור דרך ישר אחד מקביל לשני, ואז מרחק נקודה.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- בזווית בין ישר למישור משתמשים ב-$\sin$, לא ב-$\cos$!
- לבדוק נקודה משותפת לפני שקובעים "מקבילים" – אולי הם זהים.
- להשוות ישרים עם אותו פרמטר – חייבים t ו-s שונים.
- לשכוח ערך מוחלט במונה של נוסחת המרחק.

💡 **הטיפ של אילון:** בכל שאלת מרחב – קודם מוצאים את "השחקנים": נקודה, וקטור כיוון ונורמל. אחרי שהם על הדף, כל סעיף הוא הצבה בנוסחה.

פרק 5

מספרים מרוכבים

מהמספר i ועד דה-מואבר, מקומות גיאומטריים במישור גאוס וסדרות

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

5.1	הצגה אלגברית – פעולות, חזקות של i, צמוד ומשוואות	39 תרגילים
5.2	הצגה טריגונומטרית, דה-מואבר ושורש מסדר n	37 תרגילים
5.3	מישור גאוס ומקומות גיאומטריים	36 תרגילים
5.4	סדרות במרוכבים ושאלות 100	32 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



מפה למספרים מרוכבים – כל מה שצריך לדעת
YouTube · 4:58



מרוכבים – מבוא
YouTube · 3:01

🎛️ המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף



מעבדת המרוכבים
גררו את z במישור גאוס וראו את $\bar{z}$, את z^2 ואת $|z|$ ו-$\arg z$ – ובחרו n כדי לראות את שורשי $z^n = w$ על מעגל.

5.1 הצגה אלגברית – פעולות, חזקות של i, צמוד ומשוואות

מספר מרוכב: $z = a + bi$, כאשר $i^2 = -1$. הצמוד: $\bar{z} = a - bi$, ומתקיים $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$. בחילוק – כופלים מונה ומכנה בצמוד של המכנה. חזקות של i חוזרות במחזור של 4.

צפו לפני שמתחילים:



מרוכבים בתצוגה האלגברית – פעולות בסיסיות
YouTube · 1:57



מרוכבים – מעריכים שונים ל-i
YouTube · 4:14



מרוכבים – פתרון משוואות מסוגים שונים
YouTube · 9:55



מרוכבים – המספר הצמוד וטכניקות סידור
YouTube · 10:50

1 חשבו: $(3 + 2i) + (5 - 7i)$.

2 חשבו: $(4 - i) - (-2 + 3i)$.

3 חשבו: $(2 + 3i)(4 - i)$.

4 חשבו: $(1 + i)^2$. מה מיוחד בתוצאה?

5 חשבו: $(3 - 4i)(3 + 4i)$. הסבירו מדוע התקבל מספר ממשי.

6 חשבו: $(2 - i)^3$.

7 כתבו בצורה אלגברית: $\dfrac{5}{2 + i}$.

8 כתבו בצורה אלגברית: $\dfrac{3 + 4i}{1 - 2i}$.

9 חשבו: $\dfrac{1 + i}{1 - i}$.

10 חשבו: i^{23}.

11 חשבו: $i^{102}+i^{57}$.

12 חשבו את הסכום $1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{10}$.

13 חשבו: i^{-7}.

14 חשבו את המכפלה $i^1\cdot i^2\cdot i^3\cdots i^{10}$.

15 מצאו את החלק הממשי ואת החלק המדומה של $z=\dfrac{2+i}{1+3i}$.

16 נתון $z=(1+2i)^2$. מצאו את $\bar{z}$.

17 נתון $z=5-12i$. חשבו את $z+\bar{z}$ ואת $z\cdot\bar{z}$.

18 חשבו את $|3-4i|$ ואת $|-6+8i|$.

19 פתרו את המשוואה $z+2\bar{z}=6-3i$.

20 פתרו את המשוואה $(1+i)z=5+i$.

21 פתרו את המשוואה $z^2=-9$.

22 פתרו את המשוואה $z^2=8-6i$ (רמז: $z=x+iy$).

23 פתרו את המשוואה $z^2-4z+13=0$.

24 פתרו את המשוואה $z^2+2iz-5=0$.

25 פתרו את המשוואה $z^4=16$.

26 מצאו את הערך הממשי של a שעבורו המספר $(a+2i)(3-i)$ ממשי.

27 מצאו את הערך הממשי של a שעבורו המספר $\frac{2+ai}{1+i}$ מדומה טהור.

28 פתרו את המשוואה $z\cdot\bar{z}-z=11+3i$.

29 אחד הפתרונות של המשוואה $z^2+bz+c=0$, כאשר b ו-c ממשיים, הוא $1-2i$. מצאו את b ואת c.

30 ידוע ש-$1+i$ הוא פתרון של המשוואה $z^3-4z^2+6z-4=0$. מצאו את שאר הפתרונות.

31 נתון $|z|=5$ ו-$\operatorname{Re}z=3$. מצאו את כל האפשרויות ל-z.

32 חשבו: $(1+i)^8$ (בלי לפתוח סוגריים 8 פעמים!).

33 הראו כי $2+i$ הוא פתרון של המשוואה $z^2-4z+5=0$, ומצאו את הפתרון השני.

34 מצאו מספרים ממשיים x ו-y המקיימים $(x+yi)(2-i)=7+4i$.

35 כתבו בצורה אלגברית: $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$.

36 פתרו את המשוואה $\bar{z}=z^2$.

37 הוכיחו כי לכל $z\neq 0$ מתקיים $\left|\frac{z}{\bar{z}}\right|=1$.

38 מצאו את כל המספרים z שעבורם $|z|=5$ וגם $\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z=7$.

39 עבור איזה n טבעי מתקיים $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0$? הסבירו.

✔ תשובות סופיות – נושא 5.1

1	$8-5i$
2	$6-4i$
3	$11+10i$
4	$2i$ – מספר מדומה טהור
5	25 – מכפלת מספר בצמוד שלו היא a^2+b^2
6	$2-11i$
7	$2-i$
8	$-1+2i$
9	i
10	$-i$
11	$-1+i$
12	i
13	i
14	$-i$ (כי i^{55})
15	$\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z=-\frac{1}{2}$
16	$-3-4i$
17	$z+\bar{z}=10$; $z\bar{z}=169$
18	5 ; 10
19	$2+3i$
20	$3-2i$
21	$-3i$, $3i$
22	$3-i$, $-3+i$
23	$2-3i$, $2+3i$

24 $2-i$, $-2-i$

25 $2i$, 2 , -2 , $-2i$

26 $a=6$

27 $a=-2$

28 $2-3i$, $-1-3i$

29 $c=5$, $b=-2$

30 2 , $1-i$

31 $3-4i$, $3+4i$

32 16

33 $2-i$

34 $y=3$, $x=2$

35 $-1-i$

36 $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 1 , 0

37 $|z|=|\bar{z}|$ ולכן המנה בגודל 1

38 $4+3i$, $3+4i$

39 לכל n טבעי – ארבע חזקות עוקבות של i מתאפסות

5.2 הצגה טריגונומטרית, דה-מואבר ושורש מסדר n

$z = r\,\mathrm{cis}\,\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. בכפל – כופלים גדלים ומחברים זוויות; בחילוק – מחלקים גדלים ומחסרים זוויות. דה-מואבר: $(r\,\mathrm{cis}\,\theta)^n = r^n\,\mathrm{cis}(n\theta)$. הפתרונות של $z^n = w$ הם n נקודות על מעגל, במרווחי זווית של $\frac{360^\circ}{n}$.

צפו לפני שמתחילים:



מרוכבים – מעבר בין תצוגות
YouTube · 10:33



מרוכבים – כפל וחילוק בתצוגה הטריגונומטרית
YouTube · 7:21



מרוכבים – משפט דה מואבר
YouTube · 4:44



מרוכבים – שורש מסדר n
YouTube · 6:42

1. כתבו בהצגה טריגונומטרית: $z = 1 + i$.
2. כתבו בהצגה טריגונומטרית: $z = -\sqrt{3} + i$.
3. כתבו בהצגה טריגונומטרית: $z = -2 - 2i$.
4. כתבו בהצגה טריגונומטרית את המספרים -5 ו-$3i$.
5. כתבו בהצגה טריגונומטרית: $z = 1 - \sqrt{3}i$.
6. כתבו בצורה אלגברית: $z = 4\,\mathrm{cis}\,60^\circ$.
7. כתבו בצורה אלגברית: $z = 6\,\mathrm{cis}\,270^\circ$.
8. כתבו בצורה אלגברית: $z = 2\,\mathrm{cis}\,135^\circ$.
9. חשבו בהצגה טריגונומטרית ואז המירו לאלגברית: $2\,\mathrm{cis}\,80^\circ \cdot 3\,\mathrm{cis}\,40^\circ$.
10. חשבו: $\dfrac{8\,\mathrm{cis}\,200^\circ}{2\,\mathrm{cis}\,50^\circ}$, ותנו את התשובה בצורה אלגברית.

11 חשבו: $(\text{cis}\,20^\circ)^9$.

12 חשבו בעזרת משפט דה-מואבר: $(1+i)^{10}$.

13 חשבו: $(\sqrt{3}+i)^6$.

14 חשבו: $(1-i)^7$.

15 חשבו: $(-1+\sqrt{3}i)^{12}$.

16 חשבו: $\dfrac{(1+i)^8}{(\sqrt{3}-i)^4}$.

17 מצאו את המספר הטבעי הקטן ביותר n שעבורו $(1+i)^n$ הוא מספר ממשי חיובי.

18 מצאו את המספר הטבעי הקטן ביותר n שעבורו $(\sqrt{3}+i)^n$ הוא מספר מדומה טהור.

19 נתון $z=\text{cis}\,\theta$. הוכיחו כי $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$.

20 פתרו את המשוואה $z^3=8$.

21 פתרו את המשוואה $z^4=-16$.

22 פתרו את המשוואה $z^3=-8i$.

23 פתרו את המשוואה $z^6=1$. תנו את התשובות בהצגה טריגונומטרית.

24 פתרו את המשוואה $z^2=2+2\sqrt{3}i$.

25 פתרו את המשוואה $z^5=32\,\text{cis}\,100^\circ$.

26 מהו סכום כל הפתרונות של המשוואה $z^5=7+3i$? נמקו בלי לפתור.

27 נתון $z=r\,\text{cis}\,\theta$. הביעו באמצעות r ו-θ את $\bar{z}$, את $\dfrac{1}{z}$ ואת $z\cdot\bar{z}$.

28 נתון $|z| = 2$ ו- $\arg z = 50°$. מצאו את $|z^5|$ ואת $\arg(z^5)$.

29 נתון $z_1 = 6\operatorname{cis} 100°$ ו- $z_2 = 3\operatorname{cis} 340°$. כתבו בהצגה טריגונומטרית את $z_1 z_2$ ואת $\dfrac{z_1}{z_2}$.

30 מצאו את כל הזוויות $0° \le \theta < 360°$ שעבורן $(\operatorname{cis}\theta)^4 = i$.

31 חשבו: $(\operatorname{cis} 5°)^6 \cdot (\operatorname{cis} 10°)^{12}$.

32 נתון $w = \dfrac{1+i}{1-i}$. כתבו את w בהצגה טריגונומטרית וחשבו את w^{2026}.

33 נתון $\omega = \operatorname{cis} 120°$. הראו כי $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

34 פתרו את המשוואה $z^4 + 4 = 0$.

35 הפתרונות של $z^4 = 16$ הם קודקודי מצולע במישור גאוס. איזה מצולע זה, ומה שטחו?

36 פתרו את המשוואה $z^3 = \bar{z}$ (רמז: עברו להצגה טריגונומטרית, ובדקו גם את $z = 0$).

37 נתון $z = 2\operatorname{cis}\alpha$ כאשר $0° < \alpha < 90°$. ידוע ש- z^3 מספר מדומה טהור שהחלק המדומה שלו חיובי. מצאו את α ואת z^3.

✔ תשובות סופיות – נושא 5.2

1	$\sqrt{2}\,\text{cis}\,45^\circ$
2	$2\,\text{cis}\,150^\circ$
3	$2\sqrt{2}\,\text{cis}\,225^\circ$
4	$3\,\text{cis}\,90^\circ\ ;\ 5\,\text{cis}\,180^\circ$
5	$2\,\text{cis}\,300^\circ$
6	$2+2\sqrt{3}i$
7	$-6i$
8	$-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$
9	$6\,\text{cis}\,120^\circ=-3+3\sqrt{3}i$
10	$4\,\text{cis}\,150^\circ=-2\sqrt{3}+2i$
11	$\text{cis}\,180^\circ=-1$
12	$32i$
13	-64
14	$8+8i$
15	4096
16	$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
17	$n=8$
18	$n=3$
19	$\frac{1}{z}=\text{cis}(-\theta)$, והחלקים המדומים מתבטלים
20	$-1+\sqrt{3}i\ ,2\ ,-1-\sqrt{3}i$
21	$\sqrt{2}+\sqrt{2}i\ ,-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\ ,\sqrt{2}-\sqrt{2}i\ ,-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$
22	$2i\ ,\sqrt{3}-i\ ,-\sqrt{3}-i$
23	$\text{cis}\,300^\circ\ ,\text{cis}\,240^\circ\ ,\text{cis}\,180^\circ\ ,\text{cis}\,120^\circ\ ,\text{cis}\,60^\circ\ ,\text{cis}\,0^\circ$

24 $\sqrt{3}+i\ ,-\sqrt{3}-i$

25 $z=2\,\mathrm{cis}(20^\circ+72^\circ k)\ ,k=0,1,2,3,4$: $2\,\mathrm{cis}\,20^\circ\ ,2\,\mathrm{cis}\,92^\circ\ ,2\,\mathrm{cis}\,164^\circ\ ,$
$2\,\mathrm{cis}\,236^\circ\ ,2\,\mathrm{cis}\,308^\circ$

26 0 – הפתרונות הם קודקודי מחומש משוכלל שמרכזו בראשית

27 $\bar{z}=r\,\mathrm{cis}(-\theta)\ ;\ \frac{1}{z}=\frac{1}{r}\,\mathrm{cis}(-\theta)\ ;\ z\bar{z}=r^2$

28 $32\ ;\ 250^\circ$

29 $18\,\mathrm{cis}\,80^\circ\ ;\ 2\,\mathrm{cis}\,120^\circ$

30 $22.5^\circ\ ,112.5^\circ\ ,202.5^\circ\ ,292.5^\circ$

31 $\mathrm{cis}\,150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

32 $w=\mathrm{cis}\,90^\circ=i\ ;\ w^{2026}=-1$

33 ω פתרון של $z^3=1\ ,\omega\neq 1$, ולכן $1+\omega+\omega^2=\frac{\omega^3-1}{\omega-1}=0$

34 $-1-i\ ,1-i\ ,-1+i\ ,1+i$

35 ריבוע ; שטח 8

36 $0,\ 1\ ,-1\ ,i\ ,-i$

37 $\alpha=30^\circ\ ;\ z^3=8i$

5.3 מישור גאוס ומקומות גיאומטריים

$|z-z_0|$ הוא המרחק בין z לנקודה z_0. לכן $|z-z_0|=r$ – מעגל;
$|z-z_1|=|z-z_2|$ – אנך אמצעי; $\arg z=\alpha$ – קרן מהראשית. כדי למצוא משוואה – מציבים $z=x+iy$.

צפו לפני שמתחילים:

מרוכבים – מקומות גיאומטריים
YouTube · 3:59

מרוכבים – מקומות גיאומטריים רמה 2
YouTube · 3:32

מרוכבים – גודל של מספר מרוכב
YouTube · 7:07

פתרון מלא – מרוכבים ומקומות גיאומטריים (חורף 2010)
YouTube · 3:13

1. מהו המקום הגיאומטרי של כל המספרים z המקיימים $|z|=3$?
2. תארו את המקום הגיאומטרי $|z-2|=1$.
3. תארו את המקום הגיאומטרי $|z-1-2i|=4$, וכתבו את משוואתו.
4. תארו את התחום $|z+3i|\le 2$.
5. מצאו את משוואת המקום הגיאומטרי $|z+i|=|z-1|$. מה הפירוש הגיאומטרי?
6. מצאו את משוואת המקום הגיאומטרי $|z-2|=|z-4i|$.
7. תארו את המקום הגיאומטרי $\operatorname{Re} z=3$.
8. תארו את המקום הגיאומטרי $\operatorname{Im} z=2\operatorname{Re} z$.
9. מצאו את המקום הגיאומטרי $\operatorname{Re}(z^2)=0$.
10. מצאו את המקום הגיאומטרי $\operatorname{Im}(z^2)=8$.

11 מצאו את המקום הגיאומטרי $z \cdot \bar{z} = 16$.

12 מצאו את המקום הגיאומטרי $z + \bar{z} = |z|^2$.

13 תארו את המקום הגיאומטרי $\arg z = 45^\circ$.

14 מהו המספר המתאים לנקודה שעליה $|z| = 2$ וגם $\arg z = 120^\circ$?

15 תארו את התחום $1 \le |z| \le 3$ ומצאו את שטחו.

16 תארו את התחום $|z+3| < |z-3|$.

17 מצאו את משוואת המקום הגיאומטרי $|z-1| = 2|z+2|$.

18 המספר z נמצא על המעגל $|z-3-4i| = 2$. מה הערך הגדול ביותר ומה הקטן ביותר של $|z|$?

19 מצאו את הנקודה על המעגל $|z-3-4i| = 2$ הקרובה ביותר לראשית.

20 מצאו את נקודות החיתוך של המקומות הגיאומטריים $|z| = 5$ ו- $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z + 1$.

21 הראו כי כאשר θ משתנה, המספרים $z = 2 + \operatorname{cis}\theta$ נמצאים על מעגל. מצאו את מרכזו ואת רדיוסו.

22 המספר z נמצא על המעגל $|z| = 1$. על איזה מקום גיאומטרי נמצא $w = 2z + 3 - i$?

23 המספר z נמצא על הישר $\operatorname{Re} z = 2$. על איזה מקום גיאומטרי נמצא $w = iz$? (מה הכפל ב- i עושה?)

24 המספר z נמצא על המעגל $|z| = 2$. מהו המקום הגיאומטרי של $w = \dfrac{1}{z}$?

25 הנקודות $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 4 + i$, $z_3 = 1 + 5i$ הן קודקודי משולש. מצאו את שטחו ואת היקפו.

26 נתון $z_1 = 3 + i$. הנקודה z_2 מתקבלת מסיבוב z_1 סביב הראשית ב- 90° נגד כיוון השעון. מצאו את z_2 ואת סוג המשולש שקודקודיו 0, z_1, z_2.

27 0 ו- $2+i$ הם שני קודקודים סמוכים של ריבוע (בכיוון נגד השעון). מצאו את שני הקודקודים האחרים.

28 0 ו- 2 הם שני קודקודים של משולש שווה-צלעות שהקודקוד השלישי שלו ברביע הראשון. מצאו את הקודקוד השלישי.

29 מצאו את שטח התחום $|z-i| \le 1$, $\operatorname{Im} z \ge 1$.

