LEVELUP

מתמטיקה בחוויה אחרת ÷ √ × π

קורס בגרות במתמטיקה · 5 יחידות

מחברת הקורס

שאלון 571

כל נושאי הקורס המלא – תרגול מדורג לכל נושא, תשובות סופיות,
סרטוני הסבר מהערוץ והמחשות אינטראקטיביות

2,441	70	24	221
תרגילים	נושאים	פרקים	ברקודים

אילון פרץ · LevelUp

levelupmath.co.il · YouTube · 050-5100170 💬

תוכן העניינים

1 הבסיס – אלגברה

1.1 סדר פעולות חשבון ומספרים מכוונים 36
1.2 חוקי חזקות ושורשים 37
1.3 פירוק לגורמים – גורם משותף, כפל מקוצר וטרינום 38
1.4 משוואות ריבועיות ונוסחת השורשים 37
1.5 מערכות של שתי משוואות בשני נעלמים 35
1.6 משוואות ממעלות גבוהות, דו-ריבועיות ומשתנה עזר 35
1.7 שברים אלגבריים – צמצום, חיבור וחיסור 35
1.8 משוואות עם נעלם במכנה 35
1.9 משוואות אי-רציונליות 35
1.10 אי-שוויונות – ריבועי, שברים, "או" ו"וגם" 36
1.11 משוואות עם פרמטרים 35

2 הבסיס – קו ישר

2.1 שיפוע ומשוואת ישר 35
2.2 חיתוך ישרים, ישרים מקבילים ומאונכים, אמצע קטע ואורך קטע 38

3 הבסיס – פרבולה

3.1 קודקוד, נקודות חיתוך, תחומי חיוביות ושליליות 34
3.2 תחומי עלייה וירידה, פרבולה וישר ובעיות משולבות 37

4 גיאומטריה – משולשים, זוויות, שטחים והיקפים

4.1 זוויות וידע כללי 35
4.2 חפיפת משולשים 33
4.3 משולש שווה שוקיים 34
4.4 משולש ישר זווית – פיתגורס, תיכון ליתר, 30-60-90 33
4.5 קטעי אמצעים ומפגש תיכונים, גבהים וחוצי זווית 33
4.6 דמיון משולשים ושטחים 34

5 גיאומטריה – מרובעים

5.1 מקבילית, מלבן, מעוין וריבוע 34
5.2 טרפז (כולל קטע אמצעים בטרפז) ודלתון 33

6 גיאומטריה – פרופורציות

6.1 משפט תאלס, משפט חוצה הזווית ופרופורציות בדמיון 34

7 גיאומטריה – מעגלים

7.1 אנך ממרכז המעגל, מיתרים ומרחקים 36
7.2 זוויות במעגל – היקפיות, מרכזיות ונשענות על קוטר 35
7.3 משיקים למעגל 35
7.4 מצולעים חסומים וחוסמים, שני מעגלים, קשת וגזרה 35

8 גיאומטריה – סיכום

8.1 שאלות משולבות בגיאומטריה – משולשים, מרובעים, מעגלים, דמיון ושטחים 40

9 טריגונומטריה

9.1 טריגונומטריה במשולש ישר זווית ובמרובעים 36
9.2 משפט הסינוסים, משפט הקוסינוסים ושטח משולש 36
9.3 זהויות בסיס, זווית כפולה ומעגל היחידה 36
9.4 משוואות טריגונומטריות 37

10 סדרה חשבונית

10.1 האיבר הכללי והוכחה שסדרה היא חשבונית 34
10.2 סכום סדרה חשבונית – סכום בין לבין, זוגיים ואי-זוגיים וטרנספורמציות 33

11 סדרה הנדסית

11.1 האיבר הכללי, הוכחה שסדרה הנדסית וטרנספורמציות לסדרה 32
11.2 סכום סדרה הנדסית וסדרה הנדסית אינסופית 31
11.3 כלל נסיגה, סדרות משולבות ושאלות 100 30

12 הסתברות

12.1 מאורעות, "או", טבלה, מאורעות זרים ובלתי תלויים 35
12.2 עץ הסתברות והסתברות מותנית 35
12.3 נוסחת ברנולי 35

13 קדם אנליזה

13.1 התנהגות פולינום באינסוף וסביב ציר x 32
13.2 טרנספורמציות מתוך גרף – הזזות, מתיחות, כיווצים ושיקופים 47

14 מתחילים לחקור!