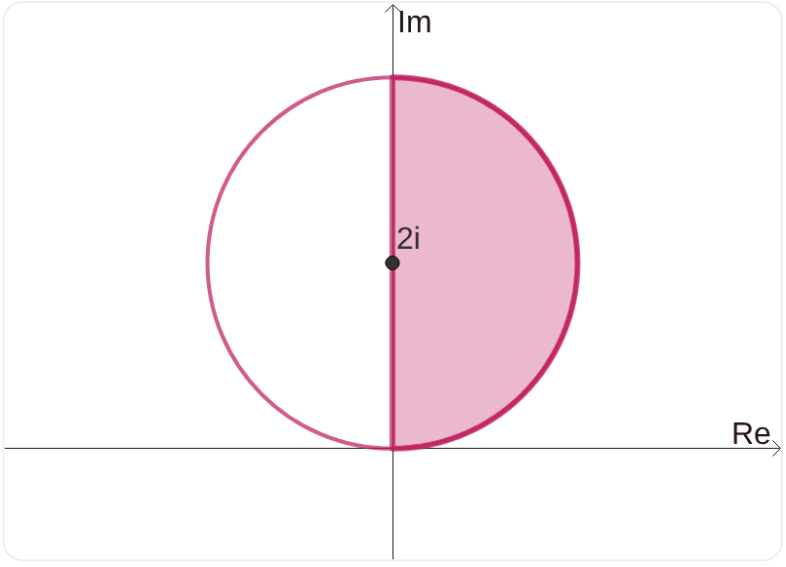
30 מצאו את שטח התחום $|z| \le 2$, $0^\circ \le \arg z \le 90^\circ$.

31 הפתרונות של $z^3 = 27i$ הם קודקודי משולש. מצאו את שטחו.

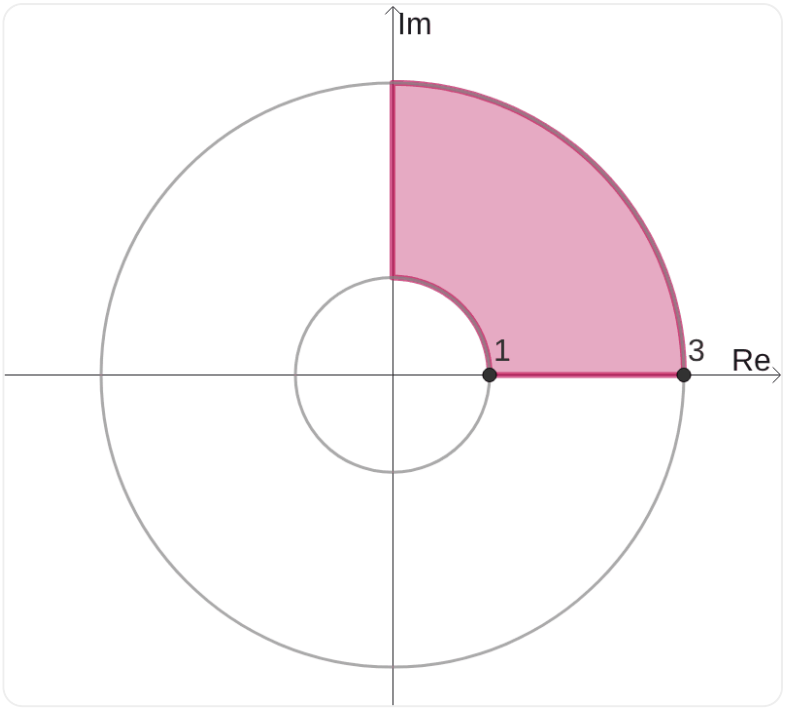
32 מצאו את המקום הגיאומטרי $|z+1|^2 + |z-1|^2 = 10$.

33 המספר z נמצא על המעגל $|z| = 1$. מה הערך הגדול ביותר של $|z-3-4i|$?

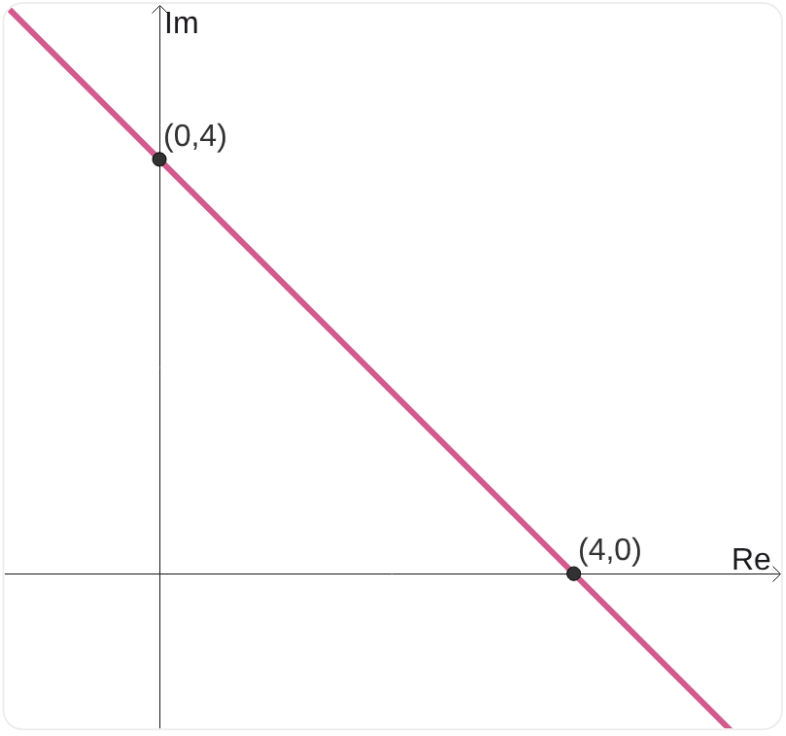
34 בציור תחום במישור גאוס: עיגול שמרכזו $2i$ ורדיוסו 2, החלק שמימין לציר המדומה. כתבו את התחום בעזרת אי-שוויונות.



35 בציור שני מעגלים שמרכזם בראשית, ברדיוסים 1 ו-3, והתחום שביניהם ברביע הראשון בלבד. כתבו את התחום ומצאו את שטחו.



36 בציור ישר במישור גאוס החותך את הצירים בנקודות $(4,0)$ ו-$(0,4)$. הוא האנך האמצעי של קטע שקצהו האחד בראשית. מצאו את הקצה השני וכתבו את הישר בצורה $|z-a|=|z-b|$.



✔ תשובות סופיות – נושא 5.3

1. מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 3
2. מעגל שמרכזו $(2,0)$ ורדיוסו 1
3. מעגל: $(x-1)^2+(y-2)^2=16$
4. עיגול (כולל ההיקף) שמרכזו $(0,-3)$ ורדיוסו 2
5. $y=-x$ – אנך אמצעי לקטע שבין 1 ל-$-i$
6. $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$
7. ישר אנכי $x=3$
8. ישר $y=2x$
9. שני ישרים: $y=x$ ו-$y=-x$
10. היפרבולה $xy=4$
11. מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4
12. מעגל $(x-1)^2+y^2=1$
13. קרן $y=x$, $x>0$ (בלי הראשית)
14. $-1+\sqrt{3}i$
15. טבעת בין שני מעגלים שמרכזם בראשית ; שטח 8π
16. חצי המישור $x>0$
17. מעגל $(x+3)^2+y^2=4$
18. מקסימום 7 ; מינימום 3
19. $\frac{9}{5}+\frac{12}{5}i$
20. $-3-4i$, $4+3i$
21. מרכז $(2,0)$, רדיוס 1
22. מעגל שמרכזו $(3,-1)$ ורדיוסו 2
23. הישר $\operatorname{Im} w=2$ (סיבוב ב-90°)

24 מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו $\frac{1}{2}$

25 שטח 6 ; היקף 12

26 $-1+3i$; ישר-זווית ושווה-שוקיים

27 $1+3i$,$-1+2i$

28 $1+\sqrt{3}i$

29 $\frac{\pi}{2}$ (חצי עיגול)

30 π (רבע עיגול)

31 $\frac{27\sqrt{3}}{4}$

32 מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 2

33 6

34 $|z-2i|\leq 2$ וגם $\operatorname{Re} z\geq 0$

35 $1\leq|z|\leq 3$,$0^\circ\leq\arg z\leq 90^\circ$; שטח 2π

36 הקצה השני $4+4i$; $|z|=|z-4-4i|$

5.4 סדרות במרוכבים ושאלות 100

כל נוסחאות הסדרות תקפות גם במרוכבים: $a_n = a_1 q^{n-1}$, $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$, ובסדרה אינסופית מתכנסת ($|q|<1$): $S = \frac{a_1}{1-q}$. כאשר $|q|=1$ – האיברים מסתובבים על מעגל.

צפו לפני שמתחילים:

מרוכבים וסדרה הנדסית – בגרות 2009
YouTube · 7:32

השאלה הקשה במרוכבים – בגרות 2014
YouTube · 10:49

שאלת בגרות במרוכבים – קיץ 2015
YouTube · 8:29

מרוכבים – שאלת בגרות 2016
YouTube · 6:40

1. בסדרה הנדסית $a_1 = 1$ ו-$q = i$. כתבו את חמשת האיברים הראשונים.

2. בסדרה ההנדסית $a_1 = 1$, $q = i$ – חשבו את סכום 8 האיברים הראשונים.

3. הוכיחו כי הסדרה $a_n = (1+i)^n$ היא סדרה הנדסית, ומצאו את המנה.

4. בסדרה הנדסית $a_1 = 2$ ו-$q = i$. חשבו את S_{10}.

5. בסדרה הנדסית $a_1 = 1+i$ ו-$q = 1+i$. מצאו את a_5.

6. בסדרה חשבונית $a_1 = 2+i$ ו-$d = 1-2i$. מצאו את a_{10}.

7. בסדרה החשבונית $a_1 = 2+i$, $d = 1-2i$ – חשבו את סכום 10 האיברים הראשונים.

8. בסדרה הנדסית $a_1 = 2$ ו-$q = \operatorname{cis} 60^\circ$. מצאו את a_7.

9. בסדרה הנדסית $a_1 = 1$ ו-$q = \operatorname{cis} 45^\circ$. מהו האיבר הראשון (אחרי a_1) שהוא מספר ממשי חיובי?

10 חשבו את סכום 12 האיברים הראשונים בסדרה הנדסית שבה $a_1 = 1$ ו- $q = \operatorname{cis} 30^\circ$.

11 מצאו את סכום הסדרה ההנדסית האינסופית שבה $a_1 = 1$ ו- $q = \frac{i}{2}$.

12 מצאו את סכום הסדרה ההנדסית האינסופית שבה $a_1 = 4$ ו- $q = \frac{1+i}{2}$. הראו תחילה שהיא מתכנסת.

13 לאילו ערכים ממשיים של a הסדרה ההנדסית האינסופית שבה $q = ai$ מתכנסת?

14 נתון $z = \operatorname{cis} 72^\circ$. חשבו את $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$.

15 בסדרה ההנדסית $a_1 = 1$, $q = i$ – חשבו את מכפלת 4 האיברים הראשונים.

16 נתונה הסדרה $a_n = i^n + n$. חשבו את סכום 4 האיברים הראשונים.

17 בסדרה הנדסית $a_2 = 2i$ ו- $a_5 = -16$. מצאו את כל האפשרויות למנה q.

18 בסדרה הנדסית $a_1 = \operatorname{cis} 10^\circ$ ו- $q = \operatorname{cis} 20^\circ$. מצאו את המקום הראשון n שבו $a_n = i$.

19 חשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{12} \operatorname{cis}(30^\circ n)$.

20 בסדרה הנדסית $a_1 = 3 + 4i$ ו- $q = 1 + i$. מצאו את $|a_5|$.

21 בסדרה הנדסית $a_1 = 8$ ו- $q = \frac{1}{2}\operatorname{cis} 90^\circ$. מהו המרחק של a_4 מהראשית, ובאיזה רביע הוא נמצא?

22 הנקודות $a_1, a_2, a_3, \ldots$ של סדרה הנדסית עם $|q| = 1$ מסודרות במישור גאוס. על איזה מקום גיאומטרי הן נמצאות?

23 שאלת 100: z מקיים $z^2 + z + 1 = 0$. חשבו את $z^{2026} + \frac{1}{z^{2026}}$.

24 שאלת 100: מצאו את המספר הטבעי הקטן ביותר n שעבורו $(1+i)^n = (1-i)^n$.

25 שאלת 100: נתון $z=\operatorname{cis}\theta$. הוכיחו כי $|1+z|=2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$.

26 שאלת 100: חשבו את הסכום $1+2i+3i^2+4i^3+\cdots+8i^7$ (רמז: קבצו ארבע-ארבע).

27 שאלת 100: בסדרה הנדסית $a_1=1$ והמנה q מקיימת $|q|=1$, $q\neq 1$. סכום 6 האיברים הראשונים הוא 0. מצאו את כל האפשרויות ל-q.

28 שאלת 100: האיברים a_1,a_2,a_3 של סדרה הנדסית הם קודקודי משולש שווה-צלעות שמרכזו בראשית, ו-$a_1=2$. מצאו את q ואת a_2, a_3.

29 שאלת 100: בסדרה הנדסית $a_n=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n$. מצאו את כל ה-$n$ הטבעיים שעבורם a_n ממשי שלילי.

30 שאלת 100: נתונה הסדרה $b_n=|a_n|$ כאשר a_n סדרה הנדסית עם $a_1=2+2i$ ו-$q=\frac{1+i}{2}$. הוכיחו ש-b_n הנדסית, ומצאו את סכום כל איבריה.

31 שאלת 100: מצאו את כל המספרים z שעבורם z, z^2, z^3 הם שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

32 שאלת 100: בסדרה הנדסית $a_1=1$ ו-$q=\operatorname{cis}\alpha$ ($0^\circ<\alpha<180^\circ$). ידוע ש-$a_1+a_2+a_3$ מספר ממשי. מצאו את α ואת הסכום.

✔ תשובות סופיות – נושא 5.4

1	$1\ ,-i\ ,-1\ ,i\ ,1$
2	0
3	$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+i$ קבוע ; $q=1+i$
4	$2+2i$
5	$-4-4i$
6	$11-17i$
7	$65-80i$
8	$a_7=2\operatorname{cis}360^\circ=2$
9	a_9
10	0
11	$\frac{4}{5}+\frac{2}{5}i$
12	$\lvert q\rvert=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$; $4+4i$
13	$-1<a<1$
14	0
15	-1
16	10
17	$\sqrt{3}+i\ ,-\sqrt{3}+i\ ,-2i$
18	$n=5$
19	0
20	$\lvert a_5\rvert=5\cdot(\sqrt{2})^4=20$
21	מרחק 1 ; $a_4=8\cdot\frac{1}{8}\operatorname{cis}270^\circ=-i$ – על הציר המדומה השלילי
22	על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו $\lvert a_1\rvert$
23	-1

24 $n = 4$

25 $1 + z = 2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{\theta}{2}$

26 $-4 - 4i$

27 $\mathrm{cis}\,60^\circ$, $\mathrm{cis}\,120^\circ$, $\mathrm{cis}\,180^\circ$, $\mathrm{cis}\,240^\circ$, $\mathrm{cis}\,300^\circ$

28 $q = \mathrm{cis}\,120^\circ$ או $\mathrm{cis}\,240^\circ$; $a_2, a_3 = -1 \pm \sqrt{3}i$

29 $n = 6 + 12k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$

30 b_n הנדסית עם $b_1 = 2\sqrt{2}$, $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$; סכום $\frac{2\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4\sqrt{2} + 4$

31 $z = 0$ או $z = 1$

32 $\alpha = 120^\circ$; הסכום 0

פרק 5 סיכומון סוף פרק – מספרים מרוכבים

הצגה אלגברית

- $z = a + bi$, $i^2 = -1$; $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$.
- חזקות של i במחזור 4: $1, -i, -1, i$ – מחלקים את המעריך ב-4 ומסתכלים על השארית.

הצמוד והגודל

- $\bar{z} = a - bi$; $z + \bar{z} = 2a$; $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.
- חילוק: כופלים מונה ומכנה בצמוד של המכנה.
- במשוואה עם z ו-$\bar{z}$ – מציבים $z = x + iy$ ומשווים חלקים.

משוואות

- משוואה ריבועית עם $\Delta < 0$ – פתרונות צמודים: $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
- במקדמים ממשיים: אם z_0 פתרון, גם $\bar{z}_0$ פתרון.

הצגה טריגונומטרית

- $z = r\operatorname{cis}\theta$, $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\tan\theta = \frac{b}{a}$ – לבדוק ברביע!
- כפל: $r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$; חילוק: $\frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$.
- $\bar{z} = r\operatorname{cis}(-\theta)$; $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\operatorname{cis}(-\theta)$.

דה-מואבר ושורשים

- $(r\operatorname{cis}\theta)^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$.
- $z^n = R\operatorname{cis}\alpha$: $z_k = \sqrt[n]{R}\operatorname{cis}\frac{\alpha + 360^\circ k}{n}$, $k = 0, \ldots, n-1$.
- הפתרונות – קודקודי מצולע משוכלל, וסכומם 0.

מקומות גיאומטריים

- $|z - z_0| = r$ – מעגל שמרכזו z_0 ; $\leq$ – עיגול.
- $|z - z_1| = |z - z_2|$ – אנך אמצעי לקטע $z_1 z_2$.
- כפל ב-i – סיבוב ב-90° ; כפל ב-$\operatorname{cis}\alpha$ – סיבוב ב-α.

סדרות במרוכבים

- $a_n = a_1 q^{n-1}$; $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$.
- אינסופית: $|q| < 1$ ואז $S = \frac{a_1}{1-q}$.
- $|q| = 1$ – האיברים על מעגל; אם $q^n = 1$ אז סכום n איברים הוא 0.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- זווית בהצגה טריגונומטרית לפי $\tan\theta$ בלי לבדוק באיזה רביע המספר.
- לשכוח שיש n שורשים שונים ל-$z^n = w$ – לא רק אחד.
- לכתוב $i^2 = 1$ או לטעות בשארית בחלוקה ב-4.

💡 **הטיפ של אילון:** מרוכבים זו שאלה של מעבר בין שתי שפות: חיבור וחיסור – באלגברית; כפל, חילוק וחזקות – בטריגונומטרית. תמיד תשאלו קודם באיזו שפה הכי קל לעבוד.

פרק 6

חקירת פונקציות מעריכיות (e)

נגזרת של e, אסימפטוטות בכל צד בנפרד, חקירה מלאה, פרמטרים והטרנספורמציה $e^{f(x)}$

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

6.1	פונקציות מעריכיות – תחום הגדרה, אסימפטוטות, חורים ונגזרת	36 תרגילים
6.2	חקירה מלאה של פונקציות מכפלה ומנה עם e (כולל פרמטרים)	32 תרגילים
6.3	הטרנספורמציה $e^{f(x)}$ ושאלות 100	33 תרגילים

סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

פונקציה מעריכית – חקירה מלאה + טיפים ודגשים לבגרות
YouTube · 16:20

פונקציית e – אסימפטוטה אופקית ואנכית
YouTube · 14:13

המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

מעבדת e בחזקת f(x) ו-ln f(x)
בחרו גרף של $f(x)$, החליפו בין $e^{f(x)}$ ל-$\ln f(x)$ והזיזו אותו למעלה ולמטה – וראו מה נשמר ומה משתנה.

המשיק הנע
גררו נקודה לאורך הגרף וראו את שיפוע המשיק – הנגזרת – בזמן אמת.

6.1 פונקציות מעריכיות – תחום הגדרה, אסימפטוטות, חורים ונגזרת

תזכורת: $(e^x)' = e^x$ ו- $\left(e^{g(x)}\right)' = g'(x)\,e^{g(x)}$. תמיד $e^x > 0$. אסימפטוטה אופקית בודקים **בכל צד בנפרד**: כאשר $x \to -\infty$ מתקיים $e^x \to 0$, וכאשר $x \to \infty$ – $e^{-x} \to 0$.

צפו לפני שמתחילים:



חקירת פונקציית e – נגזרת
YouTube · 4:31



פונקציית e – אסימפטוטה אופקית ואנכית
YouTube · 14:13



פונקציית e – אסימפטוטה אופקית
YouTube · 11:26



פתרון משוואות מעריכיות עם בסיס e
YouTube · 12:43

1. $f(x) = e^{3x}$. גזרו את הפונקציה.
2. $f(x) = e^{x^2-4x}$. גזרו, ומצאו את x שבו $f'(x) = 0$.
3. $f(x) = xe^{2x}$. גזרו בעזרת כלל המכפלה.
4. $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$. גזרו בעזרת כלל המנה.
5. $f(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$. גזרו, והראו ש-$f'(0) = 0$.
6. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$. גזרו את הפונקציה (שימו לב לנגזרת הפנימית).
7. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. גזרו, וקבעו את סימן הנגזרת בכל תחום ההגדרה.
8. $f(x) = 5e^{-\frac{x}{2}}$. גזרו, והסבירו מדוע הפונקציה יורדת לכל x.
9. $f(x) = \left(x^2+1\right)e^{-x}$. גזרו ופשטו כך שהנגזרת תהיה מכפלה.

10 $f(x)=e^{2x}-4e^{x}$. גזרו, ומצאו את x שבו $f'(x)=0$.

11 מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}-2}$.

12 מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)=\frac{3}{e^{2x}-e^{x}}$. (רמז: הוציאו גורם משותף במכנה.)

13 מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)=\sqrt{e^{x}-1}$.

14 מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)=e^{\frac{1}{x-3}}$.

15 מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)=\frac{x}{1-e^{x}}$. האם זהו גם המקום של אסימפטוטה אנכית?

16 מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)=\frac{e^{x}+1}{x^{2}-4}$ ואת האסימפטוטות האנכיות.

17 $f(x)=xe^{x}$. מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה (אם יש). לאיזה צד יש אסימפטוטה אופקית?

18 $f(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$. מצאו את האסימפטוטות האופקיות – בכל אחד מהצדדים בנפרד.

19 $f(x)=\frac{2e^{x}+1}{e^{x}-3}$. מצאו את כל האסימפטוטות.

20 $f(x)=2+e^{-x}$. מצאו את האסימפטוטות. מה ההתנהגות כאשר $x\to-\infty$?

21 $f(x)=x^{2}e^{-x}$. מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה.

22 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$. חשבו את הגבולות כאשר $x\to0^{+}$ וכאשר $x\to0^{-}$. האם $x=0$ אסימפטוטה אנכית? מהי האסימפטוטה האופקית?

23 $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{x}-1}$. האם ב-$x=0$ יש אסימפטוטה אנכית או חור? אם חור – מצאו את שיעוריו.

24 $f(x)=\frac{x^{2}-x}{e^{x}-1}$. האם ב-$x=0$ יש אסימפטוטה אנכית או חור?

25 $f(x)=\frac{e^{x}-4}{e^{x}-2}$. מצאו את כל האסימפטוטות.

26 $f(x)=\frac{e^x}{x}$. מצאו את כל האסימפטוטות.

27 מצאו את משוואת המשיק לגרף $f(x)=e^x$ בנקודה שבה $x=0$.

28 מצאו את משוואת המשיק לגרף $f(x)=xe^x$ בנקודה שבה $x=1$.

29 בגרף $f(x)=e^{2x}$ מעבירים משיק המקביל לישר $y=2x$. מצאו את נקודת ההשקה.

30 מצאו את הנקודה על גרף $f(x)=e^x-2x$ שבה המשיק מקביל לציר x.

31 $f(x)=e^{2x}-3e^x$. פתרו את המשוואה $f'(x)=0$.

32 $f(x)=e^{2x}-6e^x+4x$. מצאו את ערכי x שבהם $f'(x)=0$.

33 $f(x)=(x-a)e^x$, וידוע ש-$f'(1)=0$. מצאו את a.

34 הראו שהמשיק לגרף $f(x)=e^{-x}$ בנקודה $x=-1$ עובר בראשית הצירים.

35 $f(x)=e^{ax}$, ושיפוע המשיק בנקודה $(0,1)$ הוא 3. מצאו את a.

36 $f(x)=\frac{e^x}{x}$. מצאו את תחומי העלייה והירידה.

✔ תשובות סופיות – נושא 6.1

1	$f'(x)=3e^{3x}$
2	$f'(x)=2(x-2)e^{x^2-4x}$; $x=2$
3	$f'(x)=(2x+1)e^{2x}$
4	$f'(x)=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$
5	$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$; $f'(0)=0$
6	$f'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
7	$f'(x)=-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$; $f'(x)<0$ לכל $x\neq 0$
8	$f'(x)=-\frac{5e^{-\frac{x}{2}}}{2}$; $f'(x)<0$ כי $e^{-\frac{x}{2}}>0$
9	$f'(x)=-(x-1)^2e^{-x}$
10	$f'(x)=2(e^x-2)e^x$; $x=\ln 2$
11	$x\neq \ln 2$
12	$x\neq 0$
13	$x\geq 0$
14	$x\neq 3$
15	$x\neq 0$; לא – ב-$x=0$ יש חור, כי $\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^x}=-1$
16	$x\neq \pm 2$; $x=-2$,$x=2$
17	אנכית: אין אסימפטוטה אנכית ; אופקית: $y=0$ (כאשר $x\to-\infty$)
18	אנכית: אין אסימפטוטה אנכית ; אופקית: $y=1$ (כאשר $x\to\infty$), $y=0$ (כאשר $x\to-\infty$)
19	אנכית: $x=\ln 3$; אופקית: $y=2$ (כאשר $x\to\infty$), $y=-\frac{1}{3}$ (כאשר $x\to-\infty$)
20	אנכית: אין אסימפטוטה אנכית ; אופקית: $y=2$ (כאשר $x\to\infty$)
21	אנכית: אין אסימפטוטה אנכית ; אופקית: $y=0$ (כאשר $x\to\infty$)

22 $x \to 0^+ : f(x) \to \infty$; $x \to 0^- : f(x) \to 0$; כן – $x = 0$ אסימפטוטה אנכית (מצד ימין) ; $y = 1$

23 חור: $(0, 2)$ (כי $f(x) = e^x + 1$ עבור $x \neq 0$)

24 חור: $(0, -1)$

25 אנכית: $x = \ln 2$; אופקית: $y = 1$ (כאשר $x \to \infty$), $y = 2$ (כאשר $x \to -\infty$)

26 אנכית: $x = 0$; אופקית: $y = 0$ (כאשר $x \to -\infty$)

27 $y = x + 1$

28 $y = 2ex - e$

29 $(0, 1)$

30 $(\ln 2,\ 2 - 2\ln 2)$

31 $x = \ln \frac{3}{2}$

32 $x = 0$,$x = \ln 2$

33 $a = 2$

34 המשיק: $y = -ex$ – עובר ב- $(0, 0)$

35 $a = 3$

36 עולה: $x > 1$; יורדת: $x < 0$,$0 < x < 1$

6.2 חקירה מלאה של פונקציות מכפלה ומנה עם e (כולל פרמטרים)

סדר עבודה: תחום הגדרה ← חיתוך עם הצירים ← אסימפטוטות (כל צד בנפרד!) ← נגזרת ונקודות חשודות ← טבלת עלייה/ירידה וסוג הקיצון ← סקיצה. בכלל המכפלה כדאי להוציא e^x גורם משותף – כך קל למצוא היכן $f'(x)=0$.

צפו לפני שמתחילים:

פונקציה מעריכית – חקירה מלאה + טיפים ודגשים לבגרות
YouTube · 16:20

חקירת פונקציה מעריכית e – תרגול וטיפים
YouTube · 27:19

פונקציה מעריכית – כל מה שצריך לדעת
YouTube · 3:15

1 $f(x)=xe^{-x}$. מצאו: (1) תחום הגדרה; (2) אסימפטוטות; (3) נקודות קיצון וסוגן; (4) תחומי עלייה וירידה.

2 $f(x)=(x-2)e^{x}$. מצאו: (1) תחום הגדרה; (2) אסימפטוטות; (3) נקודות קיצון וסוגן; (4) תחומי עלייה וירידה.

3 $f(x)=x^2e^{x}$. מצאו: (1) תחום הגדרה; (2) אסימפטוטות; (3) נקודות קיצון וסוגן; (4) תחומי עלייה וירידה.

4 $f(x)=\frac{e^x}{x-1}$. מצאו: (1) תחום הגדרה; (2) אסימפטוטות; (3) נקודות קיצון וסוגן; (4) תחומי עלייה וירידה.

5 $f(x)=\frac{e^{-x}}{x+1}$. מצאו: (1) תחום הגדרה; (2) אסימפטוטות; (3) נקודות קיצון וסוגן; (4) תחומי עלייה וירידה.

6 $f(x)=e^{-x^2}$. הראו שהפונקציה זוגית, מצאו את נקודת הקיצון ואת האסימפטוטה האופקית.

7 $f(x)=(x^2-3)e^{x}$. מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון.

8 $f(x)=\frac{x}{e^x}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת תחום הערכים של הפונקציה.

9 $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$. הראו שהפונקציה עולה לכל x, ומצאו את תחום הערכים שלה.

10 $f(x)=e^x-x$. מצאו את נקודת הקיצון, והסיקו כמה פתרונות יש למשוואה $e^x=x$.

11 $f(x)=e^x-ex$. מצאו את נקודת הקיצון והראו ש-$e^x\geq ex$ לכל x.

12 $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$. מצאו: (1) תחום הגדרה; (2) אסימפטוטות; (3) נקודות קיצון וסוגן; (4) תחומי עלייה וירידה.

13 $f(x)=(1-x)e^{2x}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה.

14 $f(x)=e^{2x}-2e^x$. מצאו את נקודת הקיצון, את נקודת החיתוך עם ציר x ואת האסימפטוטה האופקית.

15 $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$. הראו שהפונקציה אי-זוגית ומצאו את כל האסימפטוטות.

16 $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת נקודת הקיצון.

17 $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$. מצאו את נקודות הקיצון. לאילו ערכי k יש למשוואה $f(x)=k$ שלושה פתרונות?

18 $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$. מצאו את נקודות הקיצון ואת האסימפטוטה האופקית.

19 $f(x)=e^x(x^2-4x+5)$. הראו שהפונקציה עולה לכל x. האם יש לה נקודת קיצון?

20 $f(x)=xe^{ax}$, ולפונקציה נקודת קיצון ב-$x=-\frac{1}{2}$. מצאו את a ואת סוג הקיצון.

21 $f(x)=(x+a)e^x$, ונקודת המינימום שלה ב-$x=1$. מצאו את a ואת ערך המינימום.

22 $f(x)=\frac{ae^x}{e^x+b}$. לפונקציה אסימפטוטה אופקית $y=3$ (כאשר $x\to\infty$) ואסימפטוטה אנכית $x=\ln 2$. מצאו את a ואת b.

23 $f(x)=\frac{e^x}{x-b}$, ולפונקציה אסימפטוטה אנכית $x=2$. מצאו את b ואת נקודת הקיצון.

24 $f(x)=e^x-ax$ כאשר $a>0$. מצאו את נקודת הקיצון (הביעו בעזרת a). לאיזה a ערך המינימום הוא 0?

25 $f(x)=ae^{2x}+be^x$ עוברת בנקודה $(0,1)$, ויש לה קיצון ב-$x=0$. מצאו את a ואת b.

26 $f(x)=(x^2+a)e^x$, ולפונקציה קיצון ב-$x=-4$. מצאו את a ואת נקודות הקיצון.

27 $f(x)=\frac{e^x}{x^2+a}$ מוגדרת לכל x, וידוע ש-$f'(1)=0$. מצאו את a, והראו שלפונקציה אין נקודות קיצון.

28 $f(x)=e^{-x}+kx$. לאילו ערכי k יש לפונקציה נקודת קיצון?

29 $f(x)=\frac{e^x+a}{e^x+1}$, וידוע שהאסימפטוטה האופקית כאשר $x\to-\infty$ היא $y=-2$. מצאו את a וקבעו אם הפונקציה עולה או יורדת.

30 $f(x)=xe^{-x}$. מצאו את משוואת המשיק בנקודת הפיתול של הפונקציה.

31 $f(x)=e^x-e^{-x}$. הראו שהפונקציה עולה ואי-זוגית, ומצאו את משוואת המשיק בראשית.

32 $f(x)=x^2e^x$. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=1$? נמקו בעזרת הקיצון ותחומי המונוטוניות.

✔ תשובות סופיות – נושא 6.2

1	תחום: כל x ; אנכית: אין אסימפטוטה אנכית ; אופקית: $y=0$ (כאשר $x\to\infty$) ; קיצון: $(1,\frac{1}{e})$ מקסימום ; עולה: $x<1$; יורדת: $x>1$
2	תחום: כל x ; אנכית: אין אסימפטוטה אנכית ; אופקית: $y=0$ (כאשר $x\to-\infty$) ; קיצון: $(1,-e)$ מינימום ; עולה: $x>1$; יורדת: $x<1$
3	תחום: כל x ; אנכית: אין אסימפטוטה אנכית ; אופקית: $y=0$ (כאשר $x\to-\infty$) ; קיצון: $(-2,\frac{4}{e^2})$ מקסימום, $(0,0)$ מינימום ; עולה: $x<-2$, $x>0$; יורדת: $-2<x<0$
4	תחום: $x\neq 1$; אנכית: $x=1$; אופקית: $y=0$ (כאשר $x\to-\infty$) ; קיצון: $(2,e^2)$ מינימום ; עולה: $x>2$; יורדת: $x<1$, $1<x<2$
5	תחום: $x\neq -1$; אנכית: $x=-1$; אופקית: $y=0$ (כאשר $x\to\infty$) ; קיצון: $(-2,-e^2)$ מקסימום ; עולה: $x<-2$; יורדת: $-2<x<-1$, $x>-1$
6	$f(-x)=f(x)$; $(0,1)$ מקסימום ; $y=0$
7	ציר x: $(-\sqrt{3},0)$, $(\sqrt{3},0)$; ציר y: $(0,-3)$; $(-3,\frac{6}{e^3})$ מקסימום, $(1,-2e)$ מינימום
8	$(1,\frac{1}{e})$ מקסימום ; $y\leq\frac{1}{e}$
9	$f'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$; $0<y<1$
10	$(0,1)$ מינימום ; אין פתרונות ($f(x)\geq 1>0$)
11	$(1,0)$ מינימום ; המינימום 0, לכן $f(x)\geq 0$
12	תחום: $x\neq 0$; אנכית: $x=0$; אופקית: $y=0$ (כאשר $x\to-\infty$) ; קיצון: $(2,\frac{e^2}{4})$ מינימום ; עולה: $x<0$, $x>2$; יורדת: $0<x<2$
13	$(\frac{1}{2},\frac{e}{2})$ מקסימום ; עולה: $x<\frac{1}{2}$; יורדת: $x>\frac{1}{2}$
14	$(0,-1)$ מינימום ; $(\ln 2,0)$; $y=0$ (כאשר $x\to-\infty$)
15	$f(-x)=-f(x)$; אנכית: $x=0$; אופקית: $y=1$ ($x\to\infty$), $y=-1$ ($x\to-\infty$)
16	$x\neq 0$; $(1,e)$ מינימום
17	$(0,0)$ מינימום, $(2,\frac{4}{e^2})$ מקסימום ; $0<k<\frac{4}{e^2}$
18	$(-1,0)$ מינימום, $(1,\frac{4}{e})$ מקסימום ; $y=0$ (כאשר $x\to\infty$)
19	$f'(x)=e^x(x-1)^2\geq 0$; אין קיצון

20 $a=2$; מינימום $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2e}\right)$

21 $a=-2$; $f(1)=-e$

22 $a=3$; $b=-2$

23 $b=2$; $(3,e^3)$ מינימום

24 $(\ln a,\ a-a\ln a)$ מינימום ; $a=e$

25 $a=-1$,$b=2$

26 $a=-8$; $\left(-4,\frac{8}{e^4}\right)$ מקסימום, $(2,-4e^2)$ מינימום

27 $a=1$; $f'(x)=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}\geq 0$ – הנגזרת לא מחליפה סימן

28 $k>0$

29 $a=-2$; עולה לכל x ($f'(x)=\frac{3e^x}{(e^x+1)^2}$)

30 נקודת פיתול $\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$; $y=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$

31 $y=2x$; $f'(x)=e^x+e^{-x}>0$

32 פתרון אחד (המקסימום $\frac{4}{e^2}<1$, ומימין ל-0 הפונקציה עולה לאינסוף)

6.3 הטרנספורמציה $e^{f(x)}$ ושאלות 100

$g(x)=e^{f(x)}$: אותו תחום הגדרה; $g(x)>0$ תמיד; $g(x)=1$ בדיוק כאשר $f(x)=0$; קיצון באותם x ומאותו סוג; אותם תחומי עלייה וירידה; כאשר $f(x)\to-\infty$ - $g(x)\to 0$, וכאשר $f(x)\to\infty$ - $g(x)\to\infty$.

צפו לפני שמתחילים:



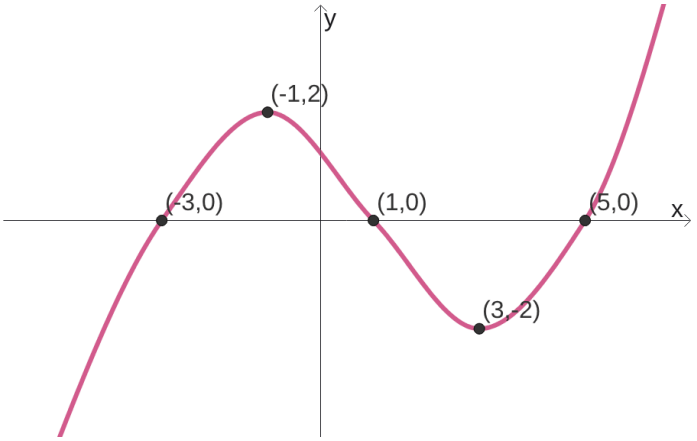
חקירת פונקציות – טרנספורמציה e בחזקת f(x)
YouTube · 7:56



חקירת פונקציה מעריכית e – תרגול וטיפים
YouTube · 27:19

1. $g(x)=e^{x^2-2x}$. מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)$ בלי לגזור את $g(x)$ - בעזרת הפונקציה במעריך.
2. $g(x)=e^{-x^2+4x}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה.
3. $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$. מהו תחום הערכים של $g(x)$?
4. $g(x)=e^{\frac{x}{x-1}}$. מצאו את האסימפטוטות של $g(x)$.
5. $g(x)=e^{\sqrt{x}}$. מהו תחום ההגדרה ומהי נקודת הקיצון (קצה)?
6. $g(x)=e^{x^3-3x}$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$.
7. $g(x)=e^{\frac{4}{x^2+1}}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת האסימפטוטה האופקית.
8. $g(x)=e^{\ln x}$. מהו תחום ההגדרה? פשטו את $g(x)$ וסרטטו סקיצה.
9. הראו ש-$g(x)=e^{f(x)}$ ו-$f(x)$ מקבלות קיצון באותם ערכי x ומאותו סוג.
10. $g(x)=e^{f(x)}$. באילו נקודות $g(x)=1$? ומה הסימן של $g(x)$?

תרגילים 11–18 בציור גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. משמאל הגרף יורד למינוס אינסוף ומימין עולה לאינסוף.
בתרגילים הבאים $g(x)=e^{f(x)}$.



גרף הפונקציה $f(x)$

11 מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגן.

12 מצאו את נקודות החיתוך של גרף $g(x)$ עם הישר $y=1$.

13 מהו תחום הערכים של $g(x)$?

14 מצאו את האסימפטוטה האופקית של $g(x)$ (ובאיזה צד).

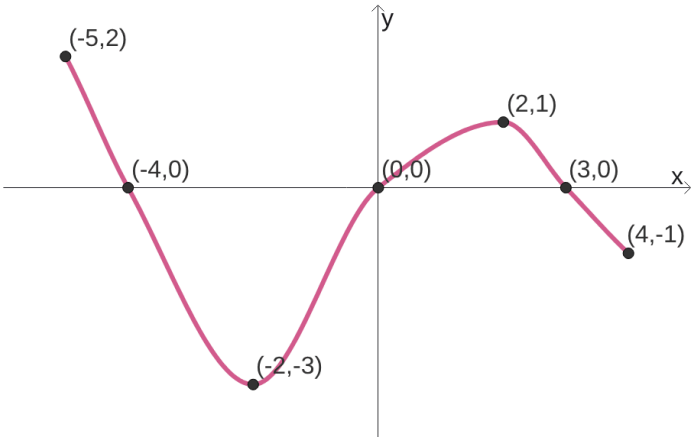
15 מצאו את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

16 האם לגרף $g(x)$ יש נקודות חיתוך עם ציר x? נמקו.

17 מהי נקודת החיתוך של $g(x)$ עם ציר y, אם ידוע ש-$f(0)=1$?

18 לאילו ערכי k יש למשוואה $g(x)=k$ שלושה פתרונות?

תרגילים 19–24 בציור גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $-5 \le x \le 4$.
בתרגילים הבאים $g(x) = e^{f(x)}$.



גרף הפונקציה $f(x)$

19 מהו תחום ההגדרה ומהו תחום הערכים של $g(x)$?

20 מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ (כולל נקודות קצה) וקבעו את סוגן.

21 כמה פתרונות יש למשוואה $g(x) = 1$? מצאו אותם.

22 פתרו את אי-השוויון $g(x) > 1$.

23 $h(x) = e^{-f(x)}$. מצאו את נקודת המקסימום הפנימית של $h(x)$.

24 סרטטו סקיצה של $g(x)$ בעזרת התשובות הקודמות, ומצאו לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את $g(x)$ בדיוק פעם אחת.

25 **שאלת 100:** $f(x) = xe^{-x}$. (א) מצאו את נקודת הקיצון. (ב) לאילו ערכי k יש למשוואה $xe^{-x} = k$ שני פתרונות? (ג) הסיקו כמה פתרונות יש למשוואה $x = e^{x-1}$.

26 **שאלת 100:** נתונה $f(x) = \frac{e^x}{x}$. מעבירים משיק לגרף מהראשית. מצאו את נקודת ההשקה.

27 **שאלת 100:** $f(x) = e^x$ ו- $g(x) = e^{-x}$. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים, והראו שהמשיקים לשני הגרפים בנקודה זו מאונכים זה לזה.

28 **שאלת 100:** $f(x) = (x-1)e^x + a$. לאילו ערכי a יש לגרף שתי נקודות חיתוך עם ציר x?

29 **שאלת 100:** $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$. הראו שהפונקציה עולה לכל x, ומצאו את תחום הערכים שלה.

30 **שאלת 100:** $f(x)=e^{2x}-4e^x+3$. (א) מצאו את נקודות החיתוך עם ציר x. (ב) מצאו את נקודת המינימום. (ג) לאילו k יש למשוואה $f(x)=k$ שני פתרונות?

31 **שאלת 100:** $f(x)=e^{ax}(x-1)$, ושיפוע המשיק בנקודת החיתוך עם ציר y הוא -1. מצאו את a ואת נקודת הקיצון.

32 **שאלת 100:** לפונקציה $f(x)=\frac{x+a}{e^x}$ נקודת קיצון על ציר y. מצאו את a, ואת סוג הקיצון.

33 **שאלת 100:** $g(x)=e^{f(x)}$ כאשר $f(x)=x^2-4x+3$. כמה פתרונות יש למשוואה $g(x)=k$ עבור $k=1$? ועבור $k=\frac{1}{e}$? ועבור $k=\frac{1}{e^2}$?

✔ תשובות סופיות – נושא 6.3

1	$(1, \frac{1}{e})$ מינימום
2	$(2, e^4)$ מקסימום ; עולה: $x < 2$; יורדת: $x > 2$
3	$0 < y < 1$ או $y > 1$
4	אנכית: $x = 1$ (מצד ימין) ; אופקית: $y = e$
5	$x \geq 0$; $(0, 1)$ מינימום (קצה)
6	$(-1, e^2)$ מקסימום, $(1, e^{-2})$ מינימום
7	$(0, e^4)$ מקסימום ; $y = 1$
8	$x > 0$; $g(x) = x$ (קרן בלי נקודת ההתחלה)
9	$g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$ ו-$e^{f(x)} > 0$, לכן לנגזרות אותו סימן
10	כאשר $f(x) = 0$; $g(x) > 0$ תמיד
11	$(-1, e^2)$ מקסימום, $(3, e^{-2})$ מינימום
12	$(-3, 1)$, $(1, 1)$, $(5, 1)$
13	$y > 0$
14	$y = 0$ כאשר $x \to -\infty$
15	עולה: $x < -1$, $x > 3$; יורדת: $-1 < x < 3$
16	לא – $e^{f(x)} > 0$ לכל x
17	$(0, e)$
18	$e^{-2} < k < e^2$
19	$-5 \leq x \leq 4$; $e^{-3} \leq y \leq e^2$
20	$(-5, e^2)$ מקסימום (קצה), $(-2, e^{-3})$ מינימום, $(2, e)$ מקסימום, $(4, e^{-1})$ מינימום (קצה)
21	שלושה: $x = -4$, $x = 0$, $x = 3$
22	$-5 \leq x < -4$ או $0 < x < 3$
23	$(-2, e^3)$

24	$k=e^{-3}$ או $e<k\le e^2$
25	(א) $\left(1,\frac{1}{e}\right)$ מקסימום (ב) $0<k<\frac{1}{e}$ (ג) פתרון אחד: $x=1$ (שקול ל-$xe^{-x}=\frac{1}{e}$)
26	$\left(2,\frac{e^2}{2}\right)$
27	$(0,1)$; השיפועים 1 ו--1, מכפלתם -1
28	$0<a<1$
29	$f'(x)=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}\ge 0$; $y>0$
30	(א) $(0,0)$, $(\ln 3,0)$ (ב) $(\ln 2,-1)$ (ג) $-1<k<3$
31	$a=2$; $\left(\frac{1}{2},-\frac{e}{2}\right)$ מינימום
32	$a=1$; $(0,1)$ מקסימום
33	$k=1$: שני פתרונות ($x=1,3$) ; $k=\frac{1}{e}$: אחד ($x=2$) ; $k=\frac{1}{e^2}$: אין

פרק 6 סיכומון סוף פרק – חקירת פונקציות מעריכיות (e)

נגזרות של e

- $(e^x)' = e^x$; $\left(e^{ax+b}\right)' = a\,e^{ax+b}$.
- $\left(e^{g(x)}\right)' = g'(x)\,e^{g(x)}$ – לא לשכוח את הנגזרת הפנימית.
- במכפלה: מוציאים e^x גורם משותף, למשל $(xe^x)' = e^x(x+1)$.

תכונות שחייבים לזכור

- $e^x > 0$ לכל x – לכן e^x לא משפיע על הסימן של הנגזרת.
- e^x "מנצח" כל פולינום: $x^n e^{-x} \to 0$ כאשר $x \to \infty$.
- $a = b \iff e^a = e^b$; $x = \ln c \iff e^x = c$ (רק כש-$c > 0$).

תחום הגדרה ואסימפטוטות

- מכנה כמו $e^x - 2$ מתאפס ב-$x = \ln 2$.
- אסימפטוטה אופקית – **בכל צד בנפרד**; לרוב יש רק בצד אחד.
- מכנה מתאפס ומונה לא – אנכית; שניהם מתאפסים – בודקים גבול (ייתכן חור).

סדר חקירה

- תחום ← חיתוכים עם הצירים ← אסימפטוטות (שני הצדדים).
- נגזרת ← $f'(x) = 0$ ← טבלת סימנים ← סוג הקיצון.
- תחומי עלייה וירידה ← סקיצה ← תחום ערכים ומספר פתרונות.

משוואות עם e

- $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$: משתנה עזר $t = e^x$, ו-$t > 0$!
- פתרון שלילי של t נפסל – אין כך x ש-$e^x < 0$.

פרמטרים

- קיצון ב-x_0: מציבים $f'(x_0) = 0$.
אסימפטוטה נתונה: אופקית – המקדם במונה; אנכית – המספר במכנה.

הטרנספורמציה $e^{f(x)}$

- אותו תחום, אותם x של קיצון ואותו סוג, אותה מונוטוניות.
- $g(x) > 0$ תמיד;
$f(x) = 0 \iff g(x) = 1$.
- $f(x) \to -\infty \Rightarrow g(x) \to 0$; ערך קיצון: $e^{f(x_0)}$.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לשכוח את הנגזרת הפנימית: $\left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2}$, לא e^{x^2}.
- לחפש אסימפטוטה אופקית רק בצד אחד, או לכתוב שיש בשני הצדדים בלי לבדוק.
- לנסות לפתור $e^x = 0$ או $e^x = -3$ – אין פתרון!

💡 **הטיפ של אילון:** בכל נגזרת עם e – הוציאו את e כגורם משותף מיד. נשאר לכם ביטוי פשוט שקל למצוא מתי הוא מתאפס ומה הסימן שלו.

פרק 7

חקירת פונקציות לוגריתמיות ($\ln$)

תחום הגדרה, חוקי לוגריתמים ומשוואות, חקירה מלאה והטרנספורמציה $\ln f(x)$

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

7.1	**פונקציות $\ln$ – תחום הגדרה (כולל הדגש החשוב), נגזרת ומשוואות**	34 תרגילים
7.2	**חקירה מלאה של פונקציות $\ln$ (כולל פרמטרים)**	31 תרגילים
7.3	**הטרנספורמציה $\ln f(x)$ ושאלות 100**	31 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

פונקציה לוגריתמית (ln) – מיקוד לבגרות
YouTube · 4:57

תרגול פונקציית ln – חקירה ואינטגרל
YouTube · 16:35

🎮 המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

מעבדת e בחזקת f(x) ו-ln f(x)
בחרו גרף של $f(x)$, החליפו בין $e^{f(x)}$ ל-$\ln f(x)$ והזיזו אותו למעלה ולמטה – וראו מה נשמר ומה משתנה.

המשיק הנע
גררו נקודה על הגרף וראו את שיפוע המשיק בזמן אמת – נגזרת בנקודה.

7.1 פונקציות ln – תחום הגדרה (כולל הדגש החשוב), נגזרת ומשוואות

$\ln g(x)$ מוגדר רק כאשר $g(x) > 0$. **הדגש:** חוקי הלוגריתמים משנים את תחום ההגדרה – $\ln\frac{a}{b}$ ו-$\ln a - \ln b$ אינם אותה פונקציה! נגזרות: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ו- $(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$. במשוואות – תמיד בודקים שהפתרון בתחום.

צפו לפני שמתחילים:

תחום הגדרה ln
YouTube · 6:29

פתרון משוואות ln בסיסיות
YouTube · 6:09

פונקציה לוגריתמית (ln) – מיקוד לבגרות
YouTube · 4:57

1. $f(x) = \ln(x-3)$. מצאו את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטה האנכית.
2. $f(x) = \ln\left(4-x^2\right)$. מצאו את תחום ההגדרה.
3. $f(x) = \ln\left(x^2-5x+6\right)$. מצאו את תחום ההגדרה.
4. $f(x) = \ln\left(e^x-1\right)$. מצאו את תחום ההגדרה.
5. $f(x) = \frac{1}{\ln x}$. מצאו את תחום ההגדרה. (שימו לב: גם המכנה!)
6. $f(x) = \sqrt{\ln x}$. מצאו את תחום ההגדרה.
7. $f(x) = \ln(\ln x)$. מצאו את תחום ההגדרה.
8. **הדגש החשוב:** מצאו את תחום ההגדרה של $f(x) = \ln\frac{x-1}{x+2}$ ושל $g(x) = \ln(x-1) - \ln(x+2)$. האם אלה אותן פונקציות?

9 מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)=\ln(x^2)$ ושל $g(x)=2\ln x$. האם $f(x)=g(x)$?

10 מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)=\ln x+\ln(5-x)$, ואת הערך המקסימלי שלה.

11 $f(x)=\ln(3x)$. גזרו. מה מפתיע בתוצאה?

12 $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$. גזרו.

13 $f(x)=x\ln x$. גזרו בעזרת כלל המכפלה.

14 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. גזרו בעזרת כלל המנה.

15 $f(x)=\ln^2 x$. גזרו (שימו לב לנגזרת הפנימית).

16 $f(x)=\ln\left(\sqrt{x}\right)$. פשטו בעזרת חוקי לוגריתמים, ואז גזרו.

17 $f(x)=\ln\left(e^x+1\right)$. גזרו.

18 $f(x)=x^2\ln x$. גזרו ופשטו.

19 $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$. גזרו (רמז: פרקו לשני לוגריתמים בתחום שבו זה מותר).

20 פתרו: $\ln x=2$.

21 פתרו: $\ln(2x-1)=0$.

22 פתרו: $\ln^2 x-3\ln x+2=0$.

23 פתרו: $\ln(x+1)+\ln(x-1)=\ln 3$. בדקו את תחום ההגדרה!

24 פתרו: $2\ln x=\ln(x+6)$.

25 פתרו: $e^{2x}-5e^x+6=0$.

26 פתרו: $\ln(x^2) = 2$. כמה פתרונות יש?

27 פתרו: $3^x = 7$ (בטאו את התשובה בעזרת $\ln$).

28 פתרו את אי-השוויון: $\ln x < 1$.

29 פתרו את אי-השוויון: $\ln(x-2) > 0$.

30 פתרו: $\ln x = \ln(6-x) + \ln 2$.

31 מצאו את משוואת המשיק לגרף $f(x) = \ln x$ בנקודה שבה $x = 1$.

32 מצאו את הנקודה על גרף $f(x) = \ln x$ שבה המשיק מקביל לישר $y = \frac{1}{2}x$.

33 מהראשית מעבירים משיק לגרף $f(x) = \ln x$. מצאו את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק.

34 $f(x) = \ln(ax)$, ושיפוע המשיק בנקודה שבה $x = 2$ הוא $\frac{1}{2}$. מה אפשר לומר על a?

✔ תשובות סופיות – נושא 7.1

1	$x > 3$
2	$-2 < x < 2$
3	$x < 2$ או $x > 3$
4	$x > 0$
5	$0 < x < 1$ או $x > 1$
6	$x \geq 1$
7	$x > 1$
8	$f(x)$: $x < -2$ או $x > 1$; $g(x)$: $x > 1$; לא – שוות רק עבור $x > 1$
9	$f(x)$: $x \neq 0$; $g(x)$: $x > 0$; שוות רק עבור $x > 0$
10	$0 < x < 5$; המקסימום: $f(2.5) = \ln \frac{25}{4}$
11	$f'(x) = \frac{1}{x}$; כמו נגזרת $\ln x$ – כי $\ln 3x = \ln 3 + \ln x$
12	$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$
13	$f'(x) = \ln x + 1$
14	$f'(x) = -\frac{\ln x - 1}{x^2}$
15	$f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$
16	$f'(x) = \frac{1}{2x}$
17	$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$
18	$f'(x) = x\,(2 \ln x + 1)$
19	$f'(x) = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$
20	$x = e^2$
21	$x = 1$
22	$x = e$, $x = e^2$
23	$x = 2$ ($x = -2$ נפסל)

24 $x=3$ ($x=-2$ נפסל)

25 $x=\ln 2$, $x=\ln 3$

26 שניים: $x=\pm e$

27 $x=\frac{\ln 7}{\ln 3}$

28 $0<x<e$

29 $x>3$

30 $x=4$

31 $y=x-1$

32 $(2,\ln 2)$

33 $y=\frac{1}{e}x$; $(e,1)$

34 כל $a>0$ - הנגזרת $\frac{1}{x}$ לא תלויה ב-a

7.2 חקירה מלאה של פונקציות $\ln$ (כולל פרמטרים)

התחום קודם לכול – הוא קובע את כל השאר. אסימפטוטה אנכית בודקים בקצה התחום (למשל $x \to 0^+$). שימו לב: $x \ln x \to 0$ כאשר $x \to 0^+$, ואילו $\frac{\ln x}{x} \to 0$ כאשר $x \to \infty$ – x-ה"מנצח" את ה-$\ln$.

צפו לפני שמתחילים:



תרגול פונקציית $\ln$ – חקירה ואינטגרל
YouTube · 16:35



פונקציה לוגריתמית ($\ln$) – מיקוד לבגרות
YouTube · 4:57

1 $f(x) = x \ln x$. מצאו: (1) תחום הגדרה; (2) אסימפטוטות; (3) נקודות קיצון וסוגן; (4) תחומי עלייה וירידה.

2 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. מצאו: (1) תחום הגדרה; (2) אסימפטוטות; (3) נקודות קיצון וסוגן; (4) תחומי עלייה וירידה.

3 $f(x) = x - \ln x$. מצאו: (1) תחום הגדרה; (2) אסימפטוטות; (3) נקודות קיצון וסוגן; (4) תחומי עלייה וירידה.

4 $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. מצאו: (1) תחום הגדרה; (2) אסימפטוטות; (3) נקודות קיצון וסוגן; (4) תחומי עלייה וירידה.

5 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$. מצאו: (1) תחום הגדרה; (2) אסימפטוטות; (3) נקודות קיצון וסוגן; (4) תחומי עלייה וירידה.

6 $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. הראו שהפונקציה זוגית, מצאו את נקודת הקיצון ואת תחום הערכים.

7 $f(x) = \ln(4 - x^2)$. מצאו את תחום ההגדרה, האסימפטוטות ונקודת הקיצון.

8 $f(x) = \ln^2 x$. מצאו את נקודת הקיצון ואת נקודת הפיתול.

9 $f(x) = x^2 \ln x$. מצאו את נקודת הקיצון ואת נקודת החיתוך עם ציר x.

10 $f(x)=\ln x-x+1$. מצאו את נקודת הקיצון והסיקו ש- $\ln x\le x-1$ לכל $x>0$.

11 $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת נקודת החיתוך עם ציר x.

12 $f(x)=\ln(x^2-4x+5)$. מצאו את נקודת הקיצון. האם לגרף יש אסימפטוטות?

13 $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$. מצאו תחום הגדרה ואסימפטוטות, והראו שהפונקציה אי-זוגית.

14 $f(x)=x-2\ln x$. מצאו את נקודת הקיצון. כמה פתרונות יש למשוואה $x=2\ln x$?

15 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. לאילו ערכי k יש למשוואה $\ln x=kx$ שני פתרונות?

16 בעזרת $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ קבעו: מה גדול יותר, e^π או π^e?

17 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת תחום הערכים.

18 $f(x)=\ln(x)-\frac{x^2}{2}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה.

19 $f(x)=\ln(e^x+1)$. הראו שהפונקציה עולה, ומצאו את האסימפטוטה האופקית.

20 $f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$. מהו תחום ההגדרה? האם ב- $x=1$ יש אסימפטוטה או חור?

21 $f(x)=x\ln^2 x$. מצאו את נקודות הקיצון.

22 $f(x)=\ln(x+1)-x$. מצאו את תחום ההגדרה, האסימפטוטה האנכית ונקודת הקיצון. הסיקו ש- $\ln(1+x)\le x$.

23 $f(x)=2\ln x-\ln^2 x$. מצאו את נקודות החיתוך עם ציר x ואת נקודת הקיצון.

24 $f(x)=ax-\ln x$, ונקודת המינימום שלה ב- $x=\frac{1}{2}$. מצאו את a ואת ערך המינימום.

25 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}$, ולפונקציה קיצון ב- $x=2$. מצאו את a ואת סוג הקיצון.

26 $f(x)=\ln(x^2+a)$ מוגדרת לכל x, וערך המינימום שלה הוא $\ln 4$. מצאו את a.

27 $f(x)=x^2-a\ln x$, ולפונקציה מינימום ב-$x=2$. מצאו את a ואת נקודת המינימום.

28 $f(x)=\ln(x-a)$, והמשיק לגרף בנקודה שבה $x=3$ מקביל לישר $y=x$. מצאו את a.

29 $f(x)=\frac{a+\ln x}{x}$, ולפונקציה קיצון ב-$x=1$. מצאו את a וקבעו את סוג הקיצון.

30 $f(x)=\ln(ax^2+1)$, ושיפוע המשיק ב-$x=1$ הוא 1. מצאו את a.

31 $f(x)=x-k\ln x$ כאשר $k>0$. מצאו את נקודת הקיצון (בעזרת k). לאילו k ערך המינימום חיובי?

✔ תשובות סופיות – נושא 7.2

1	תחום: $x>0$; אנכית: אין אסימפטוטה אנכית ; אופקית: אין אסימפטוטה אופקית ; קיצון: $\left(\frac{1}{e},-\frac{1}{e}\right)$ מינימום ; עולה: $x>\frac{1}{e}$; יורדת: $0<x<\frac{1}{e}$
2	תחום: $x>0$; אנכית: $x=0$; אופקית: $y=0$ (כאשר $x\to\infty$) ; קיצון: $\left(e,\frac{1}{e}\right)$ מקסימום ; עולה: $0<x<e$; יורדת: $x>e$
3	תחום: $x>0$; אנכית: $x=0$; אופקית: אין אסימפטוטה אופקית ; קיצון: $(1,1)$ מינימום ; עולה: $x>1$; יורדת: $0<x<1$
4	תחום: $x>0$; אנכית: $x=0$; אופקית: $y=0$ (כאשר $x\to\infty$) ; קיצון: $\left(\sqrt{e},\frac{1}{2e}\right)$ מקסימום ; עולה: $0<x<\sqrt{e}$; יורדת: $x>\sqrt{e}$
5	תחום: $0<x<1$ או $x>1$; אנכית: $x=1$; אופקית: אין אסימפטוטה אופקית ; קיצון: (e,e) מינימום ; עולה: $x>e$; יורדת: $0<x<1$,$1<x<e$
6	$f(-x)=f(x)$; $(0,0)$ מינימום ; $y\geq 0$
7	$-2<x<2$; $x=\pm 2$; $(0,\ln 4)$ מקסימום
8	$(1,0)$ מינימום ; פיתול: $(e,1)$
9	$\left(\frac{1}{\sqrt{e}},-\frac{1}{2e}\right)$ מינימום ; $(1,0)$
10	$(1,0)$ מקסימום ; לכן $f(x)\leq 0$
11	$(1,1)$ מקסימום ; $\left(\frac{1}{e},0\right)$
12	$(2,0)$ מינימום ; אין אסימפטוטות
13	$x<-1$ או $x>1$; אנכיות $x=\pm 1$, אופקית $y=0$; $f(-x)=-f(x)$
14	$(2,2-2\ln 2)$ מינימום ; אין פתרונות (המינימום $2-2\ln 2>0$)
15	$0<k<\frac{1}{e}$
16	e^{π} – כי $f(e)>f(\pi)$ (מקסימום ב-$x=e$)
17	$(1,1)$ מינימום ; $y\geq 1$
18	$(1,-\frac{1}{2})$ מקסימום ; עולה: $0<x<1$; יורדת: $x>1$
19	$f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}>0$; $y=0$ (כאשר $x\to-\infty$)
20	$x>0$,$x\neq 1$; חור $(1,1)$

21	$\left(e^{-2},\frac{4}{e^2}\right)$ מקסימום, $(1,0)$ מינימום
22	$x>-1$; $x=-1$; $(0,0)$ מקסימום
23	$(1,0)$, $(e^2,0)$; $(e,1)$ מקסימום
24	$a=2$; $1+\ln 2$
25	$a=2$; $(2,\ln 2+1)$ מינימום
26	$a=4$
27	$a=8$; $(2,4-8\ln 2)$
28	$a=2$
29	$a=1$; $(1,1)$ מקסימום
30	$a=1$
31	$0<k<e$; $(k,\ k-k\ln k)$ מינימום

7.3 הטרנספורמציה $\ln f(x)$ ושאלות 100

$g(x)=\ln f(x)$ מוגדרת רק היכן ש-$f(x)>0$. $g(x)=0$ כאשר $f(x)=1$;
$g(x)<0$ כאשר $0<f(x)<1$. באפס של $f(x)$ (כאשר $f(x)\to 0^+$) –
אסימפטוטה אנכית. קיצון ומונוטוניות – כמו של $f(x)$, אבל רק בחלקים שבהם $f(x)>0$.

צפו לפני שמתחילים:



חקירת פונקציות – טרנספורמציה ln(f(x))
YouTube · 7:44



תרגול פונקציית ln – חקירה ואינטגרל
YouTube · 16:35

1. $g(x)=\ln(x^2-4x+5)$. מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)$ בעזרת הפונקציה שבתוך ה-ln.

2. $g(x)=\ln(x^2-1)$. מצאו את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטות האנכיות. האם יש לפונקציה קיצון?

3. $g(x)=\ln(-x^2+6x-5)$. מצאו את תחום ההגדרה ואת נקודת הקיצון.

4. $g(x)=\ln\frac{1}{x^2+1}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת תחום הערכים.

5. $g(x)=\ln(f(x))$. באילו ערכי x מתקיים $g(x)=0$? ומתי $g(x)<0$?

6. הסבירו מדוע באפס של $f(x)$ (שבו $f(x)$ חיובית מצד אחד לפחות) יש ל-$\ln f(x)$ אסימפטוטה אנכית.

7. $g(x)=\ln(x^3-3x+3)$ בתחום $x>-1$. מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)$.

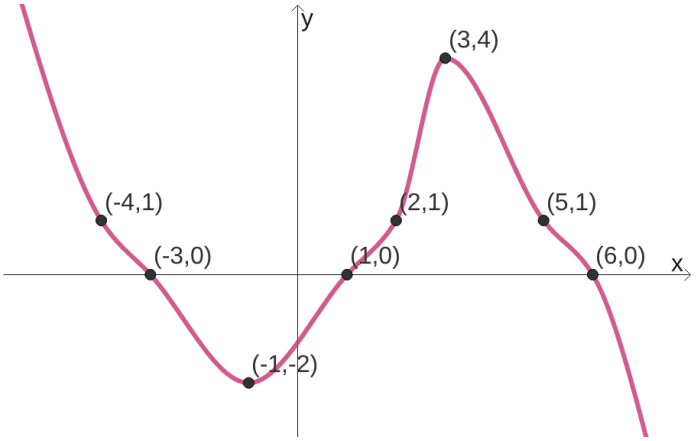
8. $g(x)=\ln(4x-x^2)$. מצאו את תחום הערכים של $g(x)$.

9. $g(x)=\ln(x^2+2x+2)$. מצאו את נקודת הקיצון ואת תחום הערכים.

10. $g(x)=\ln\frac{x-2}{x+3}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת כל האסימפטוטות.

11 $g(x)=\ln(9-x^2)$. מצאו את תחום ההגדרה, את נקודת הקיצון ואת תחום הערכים.

תרגילים 12–18 בציור גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x (משמאל הגרף עולה לאינסוף ומימין יורד למינוס אינסוף). בתרגילים הבאים $g(x)=\ln f(x)$.



גרף הפונקציה $f(x)$

12 מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$.

13 מצאו את האסימפטוטות האנכיות של $g(x)$.

14 מצאו את נקודות החיתוך של $g(x)$ עם ציר x.

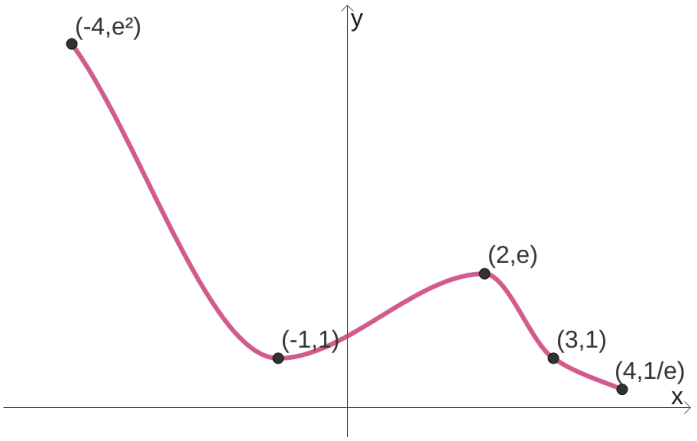
15 מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגה. מדוע לנקודה $(-1,-2)$ של $f(x)$ אין נקודה מתאימה ב-$g(x)$?

16 מצאו את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

17 פתרו את אי-השוויון $g(x)>0$.

18 מהו תחום הערכים של $g(x)$?

תרגילים 19–23 בציור גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $-4 \le x \le 4$, וכל ערכיה חיוביים. בתרגילים הבאים $g(x) = \ln f(x)$.



גרף הפונקציה $f(x)$

19 מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ (כולל נקודות קצה) וקבעו את סוגן.

20 מהו תחום הערכים של $g(x)$?

21 מצאו את נקודות החיתוך של $g(x)$ עם ציר x. באיזו מהן הגרף משיק לציר?

22 האם ל-$g(x)$ יש אסימפטוטות אנכיות? נמקו.

23 סרטטו סקיצה של $g(x)$, ומצאו לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את $g(x)$ בדיוק פעם אחת.

24 **שאלת 100:** $f(x) = \ln x$ ו-$g(x) = \ln(4 - x)$. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים, והראו שהגרפים סימטריים ביחס לישר $x = 2$.

25 **שאלת 100:** $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. מעבירים משיק לגרף בנקודה שבה $x = 1$. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר y.

26 **שאלת 100:** $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \ln 2$. (א) מצאו את נקודות החיתוך עם ציר x. (ב) מצאו את נקודות הפיתול. (ג) כתבו את המשיקים בנקודות הפיתול.

27 **שאלת 100:** $f(x) = x \ln x - x$. (א) מצאו את נקודת הקיצון. (ב) לאילו k יש למשוואה $f(x) = k$ שני פתרונות?

28 **שאלת 100:** $f(x) = \ln(x) + \ln(a - x)$ כאשר $a > 0$, וערך המקסימום של $f(x)$ הוא $\ln 9$. מצאו את a.

29 **שאלת 100:** $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$. (א) מצאו את נקודת הקיצון. (ב) הראו ש- $\frac{\ln x}{x^2}\le\frac{1}{2e}$ לכל $x>0$.

30 **שאלת 100:** נתונה $f(x)=\ln(e^x+e^{-x})$. הראו שהפונקציה זוגית, ומצאו את נקודת הקיצון ואת ערכה.

31 **שאלת 100:** $g(x)=\ln f(x)$ כאשר $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת נקודת הקיצון של $g(x)$.

✔ תשובות סופיות – נושא 7.3

1. $(2,0)$ מינימום
2. $x<-1$ או $x>1$; $x=\pm1$; אין קיצון
3. $1<x<5$; $(3,\ln 4)$ מקסימום
4. $(0,0)$ מקסימום ; $y\le 0$
5. $g(x)=0$ כאשר $f(x)=1$; $g(x)<0$ כאשר $0<f(x)<1$
6. כאשר $f(x)\to 0^+$ מתקיים $\ln f(x)\to -\infty$
7. $(1,0)$ מינימום
8. $y\le \ln 4$
9. $(-1,0)$ מינימום ; $y\ge 0$
10. $x<-3$ או $x>2$; אנכיות: $x=-3$, $x=2$; אופקית: $y=0$
11. $-3<x<3$; $(0,\ln 9)$ מקסימום ; $y\le \ln 9$
12. $x<-3$ או $1<x<6$
13. $x=-3$, $x=1$, $x=6$
14. $(-4,0)$, $(2,0)$, $(5,0)$
15. $(3,\ln 4)$ מקסימום ; כי $f(-1)<0$ – מחוץ לתחום
16. עולה: $1<x<3$; יורדת: $x<-3$, $3<x<6$
17. $x<-4$ או $2<x<5$
18. כל y
19. $(-4,2)$ מקסימום (קצה), $(-1,0)$ מינימום, $(2,1)$ מקסימום, $(4,-1)$ מינימום (קצה)
20. $-1\le y\le 2$
21. $(-1,0)$ – משיק, $(3,0)$ – חותך
22. לא – $f(x)>0$ בכל התחום
23. $-1\le k<0$ או $1<k\le 2$

24 $g(x)=f(4-x)$; $(2,\ln 2)$

25 $(0,-1)$ (המשיק $y=x-1$)

26 (א) $(\pm 1,0)$ (ב) $(\pm 1,0)$ (ג) $y=x-1$, $y=-x-1$

27 (א) $(1,-1)$ מינימום (ב) $-1<k<0$

28 $a=6$

29 (א) $\left(\sqrt{e},\frac{1}{2e}\right)$ מקסימום (ב) נובע מהמקסימום

30 $(0,\ln 2)$ מינימום

31 $x>0$; $(2,\ln 4)$ מינימום

פרק 7 סיכומון סוף פרק – חקירת פונקציות לוגריתמיות ($\ln$)

תחום הגדרה – הכול מתחיל כאן

- $\ln g(x)$ מוגדר רק כאשר $g(x) > 0$.
- $\frac{1}{\ln x}$: גם $x > 0$ וגם $x \neq 1$; $\sqrt{\ln x}$: $x \geq 1$.
- **הדגש:** $\ln \frac{x-1}{x+2}$ מוגדר ל-$x < -2$ או $x > 1$, אבל $\ln(x-1) - \ln(x+2)$ רק ל-$x > 1$.
- $\ln x^2$ מוגדר לכל $x \neq 0$; $2\ln x$ רק ל-$x > 0$.

משוואות ואי-שוויונות

- $\ln x = c \iff x = e^c$; $\ln A = \ln B \iff A = B$ (בתוך התחום).
- $\ln^2 x - 3\ln x + 2 = 0$: משתנה עזר $t = \ln x$.
- $\ln x < 1 \iff 0 < x < e$ – לא לשכוח את $x > 0$.
- בסוף – בודקים כל פתרון בתחום ההגדרה.

חוקי לוגריתמים

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$; $\ln a^n = n \ln a$.
- $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $e^{\ln a} = a$; $a^x = b \iff x = \frac{\ln b}{\ln a}$.

גבולות חשובים

- $\ln x \to -\infty$ כאשר $x \to 0^+$ – אסימפטוטה אנכית.
- $x \ln x \to 0$ כאשר $x \to 0^+$; $\frac{\ln x}{x} \to 0$ כאשר $x \to \infty$.

נגזרות

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$.
- $(\ln kx)' = \frac{1}{x}$ – הקבוע נעלם.
- $(x \ln x)' = \ln x + 1$; $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

הטרנספורמציה $\ln f(x)$

- תחום: רק היכן ש-$f(x) > 0$.
- $f(x) = 1 \iff g(x) = 0$; $0 < f(x) < 1 \iff g(x) < 0$.
- $f(x) \to 0^+$ – אסימפטוטה אנכית של $g(x)$.
- קיצון ומונוטוניות כמו של $f(x)$ – רק בתחום החיובי.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לפתור משוואה עם חוקי לוג בלי לבדוק את תחום ההגדרה של המשוואה המקורית.
- לכתוב $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$ – זה לא חוק!
- לשכוח את הנגזרת הפנימית: $(\ln(x^2+1))' = \frac{2x}{x^2+1}$.
- לסמן קיצון של $\ln f(x)$ בנקודה שבה $f(x) \leq 0$.

💡 **הטיפ של אילון:** בשאלת $\ln$ – כתבו את התחום בראש הדף ומסגרו אותו. כל תשובה שאתם מקבלים (פתרון, קיצון, תחום עלייה) – בדקו מולו לפני שממשיכים.

פרק 8

אינטגרלים – e ו-$\ln$

פונקציה קדומה של e ושל שברים שהמונה בהם הוא נגזרת המכנה, שטחים ואינטגרל צובר

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

8.1 אינטגרלים של e ושל פונקציות שנותנות $\ln$ – זיהוי מצב האינטגרל — 37 תרגילים

8.2 חישוב שטחים ואינטגרל צובר עם e ו-$\ln$ — 31 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

אינטגרלים עם e – כל הטכניקות וזיהוי נגזרת פנימית
YouTube · 4:01

אינטגרל ln – הכל!
YouTube · 11:35

🎛️ המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

שטח מתחת לגרף
הזיזו את גבולות האינטגרל וראו איך מלבנים קטנים מתקרבים לשטח המדויק.

8.1 אינטגרלים של e ושל פונקציות שנותנות $\ln$ – זיהוי מצב האינטגרל

$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+C$; $\int g'(x)e^{g(x)}dx = e^{g(x)}+C$;
$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln(ax+b)+C$; $\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \ln g(x)+C$. **זיהוי מצב:** האם במונה יש את הנגזרת של המכנה? האם ליד ה-e יש את הנגזרת של המעריך? אם לא – מפצלים, פותחים סוגריים או מכפילים ומחלקים במספר.

צפו לפני שמתחילים:

אינטגרלים עם e – כל הטכניקות וזיהוי נגזרת פנימית
YouTube · 4:01

האינטגרל הלא מסוים – פונקציית e
YouTube · 1:41

האינטגרל הלא מסוים – פונקציית ln: טכניקה והיגיון
YouTube · 5:41

אינטגרל ln – הכל!
YouTube · 11:35

1. חשבו: $\int e^{3x}\,dx$.
2. חשבו: $\int e^{2x+1}\,dx$.
3. חשבו: $\int 5e^{-x}\,dx$.
4. חשבו: $\int e^{\frac{x}{2}}\,dx$.
5. חשבו: $\int xe^{x^2}\,dx$. זהו את הנגזרת הפנימית.
6. חשבו: $\int (2x+1)\,e^{x^2+x}\,dx$.
7. חשבו: $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.
8. חשבו: $\int \left(e^{2x}+1\right)e^{-x}\,dx$. פצלו את השבר לפני שמבצעים אינטגרל.

9 חשבו: $\int (e^x+1)^2\,dx$. פתחו סוגריים.

10 חשבו: $\int (e^x+1)^3 e^x\,dx$. שימו לב: הנגזרת של מה שבסוגריים נמצאת מחוץ להם.

11 חשבו: $\int e^{1-2x}\,dx$.

12 חשבו: $\int \frac{1}{x}\,dx$.

13 חשבו: $\int \frac{3}{x}\,dx$.

14 חשבו: $\int \frac{1}{2x+1}\,dx$.

15 חשבו: $\int \frac{4}{3-x}\,dx$. שימו לב לסימן של המקדם של x.

16 חשבו: $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$.

17 חשבו: $\int \frac{2x}{x^2-4}\,dx$. (בתחום $x>2$)

18 חשבו: $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$.

19 חשבו: $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$.

20 חשבו: $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$. (בתחום $x>1$)

21 חשבו: $\int \frac{x^2+1}{x}\,dx$. פצלו לשני שברים.

22 חשבו: $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x}\,dx$. (בתחום $x>0$)

23 חשבו: $\int \frac{x+1}{x}\,dx$.

24 חשבו: $\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$. אתגר: זהו את המכנה ואת הנגזרת שלו.

25 חשבו את האינטגרל המסוים: $\int_0^1 e^{2x}\,dx$.

26 חשבו את האינטגרל המסוים: $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$.

27 חשבו את האינטגרל המסוים: $\int_0^{\ln 2} e^x\,dx$.

28 חשבו את האינטגרל המסוים: $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}\,dx$.

29 חשבו את האינטגרל המסוים: $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$.

30 חשבו את האינטגרל המסוים: $\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx$.

31 מצאו פונקציה $F(x)$ כך ש- $F'(x)=e^{2x}$ ו- $F(0)=1$.

32 מצאו פונקציה $F(x)$ המוגדרת עבור $x>0$, כך ש- $F'(x)=\frac{1}{x}$ ו- $F(e)=3$.

33 הנגזרת של $f(x)$ היא $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, והגרף של $f(x)$ עובר בנקודה $(0,1)$. מצאו את $f(x)$.

34 מצאו את $a>0$ אם ידוע ש- $\int_0^a e^x\,dx=3$.

35 מצאו את $a>1$ אם ידוע ש- $\int_1^a \frac{1}{x}\,dx=2$.

36 **זיהוי מצב:** לכל אחד מהאינטגרלים קבעו את הטכניקה וחשבו: (א) $\int \frac{2x}{x^2+3}dx$ (ב) $\int \frac{2}{(x+3)^2}dx$ (ג) $\int 2xe^{x^2+3}dx$.

37 הראו ש- $(x\ln x-x)'=\ln x$, וחשבו בעזרת זה את $\int_1^e \ln x\,dx$.

✔ תשובות סופיות – נושא 8.1

1	$\frac{e^{3x}}{3}+C$
2	$\frac{e^{2x+1}}{2}+C$
3	$-5e^{-x}+C$
4	$2e^{\frac{x}{2}}+C$
5	$\frac{e^{x^2}}{2}+C$
6	$e^{x^2+x}+C$
7	$2e^{\sqrt{x}}+C$
8	$e^{x}-e^{-x}+C$
9	$x+\frac{e^{2x}}{2}+2e^{x}+C$
10	$\frac{(e^{x}+1)^4}{4}+C$
11	$-\frac{e^{1-2x}}{2}+C$
12	$\ln x+C$
13	$3\ln x+C$
14	$\frac{\ln(2x+1)}{2}+C$
15	$-4\ln(3-x)+C$
16	$\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2}+C$
17	$\ln\left(x^2-4\right)+C$
18	$\ln\left(e^{x}+1\right)+C$
19	$\frac{\ln^2 x}{2}+C$
20	$\ln(\ln x)+C$
21	$\frac{x^2}{2}+\ln x+C$
22	$\ln\left(x^3+2x\right)+C$

23 $x + \ln x + C$

24 $-\ln(1 + e^{-x}) + C$

25 $\frac{e^2-1}{2}$

26 1

27 1

28 2

29 $\frac{e-1}{2}$

30 $\ln 2$

31 $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{2}$

32 $F(x) = \ln x + 2$

33 $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 1$

34 $a = \ln 4$

35 $a = e^2$

36 (א) $\ln(x^2 + 3) + C$ (ב) $-\frac{2}{x+3} + C$ (ג) $e^{x^2+3} + C$

37 1

8.2 חישוב שטחים ואינטגרל צובר עם e ו-$\ln$

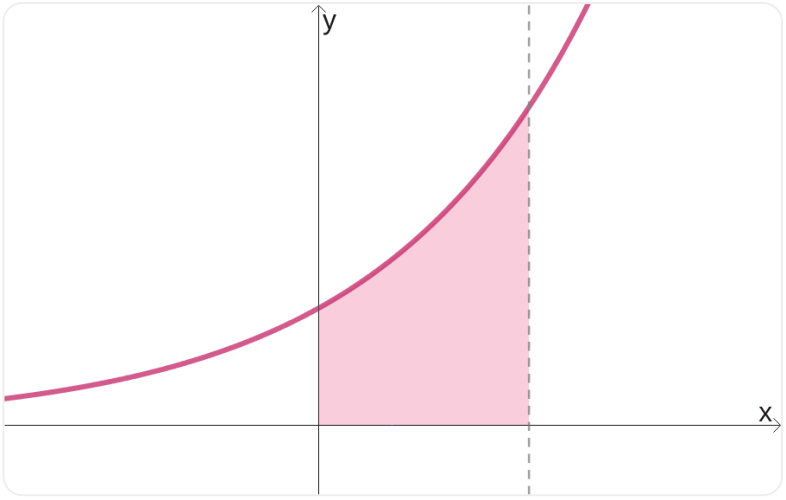
שטח בין שני גרפים: האינטגרל מ-a עד b של (הגרף העליון פחות הגרף התחתון). מוצאים את נקודות החיתוך, מסרטטים, ובודקים מי מעל מי בכל קטע. שטח מתחת לציר x – לוקחים בערך מוחלט. אינטגרל צובר: אם $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ אז $F'(x)=f(x)$ ו-$F(a)=0$.

צפו לפני שמתחילים:

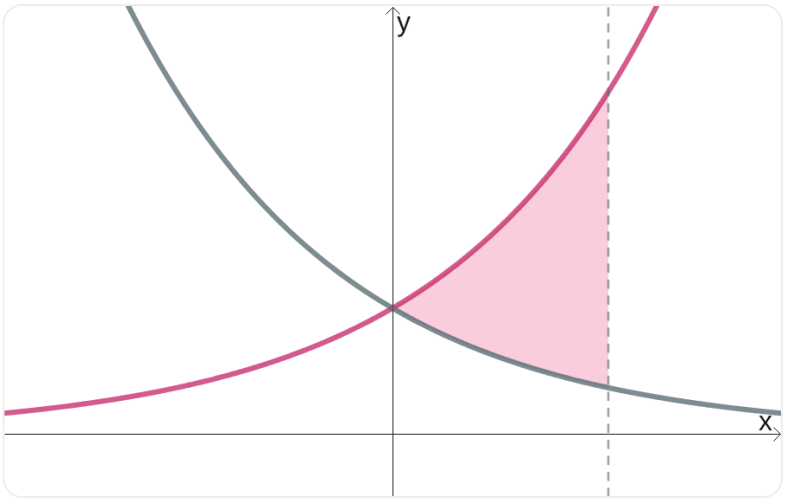
תרגול פונקציית $\ln$ – חקירה ואינטגרל
YouTube · 16:35

אינטגרל $\ln$ – הכל!
YouTube · 11:35

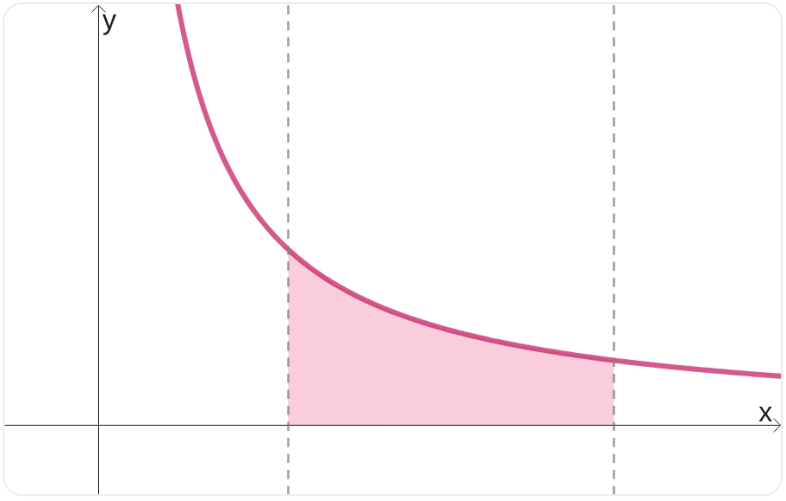
1 חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף $f(x)=e^x$, הצירים והישר $x=1$.



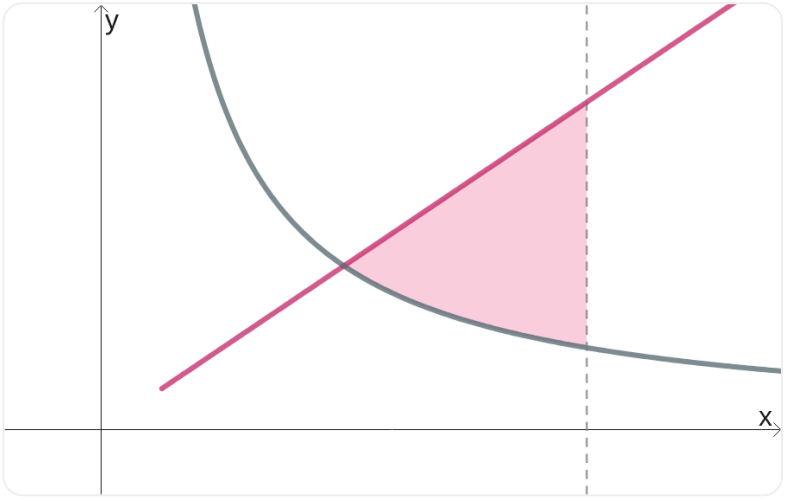
2 חשבו את השטח המוגבל בין הגרפים $y=e^{x}$ ו- $y=e^{-x}$ והישר $x=1$.



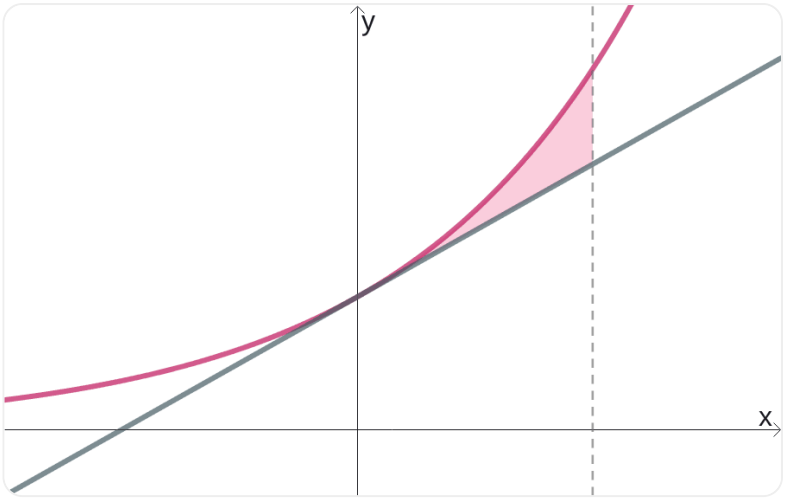
3 חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף $f(x)=\frac{1}{x}$, ציר x והישרים $x=1$, $x=e$.



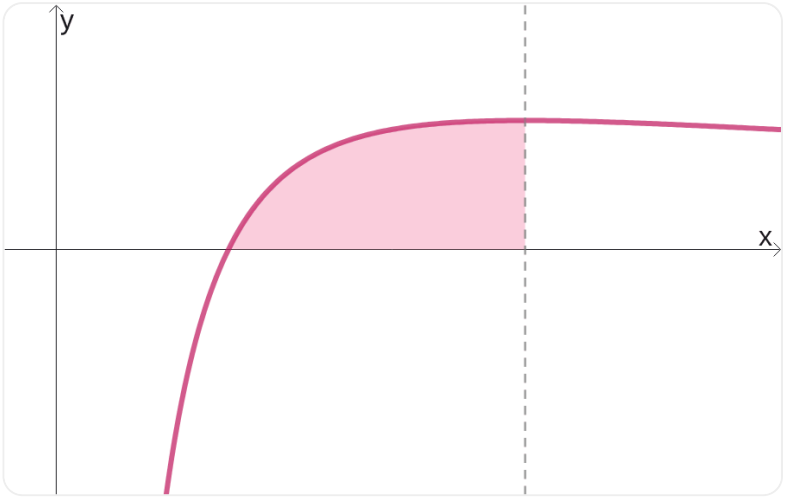
4 חשבו את השטח המוגבל בין הגרפים $y=x$ ו- $y=\frac{1}{x}$ והישר $x=2$.



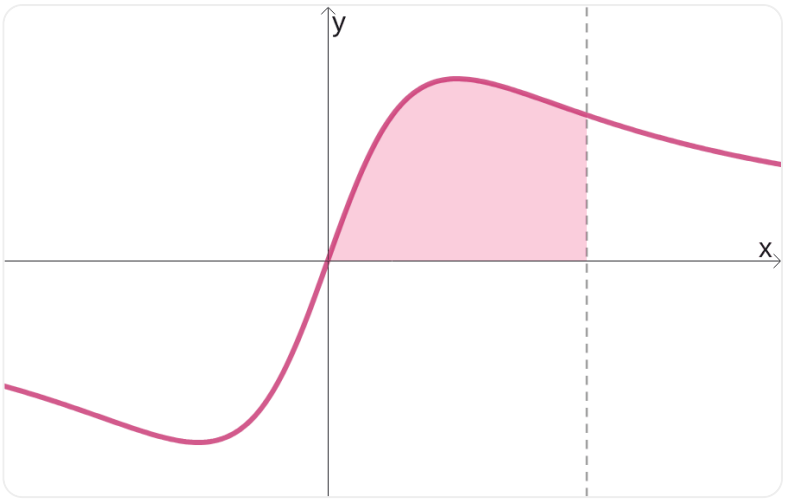
5 מעבירים משיק לגרף $f(x)=e^x$ בנקודה שבה $x=0$. חשבו את השטח המוגבל בין הגרף, המשיק והישר $x=1$.



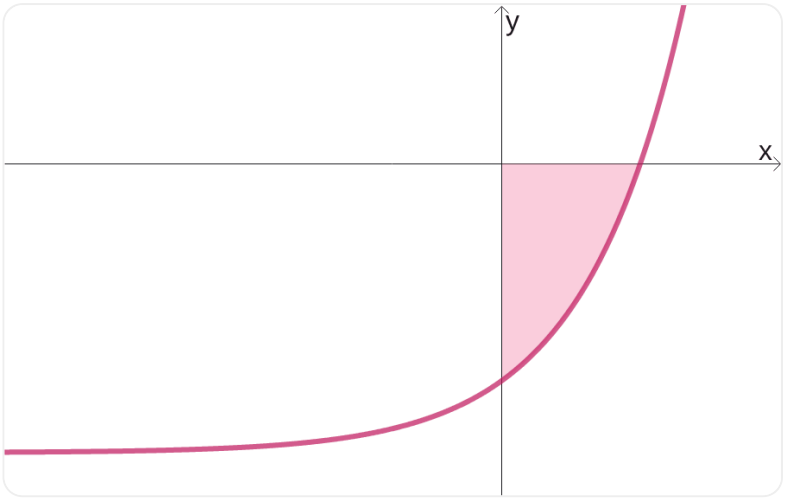
6 חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, ציר x והישר $x=e$.



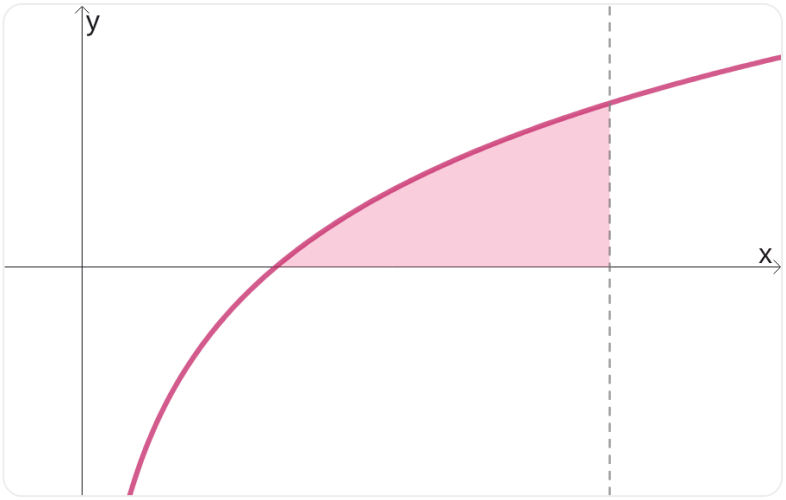
7 חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, ציר x והישר $x=2$.



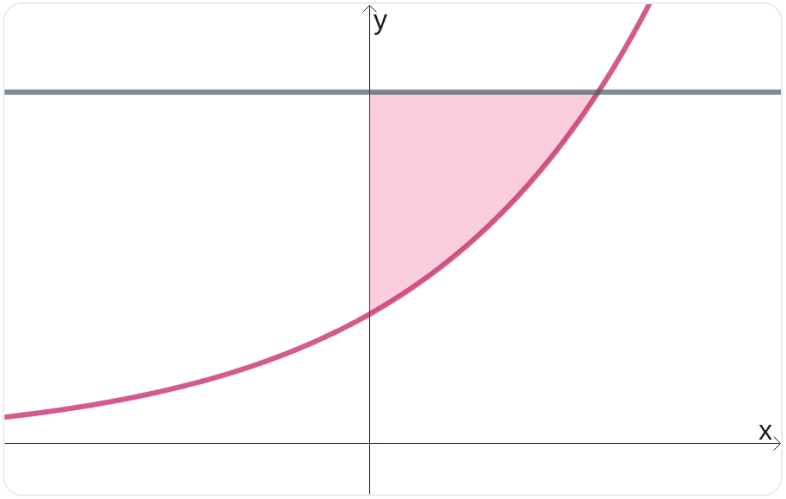
8 חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף $f(x)=e^{2x}-4$, ציר x וציר y.



9 חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף $f(x)=\ln x$, ציר x והישר $x=e$. (היעזרו בכך ש-$(x\ln x-x)'=\ln x$.)



10 חשבו את השטח המוגבל בין הגרפים $y=e^x$, $y=e$ וציר y.



11 חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף $f(x)=xe^{x^2}$, ציר x והישרים $x=-1$, $x=1$. (שימו לב: חלק מהשטח מתחת לציר!)

12 חשבו את השטח המוגבל בין הגרפים $y=\frac{4}{x}$ ו-$y=5-x$.

13 חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף $f(x)=\frac{1}{x-1}$, ציר x והישרים $x=2$, $x=e+1$.

14 חשבו את השטח המוגבל בין הגרפים $y=e^x$ ו-$y=e^{2-x}$ וציר y.

15 חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף $f(x)=e^{-x}$, הצירים והישר $x=\ln 3$.

16 חשבו את השטח המוגבל בין הגרף $y=\frac{2}{x}$, הישר $y=2$ והישר $x=4$.

17 חשבו את השטח המוגבל בין הגרף $y=e^x$, הישר $y=2$ וציר y.

18 חשבו את השטח המוגבל בין הגרפים $y=\frac{1}{x}$ ו- $y=\frac{1}{x^2}$ והישר $x=e$.

19 השטח המוגבל על ידי גרף $f(x)=e^x$, הצירים והישר $x=a$ $(a>0)$ שווה ל-2. מצאו את a.

20 השטח המוגבל על ידי $y=\frac{1}{x}$, ציר x והישרים $x=1$, $x=k$ $(k>1)$ שווה ל-3. מצאו את k.

21 השטח המוגבל על ידי $f(x)=ke^x$ $(k>0)$, הצירים והישר $x=\ln 2$ שווה ל-5. מצאו את k.

22 הישר $x=m$ מחלק את השטח שמתחת לגרף $y=\frac{1}{x}$ בין $x=1$ ל- $x=e^2$ לשני חלקים שווים. מצאו את m.

23 $F(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ עבור $x>0$. מצאו נוסחה מפורשת ל- $F(x)$.

24 $F(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{t}\,dt$. מצאו את $F(x)$ ואת $F(e^3)$.

25 $F(x)=\int_0^x (t-1)e^t\,dt$. מצאו את נקודת הקיצון של $F(x)$ וקבעו את סוגה (בלי לחשב את האינטגרל).

26 $F(x)=\int_0^x (e^t-2)\,dt$. מצאו את נקודת הקיצון של $F(x)$ ואת ערכה.

27 $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$. הראו ש- $F(x)$ עולה לכל x, ומצאו את $F(0)$.

28 $F(x)=\int_1^x \ln t\,dt$ עבור $x>0$. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $F(x)$ ואת נקודת הקיצון.

29 $F(x)=\int_0^x \frac{2t}{t^2+1}\,dt$. מצאו את $F(x)$ והראו שהיא זוגית.

30 $F(x)=\int_0^{2x} e^t\,dt$. מצאו את $F(x)$ ואת $F'(x)$.

31 $F(x)=\int_0^{x} te^{t^2}\,dt$. מצאו את $F(x)$, ואת נקודת הקיצון שלה.

✔ תשובות סופיות – נושא 8.2

1	$e-1$
2	$e+\frac{1}{e}-2$
3	1
4	$\frac{3}{2}-\ln 2$
5	המשיק $y=x+1$; השטח $e-\frac{5}{2}$
6	$\frac{1}{2}$
7	$\ln 5$
8	$4\ln 2-\frac{3}{2}$
9	1
10	1
11	$e-1$
12	$\frac{15}{2}-8\ln 2$
13	1
14	$(e-1)^2$
15	$\frac{2}{3}$
16	$6-4\ln 2$
17	$2\ln 2-1$
18	$\frac{1}{e}$
19	$a=\ln 3$
20	$k=e^3$
21	$k=5$
22	$m=e$
23	$F(x)=\ln x$

24 $F(x)=\frac{\ln^2 x}{2}$; $F(e^3)=\frac{9}{2}$

25 $x=1$ - מינימום ($F'(x)=(x-1)e^x$)

26 מינימום $(\ln 2,\ 1-2\ln 2)$

27 $F(0)=0$; $F'(x)=e^{-x^2}>0$

28 יורדת: $0<x<1$; עולה: $x>1$; מינימום $(1,0)$

29 $F(x)=\ln(x^2+1)$; $F(-x)=F(x)$

30 $F(x)=e^{2x}-1$; $F'(x)=2e^{2x}$

31 $F(x)=\frac{e^{x^2}-1}{2}$; מינימום $(0,0)$

פרק 8 סיכומון סוף פרק – אינטגרלים – e ו-$\ln$

אינטגרלים של e

- $\int e^x dx = e^x + C$;
  $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$.
- $\int g'(x) e^{g(x)} dx = e^{g(x)} + C$ – למשל
  $\int 2x e^{x^2} dx = e^{x^2} + C$.
- חסר מספר? מכפילים ומחלקים:
  $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$.

אינטגרלים שנותנים $\ln$

- $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ (עבור $x > 0$).
- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + C$.
- $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln g(x) + C$ – המונה הוא נגזרת המכנה.
- $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$ (נגזרת פנימית ליד חזקה).

זיהוי מצב

- $\frac{2x}{x^2+3}$ – מונה = נגזרת המכנה $\Rightarrow \ln$.
- $\frac{2}{(x+3)^2}$ – חזקה במכנה $\Rightarrow -\frac{2}{x+3}$, לא $\ln$!
- שבר עם מונה "גדול" – מפצלים:
  $\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$.
- ביטוי בריבוע – פותחים סוגריים לפני האינטגרל.

אינטגרל מסוים ושטח

- $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$; $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $e^{\ln a} = a$.
- שטח בין גרפים: (עליון פחות תחתון), בגבולות שבין נקודות החיתוך.
- שטח מתחת לציר x – לוקחים בערך מוחלט.
- תמיד מסרטטים סקיצה לפני שכותבים אינטגרל.

אינטגרל צובר

- $F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$, $F(a) = 0$.
- קיצון של $F(x)$: היכן ש-$f(x) = 0$ ומחליפה סימן – בלי לחשב אינטגרל!

שאלות עם פרמטר

- מחשבים את השטח כביטוי בפרמטר, משווים לנתון ופותרים ($a = \ln 3$, $k = e^3$...).

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- $\int \frac{1}{2x+1} dx = \ln(2x+1)$ – שכחו לחלק ב-2.
- $\int e^{3x} dx = 3e^{3x}$ – הכפילו במקום לחלק.
- לכתוב $\ln$ לכל שבר – רק כשהמונה הוא (כפולה של) נגזרת המכנה.
- לחסר שטחים בלי לבדוק איזה גרף עליון בכל קטע.

💡 **הטיפ של אילון:** אחרי כל אינטגרל לא מסוים – גזרו את התשובה בראש. אם קיבלתם בחזרה את מה שהיה בתוך האינטגרל, אתם בטוחים במאה אחוז.

פרק 9

גדילה ודעיכה

תהליכים מעריכיים – ריבית, אוכלוסיות, חומרים רדיואקטיביים ותרופות

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

9.1 גדילה ודעיכה 36 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



גדילה ודעיכה במתמטיקה – הסבר מלא ופתרון שאלות בגרות

YouTube · 25:26



גדילה ודעיכה – תרגול והסברים

YouTube · 6:20

9.1 גדילה ודעיכה

תהליך מעריכי: $N(t) = N_0 \cdot q^t$, כאשר t נמדד ביחידת הזמן של התהליך עצמו. גדילה ב-$p\%$: $q = 1 + \frac{p}{100}$; דעיכה ב-$p\%$: $q = 1 - \frac{p}{100}$. בתהליך עם e: $N(t) = N_0 e^{kt}$. כדי למצוא זמן – מוציאים $\ln$ משני האגפים.

צפו לפני שמתחילים:



גדילה ודעיכה – הסבר מלא ופתרון שאלות בגרות
YouTube · 25:26



גדילה ודעיכה – תרגול והסברים
YouTube · 6:20

1 במושבה יש 500 חיידקים, ומספרם מוכפל פי 2 בכל שעה. נסמן ב-t את מספר השעות. כתבו ביטוי למספר החיידקים $N(t)$, ומצאו את מספרם אחרי 6 שעות.

2 אוכלוסייה של 200 פרטים גדלה פי 3 בכל 4 שעות. נסמן ב-t את מספר פרקי הזמן של 4 שעות. כתבו את $N(t)$ ומצאו את גודל האוכלוסייה אחרי 12 שעות.

3 סכום של $10{,}000$ ש"ח הופקד בריבית שנתית של 5%. נסמן ב-t את מספר השנים. כמה כסף יהיה בחשבון אחרי 10 שנים?

4 ערכה של מכונית, שעלתה $120{,}000$ ש"ח, יורד ב-12% בכל שנה. מה יהיה ערכה אחרי 5 שנים?

5 כמות של חומר רדיואקטיבי, 80 גרם, קטנה פי 2 בכל 8 ימים. נסמן ב-t את מספר פרקי הזמן של 8 ימים. כמה גרם יישארו אחרי 40 יום?

6 בהמשך לתרגיל הקודם: אחרי כמה ימים יישארו 5 גרם מהחומר?

7 כמות גדלה באופן מעריכי מ-400 ל-900 בתוך שנתיים. נסמן ב-t את מספר השנים. מצאו את גורם הגדילה השנתי ואת אחוז הגדילה השנתי.

8 כמות קטנה באופן מעריכי מ-1000 ל-640 בתוך שעתיים. נסמן ב-t את מספר השעות. מצאו את אחוז הדעיכה לשעה.

9 כסף מושקע בריבית שנתית של 8%. נסמן ב-t את מספר השנים. אחרי כמה שנים הסכום יוכפל? (דייקו עד שתי ספרות אחרי הנקודה.)

10 כמות חיידקים מתוארת על ידי $N(t)=N_0e^{kt}$, כאשר t בשעות. ידוע ש-$N(0)=300$ ו-$N(2)=1200$. מצאו את k ואת $N(5)$.

11 מסת חומר נתונה על ידי $M(t)=50e^{-0.2t}$, כאשר t בדקות. אחרי כמה דקות תהיה המסה 10 גרם?

12 מסת חומר נתונה על ידי $M(t)=M_0e^{-0.05t}$, כאשר t בשנים. מצאו את זמן מחצית החיים.

13 כמות A נתונה על ידי $A(t)=1000\cdot 1.2^t$ וכמות B על ידי $B(t)=4000\cdot 0.8^t$, כאשר t בשנים. אחרי כמה שנים תהיינה הכמויות שוות?

14 כמות גדלה באופן מעריכי. אחרי 3 שעות היו 540 יחידות, ואחרי 5 שעות 1215 יחידות. נסמן ב-t את מספר השעות. מצאו את גורם הגדילה לשעה ואת הכמות ההתחלתית.

15 כמות גדלה ב-33.1% בכל 3 שעות. נסמן ב-t את מספר פרקי הזמן של 3 שעות, וב-k את מספר השעות. כתבו את הכמות כפונקציה של t וכפונקציה של k, ומצאו את אחוז הגדילה לשעה.

16 ההפרש בין טמפרטורת כוס תה לטמפרטורת החדר (20°) קטן ב-10% בכל דקה. בהתחלה התה בטמפרטורה 90°. נסמן ב-t את מספר הדקות. מה טמפרטורת התה אחרי 10 דקות?

17 חולה קיבל 400 מ"ג תרופה, ובכל שעה הגוף מפנה 25% מהכמות שנותרה. נסמן ב-t את מספר השעות. כמה מ"ג נותרו אחרי 3 שעות?

18 בהמשך לתרגיל הקודם: אחרי כמה שעות שלמות תרד כמות התרופה אל מתחת ל-100 מ"ג?

19 כמות תרופה בגוף קטנה ב-25% בכל שעה. אחרי 4 שעות נותרו 162 מ"ג. מה הייתה הכמות ההתחלתית?

20 שתי הצעות חיסכון ל-10 שנים: (א) 6% לשנה, כאשר t בשנים; (ב) 3% לכל חצי שנה, כאשר k הוא מספר חצאי השנים. איזו הצעה משתלמת יותר?

21 אוכלוסיית עיר, 2 מיליון תושבים, קטנה ב-2% בשנה. נסמן ב-t את מספר השנים. אחרי כמה שנים שלמות תרד האוכלוסייה מתחת ל-1.5 מיליון?

22 כמות מתוארת על ידי $N(t)=N_0e^{0.3t}$, כאשר t בימים. בכמה אחוזים היא גדלה בכל יום?

23 זמן מחצית החיים של חומר הוא 5 שנים. נסמן ב-t את מספר פרקי הזמן של 5 שנים. אחרי כמה שנים יישאר 1% מהכמות ההתחלתית?

24 מחיר מניה עלה ב-10% בכל יום במשך 5 ימים, ואחר כך ירד ב-10% בכל יום במשך 5 ימים. האם המחיר חזר למחיר ההתחלתי? בכמה אחוזים השתנה?

25 גרף הפונקציה $N(t)=a\cdot b^t$ עובר בנקודות $(0,200)$ ו-$(2,450)$. מצאו את a ואת b.

26 כמות A מוכפלת בכל 3 שנים, וכמות B גדלה ב-25% בכל שנה. נסמן ב-t את מספר פרקי הזמן של 3 שנים עבור A, וב-k את מספר השנים עבור B. איזו כמות גדלה מהר יותר? נמקו.

27 אחרי 30 יום נותרו 75% מכמות של חומר רדיואקטיבי. נסמן ב-t את מספר הימים. מצאו את זמן מחצית החיים.

28 אוכלוסיית דגים גדלה ב-20% בכל חודש. נסמן ב-t את מספר החודשים. אחרי כמה חודשים שלמים האוכלוסייה תהיה גדולה פי 5 מההתחלתית?

29 שטח של אצות בבריכה מוכפל בכל יום, והבריכה מתכסה כולה ביום ה-20. נסמן ב-t את מספר הימים. באיזה יום הייתה הבריכה מכוסה בחציה? ומתי ברבע שלה?

30 כמות $P(t)=P_0e^{kt}$, כאשר t בשעות, גדלה פי 3 בתוך 6 שעות. מצאו את k, ואחרי כמה שעות הכמות תגדל פי 9.

31 כמות קטנה באופן מעריכי, ובתוך 3 שעות ירדה ב-48.8%. נסמן ב-t את מספר השעות. מצאו את אחוז הירידה לשעה.

32 $A(t)=900\cdot 0.5^t$ ו- $B(t)=100\cdot 2^t$, כאשר t בשעות. מתי יהיו הכמויות שוות? מה תהיה אז הכמות?

33 בטבלה נתונה כמות N כפונקציה של הזמן t (בשעות):

N	t
64	0
48	1
36	2

הראו שהדעיכה מעריכית, ומצאו את $N(4)$.

34 כמות מתוארת על ידי $N(t)=600e^{-kt}$, כאשר t בדקות, ואחרי 10 דקות נותרו 150 יחידות. מצאו את k ואת זמן מחצית החיים.

35 הוכיחו שבתהליך מעריכי $N(t)=N_0q^t$ הזמן הנדרש להכפלת הכמות אינו תלוי בכמות ההתחלתית.

36 זמן מחצית החיים של חומר הוא שעה אחת. נסמן ב-t את מספר השעות. איזה חלק מהכמות ההתחלתית יישאר אחרי 5 שעות, ואחרי כמה שעות יישאר פחות מאלפית ממנה?

✔ תשובות סופיות – נושא 9.1

1. $N(t) = 500 \cdot 2^t$; $32{,}000$
2. $N(t) = 200 \cdot 3^t$; אחרי 12 שעות ; $t = 3$: $5{,}400$
3. $M(t) = 10000 \cdot 1.05^t$; $16{,}288.95$ ש"ח
4. $63{,}327.83$ ש"ח
5. $m(t) = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$; $t = 5$: 2.5 גרם
6. $t = 4$; אחרי 32 ימים
7. $q = 1.5$; 50% בשנה
8. $q = 0.8$; 20% לשעה
9. $t = \frac{\ln 2}{\ln 1.08} \approx 9.01$ שנים
10. $k = \ln 2 \approx 0.693$; $N(5) = 9600$
11. $t = \frac{\ln 5}{0.2} \approx 8.05$
12. $t = \frac{\ln 2}{0.05} \approx 13.86$ שנים
13. $1.5^t = 4$; $t \approx 3.42$
14. $q = 1.5$; $N_0 = 160$
15. $N(t) = N_0 \cdot 1.331^t$; $N(k) = N_0 \cdot 1.1^k$; 10% לשעה
16. $T(t) = 20 + 70 \cdot 0.9^t$; 44.41°
17. 168.75 מ"ג
18. $t > \frac{\ln 0.25}{\ln 0.75} \approx 4.82$; אחרי 5 שעות
19. 512 מ"ג
20. (א) גורם 1.79 ; (ב) גורם 1.81 – הצעה (ב)
21. $t \approx 14.24$; אחרי 15 שנים
22. $e^{0.3} - 1 \approx 34.99\%$
23. $t = \frac{\ln 0.01}{\ln 0.5} \approx 6.64$; כ-33.22 שנים

24 לא ; גורם $0.99^5 \approx 0.95$ – ירידה של כ-4.9%

25 $a = 200$, $b = 1.5$

26 A: גורם שנתי $2^{1/3} \approx 1.26 > 1.25$ – A גדלה מהר יותר

27 $\approx$ 72.28 ימים

28 $t \approx 8.83$; אחרי 9 חודשים

29 יום 19 ; יום 18

30 $k = \frac{\ln 3}{6} \approx 0.18$; אחרי 12 שעות

31 $q^3 = 0.512$; $q = 0.8$; 20% לשעה

32 $4^t = 9$; $t = \log_4 9 \approx 1.58$; הכמות 300

33 $q = 0.75$ קבוע ; $N(4) = 20.25$

34 $k = \frac{\ln 4}{10} \approx 0.14$; מחצית חיים 5 דקות

35 $N_0 q^t = 2N_0 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln q}$ – בלי N_0

36 $\frac{1}{32}$; אחרי 10 שעות ($2^{10} = 1024 > 1000$)

פרק 9 סיכומון סוף פרק – גדילה ודעיכה

המודל

- $N(t) = N_0 \cdot q^t$ – N_0 הכמות ההתחלתית, q גורם השינוי ליחידת זמן אחת.
- t נמדד ביחידת הזמן של התהליך עצמו: אם הכמות מוכפלת כל 3 שעות – כל עלייה של 1 ב-t היא 3 שעות.
- תהליך עם קצב אחר – מגדירים משתנה זמן חדש (למשל k) באותה שיטה.

גדילה ודעיכה באחוזים

- גדילה ב-$p\%$: $q = 1 + \frac{p}{100}$; דעיכה ב-$p\%$: $q = 1 - \frac{p}{100}$.
- פי 2 – $q = 2$; מחצית – $q = \frac{1}{2}$.
- אחוז השינוי: $(q-1)\cdot 100\%$.

מציאת זמן

- $N_0 q^t = N \Rightarrow q^t = \frac{N}{N_0} \Rightarrow t = \frac{\ln(N/N_0)}{\ln q}$.
- זמן הכפלה: $t = \frac{\ln 2}{\ln q}$; מחצית חיים: $t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln q}$ – לא תלויים ב-N_0.
- «אחרי כמה שנים שלמות» – מעגלים כלפי מעלה.

מציאת q ו-N_0

- משתי מדידות: $\frac{N(t_2)}{N(t_1)} = q^{t_2 - t_1}$.
- אחרי שמצאנו q: $N_0 = \frac{N(t_1)}{q^{t_1}}$.

המודל עם e

- $N(t) = N_0 e^{kt}$; $k > 0$ גדילה, $k < 0$ דעיכה.
- $k = \frac{\ln(N/N_0)}{t}$; הגורם ליחידת זמן: $q = e^k$.

השוואה בין תהליכים

- משווים את שתי הנוסחאות ומוציאים $\ln$.
- להשוות מהירות – משווים את גורם השינוי לאותה יחידת זמן.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- להציב שעות כשה-t מוגדר בפרקי זמן של 3 שעות (או להפך).
- ירידה של 20% היא $q = 0.8$, לא $q = 0.2$.
- עלייה של 10% ואחריה ירידה של 10% לא מחזירה לנקודת ההתחלה.
- לשכוח לבדוק אם השאלה מבקשת זמן מדויק או מספר שלם של יחידות.

💡 **הטיפ של אילון:** לפני שכותבים נוסחה – כתבו במילים מהי יחידת הזמן של t. שורה אחת כזאת חוסכת חצי מהטעויות בשאלות האלה.

פרק 10

נוספים – בסיסים וטרנספורמציות כפולות

מעבר בין בסיסים, גזירה של a^x ו-$\log_a x$, והרכבה של e ו-$\ln$ על פונקציה

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

10.1 **בסיסים – מעבר בסיס בלוגריתמים והפונקציות** a^x **ו-** $\log_a x$ — 34 תרגילים

10.2 **טרנספורמציות כפולות –** $e^{f(x)}$ **ו-** $\ln f(x)$ — 39 תרגילים

סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

חקירת פונקציות – טרנספורמציה e(fx)
YouTube · 7:56

חקירת פונקציות – טרנספורמציה ln(fx)
YouTube · 7:44

פונקציה לוגריתמית (ln) – מיקוד לבגרות
YouTube · 4:57

פתרון משוואות מעריכיות עם בסיס e
YouTube · 12:43

10.1 בסיסים – מעבר בסיס בלוגריתמים והפונקציות a^x ו- $\log_a x$

מעבר בסיס: $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$. כל מספר חיובי אפשר לכתוב בבסיס e: $a^x = e^{x \ln a}$. לכן $(a^x)' = a^x \ln a$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ו- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

צפו לפני שמתחילים:



פתרון משוואות מעריכיות עם בסיס e

YouTube · 12:43



פתרון משוואות לן בסיסיות

YouTube · 6:09

1. חשבו: $\log_2 8 + \log_3 81$.
2. חשבו: $\log_4 32$.
3. חשבו: $\log_9 27$.
4. חשבו: $\log_3 8 \cdot \log_2 3$ (רמז: מעבר לבסיס e).
5. בטאו את $\log_5 12$ בעזרת $\ln$, וחשבו בקירוב.
6. פתרו את המשוואה $2^x = 7$.
7. פתרו את המשוואה $3^{x+1} = 5^x$.
8. פתרו את המשוואה $\log_2 x + \log_4 x = 6$.
9. פתרו את המשוואה $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 11$.
10. פתרו את המשוואה $\log_x 16 = 4$.
11. פתרו את המשוואה $\log_x 8 = \frac{3}{2}$.

12 פשטו: $\log_2 x \cdot \log_x 16$ (עבור $x > 0$, $x \neq 1$).

13 פתרו את המשוואה $\log_2(x+1) = \log_4(x+7)$.

14 פתרו את המשוואה $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$.

15 פתרו את המשוואה $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$.

16 גזרו: $f(x) = 2^x$.

17 גזרו: $f(x) = 5^{3x}$.

18 גזרו: $f(x) = \log_3 x$.

19 גזרו: $f(x) = \log_2(x^2+1)$.

20 מצאו את הפונקציה הקדומה הכללית של $f(x) = 2^x$.

21 חשבו: $\int_0^1 3^x \, dx$.

22 מצאו את משוואת המשיק לגרף $y = 2^x$ בנקודה שבה $x = 0$.

23 לאילו ערכים של a ($a > 0$, $a \neq 1$) הפונקציה $f(x) = a^x$ יורדת? נמקו בעזרת הנגזרת.

24 הראו כי $e^{x \ln 3} = 3^x$, וחשבו את $e^{2 \ln 5}$.

25 חשבו: $\ln e^7 + e^{\ln 4}$.

26 חשבו: $\log 2 + \log 50$ (בסיס 10).

27 פתרו את אי-השוויון $\log_2 x > 3$.

28 פתרו את אי-השוויון $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8$.

29 פתרו את המשוואה $2^x = 3^{x-1}$.

30 מצאו את נקודת הקיצון של $f(x) = x \cdot 2^{-x}$ וקבעו את סוגה.

31 מצאו את נקודת הקיצון של $f(x) = \log_2 x - x$ וקבעו את סוגה.

32 ידוע ש-$\log_a b = 3$. חשבו את $\log_b a$ ואת $\log_{a^2} b$.

33 שאלת 100: פתרו את המשוואה $x^{\log_2 x} = 16$.

34 שאלת 100: מצאו את שטח התחום הכלוא בין גרף $y = 2^x$, גרף $y = 4^x$ והישר $x = 1$.

✔ תשובות סופיות – נושא 10.1

1	7
2	$\frac{5}{2}$
3	$\frac{3}{2}$
4	3
5	$\frac{\ln 12}{\ln 5} \approx 1.544$
6	$x = \frac{\ln 7}{\ln 2} \approx 2.807$
7	$x = \frac{\ln 3}{\ln 5 - \ln 3} \approx 2.151$
8	$x = 16$
9	$x = 729$
10	$x = 2$
11	$x = 4$
12	4
13	$x = 2$ (הפתרון $x = -3$ נפסל)
14	$x = 2$
15	$x = 0$ או $x = 2$
16	$f'(x) = 2^x \ln 2$
17	$f'(x) = 3 \ln 5 \cdot 5^{3x}$
18	$f'(x) = \frac{1}{x \ln 3}$
19	$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)\ln 2}$
20	$\frac{2^x}{\ln 2} + C$
21	$\frac{2}{\ln 3} \approx 1.82$
22	$y = x \ln 2 + 1$
23	$f'(x) = a^x \ln a < 0$ כי $0 < a < 1$,

24	$e^{2\ln 5}=25$
25	11
26	2
27	$x>8$
28	$x<-3$
29	$x=\frac{\ln 3}{\ln 3-\ln 2}\approx 2.71$
30	$x=\frac{1}{\ln 2}$ - מקסימום ; $y=\frac{1}{e\ln 2}$
31	$x=\frac{1}{\ln 2}$ - מקסימום
32	$\frac{3}{2}$; $\frac{1}{3}$
33	$x=4$ או $x=\frac{1}{4}$
34	$\frac{3}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{2\ln 2}\approx 0.721$

10.2 טרנספורמציות כפולות – $e^{f(x)}$ ו- $\ln f(x)$

$e^{f(x)}$: מוגדרת היכן ש-$f(x)$ מוגדרת, תמיד חיובית, ועולה/יורדת יחד עם $f(x)$ – אותן נקודות קיצון. $\ln f(x)$: מוגדרת רק היכן ש-$f(x) > 0$; היכן ש-$f(x) \to 0^+$ יש אסימפטוטה אנכית; וגם היא עולה/יורדת יחד עם $f(x)$.

צפו לפני שמתחילים:



חקירת פונקציות – טרנספורמציה e(fx)
YouTube · 7:56

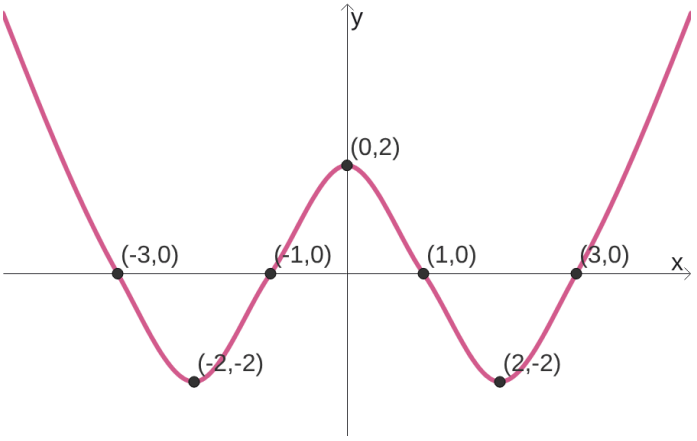


חקירת פונקציות – טרנספורמציה ln(fx)
YouTube · 7:44



תחום הגדרה ln
YouTube · 6:29

תרגילים 1–12 בציור גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. בשני הקצוות הגרף עולה לאינסוף. נקודות הקיצון: $(-2,-2)$, $(0,2)$, $(2,-2)$; נקודות החיתוך עם ציר x: $x=\pm 1$, $x=\pm 3$.



גרף הפונקציה $f(x)$

1. $g(x)=e^{f(x)}$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגן.
2. $g(x)=e^{f(x)}$. מהו תחום הערכים של $g(x)$? האם יש לגרף אסימפטוטה אופקית?
3. $g(x)=e^{f(x)}$. מצאו את כל הנקודות שבהן $g(x)=1$.
4. $h(x)=\ln f(x)$. מצאו את תחום ההגדרה של $h(x)$.

5 $h(x)=\ln f(x)$. מצאו את האסימפטוטות האנכיות של $h(x)$.

6 $h(x)=\ln f(x)$. מצאו את נקודת הקיצון של $h(x)$ וקבעו את סוגה.

7 $h(x)=\ln f(x)$. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $h(x)$.

8 $k(x)=\ln(f(x)+3)$. הראו ש-$k(x)$ מוגדרת לכל x, ומצאו את נקודות הקיצון שלה.

9 $k(x)=\ln(f(x)+3)$. כמה נקודות משותפות יש לגרף $k(x)$ ולציר x? האם הוא חותך או משיק?

10 $p(x)=e^{-f(x)}$. מצאו את נקודות הקיצון של $p(x)$ וקבעו את סוגן.

11 לאילו ערכי m יש למשוואה $e^{f(x)}=m$ בדיוק שני פתרונות?

12 $q(x)=f(e^x)$. מצאו את נקודות החיתוך של $q(x)$ עם ציר x ואת נקודת הקיצון שלה.

13 $g(x)=e^{x^2-4x}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

14 $g(x)=e^{x^2-4x}$. מהו תחום הערכים של $g(x)$?

15 $h(x)=\ln(x^2-4x+3)$. מצאו את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטות האנכיות.

16 $h(x)=\ln(x^2-4x+3)$. מצאו את נקודות החיתוך עם ציר x. האם יש ל-$h(x)$ נקודת קיצון?

17 $h(x)=\ln(x^2+1)$. מצאו את תחום ההגדרה ואת נקודת הקיצון. האם הפונקציה זוגית?

18 $g(x)=e^{-x^2}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת האסימפטוטה האופקית.

19 $g(x)=e^{-x^2}$. מצאו את נקודות הפיתול של $g(x)$.

20 $h(x)=\ln(4-x^2)$. מצאו את תחום ההגדרה, את האסימפטוטות האנכיות ואת נקודת הקיצון.

21 $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטה האופקית. מה קורה כאשר $x\to 0^+$ וכאשר $x\to 0^-$?

22 $h(x)=\ln(\ln x)$. מצאו את תחום ההגדרה ואת הנגזרת.

23 מהו תחום ההגדרה של $e^{\ln x}$? ושל $\ln e^x$? פשטו כל אחת מהן.

24 $g(x)=e^{x^3-3x}$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגן.

25 $h(x)=\ln|x-2|$. מצאו את תחום ההגדרה ואת נקודות החיתוך עם ציר x.

26 $f(x)=x^2-6x+8$. מצאו את תחום ההגדרה של $\ln f(x)$ ואת נקודת הקיצון של $e^{f(x)}$.

27 לאילו ערכים של k הישר $y=k$ חותך את גרף $g(x)=e^{x^2-2x}$ בדיוק בנקודה אחת?

28 נקודת המינימום של $g(x)=e^{x^2-2ax}$ היא בנקודה שבה $x=3$. מצאו את a ואת שיעור ה-y של המינימום.

29 לאילו ערכים של a הפונקציה $h(x)=\ln(x^2-2x+a)$ מוגדרת לכל x?

30 חשבו: $\int 2x\,e^{x^2}\,dx$ ו-$\int_0^1 2x\,e^{x^2}\,dx$.

31 חשבו: $\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$.

32 הוכיחו: אם $f(x)>0$ בתחום, אז ל-$\ln f(x)$ ול-$f(x)$ יש אותן נקודות קיצון (באותם ערכי x) מאותו סוג.

33 הוכיחו: ל-$e^{f(x)}$ ול-$f(x)$ יש אותם תחומי עלייה וירידה.

34 $g(x)=e^{2x}-4e^x$. מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)$ (רמז: $t=e^x$).

35 $h(x)=\ln(e^x+1)$. הראו ש-$h(x)$ עולה לכל x, ומצאו את האסימפטוטה האופקית שלה.

36 שאלת 100: $f(x)=x^2-2x$. שרטטו בלי חקירה נוספת את $g(x)=\ln(f(x)+2)$ בעזרת $f(x)$, ומצאו לאילו ערכי k הישר $y=k$ חותך אותה בדיוק פעם אחת.

37 שאלת 100: הראו שלכל x מכפלת הערכים של $y=e^{x^2-1}$ ושל $y=e^{1-x^2}$ שווה ל-1, ומצאו את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

38 שאלת 100: הוכיחו שלכל פונקציה $f(x)$ מתקיים $e^{f(x)}\geq 1+f(x)$ (רמז: חקרו את $t\mapsto e^t-1-t$).

39 שאלת 100: $g(x)=\ln(x^2+a)-\ln a$, $a>0$. הראו שגרף $g(x)$ עובר בראשית לכל a, ומצאו את a אם $g(2)=\ln 2$.

✔ תשובות סופיות – נושא 10.2

1. $(-2,e^{-2})$ מינימום, $(0,e^{2})$ מקסימום, $(2,e^{-2})$ מינימום
2. $y\geq e^{-2}$; אין (בשני הקצוות $g(x)\to\infty$)
3. $x=\pm1$, $x=\pm3$
4. $x<-3$ או $-1<x<1$ או $x>3$
5. $x=\pm1$, $x=\pm3$
6. $(0,\ln 2)$ – מקסימום
7. עלייה: $-1<x<0$, $x>3$; ירידה: $x<-3$, $0<x<1$
8. $f(x)+3\geq 1>0$; $(\pm2,0)$ מינימום, $(0,\ln 5)$ מקסימום
9. שתיים – $(\pm2,0)$, משיק
10. $(-2,e^{2})$ מקסימום, $(0,e^{-2})$ מינימום, $(2,e^{2})$ מקסימום
11. $m>e^{2}$ או $m=e^{-2}$
12. $x=0$ ($e^{x}=1$), $x=\ln 3$; מינימום $(\ln 2,-2)$
13. $(2,e^{-4})$ מינימום ; ירידה $x<2$, עלייה $x>2$
14. $y\geq e^{-4}$
15. $x<1$ או $x>3$; $x=1$, $x=3$
16. $(2-\sqrt{2},0)$, $(\sqrt{2}+2,0)$; אין – הקודקוד $x=2$ אינו בתחום
17. לכל x ; $(0,0)$ מינימום ; זוגית
18. $(0,1)$ מקסימום ; $y=0$
19. $(-\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}})$
20. $-2<x<2$; $x=\pm2$; $(0,\ln 4)$ מקסימום
21. $x\neq 0$; $y=1$; $x\to 0^{+}:g(x)\to\infty$, $x\to 0^{-}:g(x)\to 0$
22. $x>1$; $h'(x)=\frac{1}{x\ln x}$
23. $x>0$ עבור $e^{\ln x}=x$; לכל x $\ln e^{x}=x$

24 $(-1,e^2)$ מקסימום, $(1,e^{-2})$ מינימום

25 $x\neq 2$; $(1,0)$, $(3,0)$

26 $x<2$ או $x>4$; $(3,e^{-1})$ מינימום

27 $k=e^{-1}$

28 $a=3$; $y=e^{-9}$

29 $a>1$

30 $e^{x^2}+C$; $e-1$

31 $\ln 5$

32 $(\ln f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}$ ו- $f(x)>0$ - אותו סימן כמו $f'(x)$

33 $(e^{f(x)})'=f'(x)e^{f(x)}$ ו- $e^{f(x)}>0$

34 $(\ln 2,-4)$ מינימום

35 $h'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}>0$; $y=0$ (כאשר $x\to-\infty$)

36 $g(x)=\ln((x-1)^2+1)$; מינימום $(1,0)$; $k=0$

37 $e^{x^2-1}\cdot e^{1-x^2}=e^0=1$; $(-1,1)$, $(1,1)$

38 e^t-1-t מינימום 0 ב- $t=0$

39 $g(0)=0$; $\frac{4+a}{a}=2\Rightarrow a=4$

פרק 10 סיכומון סוף פרק – נוספים – בסיסים וטרנספורמציות כפולות

מעבר בסיס

- $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$; $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$.
- $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$; $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$.
- משוואה עם בסיסים שונים – מעבירים הכול לבסיס אחד.

כל מספר בבסיס e

- $a = e^{\ln a}$ ולכן $a^x = e^{x\ln a}$.
- $e^{\ln x} = x$ רק עבור $x > 0$; $\ln e^x = x$ לכל x.

גזירה ואינטגרציה

- $(a^x)' = a^x \ln a$; $(a^{g(x)})' = a^{g(x)} \ln a \cdot g'(x)$.
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.
- $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

משוואות מעריכיות

- $a^x = b \Rightarrow x = \frac{\ln b}{\ln a}$.
- 4^x, 9^x – משתנה עזר $t = 2^x$ או $t = 3^x$, ולזכור ש-$t > 0$.

$e^{f(x)}$

- מוגדרת היכן ש-$f(x)$ מוגדרת, ותמיד חיובית.
- $(e^{f(x)})' = f'(x)e^{f(x)}$ – אותן נקודות קיצון ואותם תחומי עלייה וירידה כמו $f(x)$.
- כאשר $f(x) \to -\infty$ אז $e^{f(x)} \to 0$ – אסימפטוטה $y = 0$; כאשר $f(x) = 0$ אז $e^{f(x)} = 1$.

$\ln f(x)$

- מוגדרת רק היכן ש-$f(x) > 0$.
- כאשר $f(x) \to 0^+$ אז $\ln f(x) \to -\infty$ – אסימפטוטה אנכית.
- $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ – קיצון רק בנקודות קיצון של $f(x)$ שבתחום.
- $\ln f(x) = 0$ היכן ש-$f(x) = 1$.

אינטגרלים מוכרים

- $\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C$; $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לחשוב ש-$\ln f(x)$ מוגדרת בכל התחום של $f(x)$ – רק היכן ש-$f(x) > 0$.
- לשכוח את $\ln a$ בנגזרת של a^x.
- במשתנה עזר $t = 2^x$ להשאיר פתרון $t \le 0$.
- לחפש ב-$e^{f(x)}$ נקודות קיצון חדשות – אין, הן של $f(x)$.

💡 **הטיפ של אילון:** בטרנספורמציה כפולה לא חוקרים מאפס: עוברים על הנקודות המיוחדות של $f(x)$ ושואלים מה e או $\ln$ עושים לכל אחת מהן.