14.1 נגזרת וכללי גזירה 38
14.2 משיק לפונקציה 34
14.3 נקודות קיצון וחקירה מלאה של פולינום 33
14.4 מציאת פרמטרים בפולינום 33

15 מורכבת ומכפלה

15.1 נגזרת של פונקציה מורכבת ושל מכפלה 37
15.2 קשר גרף – נגזרת 32
15.3 פונקציה זוגית ואי-זוגית והטרנספורמציה $f^2(x)$ 31

16 חקירת פונקציית מנה

16.1 תחום הגדרה, אסימפטוטות ונקודות אי-רציפות ("חור") 38
16.2 נגזרת, נקודות קיצון וחקירה מלאה של פונקציית מנה 34
16.3 נגזרת שנייה, תחומי קעירות ונקודות פיתול 31
16.4 הטרנספורמציה $\frac{1}{f(x)}$ 31

17 חקירת פונקציית שורש

17.1 תחום הגדרה ונגזרת של פונקציית שורש 34
17.2 חקירת פונקציות שורש ושורש מכפלה 32
17.3 הטרנספורמציות $\sqrt{f(x)}$ ו-$|f(x)|$ 31

18 חקירת שורש מנה

18.1 חקירת שורש מנה – תחום, אסימפטוטות, חורים, משיק ופרמטרים 36

19 חקירה טריגונומטרית

19.1 רדיאנים, תחום הגדרה ומשוואות טריגונומטריות בתחום סגור 41
19.2 נגזרת וחקירה של פונקציות טריגונומטריות 39

20 סיכום לפרק החקירות

20.1 פונקציה n, טכניקות גזירה בחזקת וטרנספורמציות כפולות 34
20.2 חקירה עם פרמטר, פונקציה יורשת, זוגיות ושרטוט מראש 37

21 אינטגרלים

21.1 פונקציה קדומה וטכניקות אינטגרציה 38
21.2 חישוב שטחים בעזרת אינטגרלים – כל המצבים 32
21.3 זיהוי נגזרת פנימית ואינטגרל צובר 33

22 בעיות קיצון

22.1 בעיות קיצון אלגבריות וגרפיות 34
22.2 בעיות קיצון גיאומטריות וטריגונומטריות 32

23 שאלות קצרות

23.1 אינדוקציה מתמטית 36
23.2 שאלות קצרות משולבות 33

25 שאלות "100" ותרגול

25.1 שאלות "100" – אתגר ברמה הגבוהה ביותר 36

💡 לחיצה על שם נושא מעבירה ישר אליו · כל ברקוד בחוברת גם לחיץ

פרק 1

הבסיס – אלגברה

כל הכלים האלגבריים שכל שאר הפרקים בנויים עליהם: חזקות, פירוק לגורמים, משוואות, שברים ואי-שוויונות

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

1.1	סדר פעולות חשבון ומספרים מכוונים	36 תרגילים
1.2	חוקי חזקות ושורשים	37 תרגילים
1.3	פירוק לגורמים – גורם משותף, כפל מקוצר וטרינום	38 תרגילים
1.4	משוואות ריבועיות ונוסחת השורשים	37 תרגילים
1.5	מערכות של שתי משוואות בשני נעלמים	35 תרגילים
1.6	משוואות ממעלות גבוהות, דו-ריבועיות ומשתנה עזר	35 תרגילים
1.7	שברים אלגבריים – צמצום, חיבור וחיסור	35 תרגילים
1.8	משוואות עם נעלם במכנה	35 תרגילים
1.9	משוואות אי-רציונליות	35 תרגילים
1.10	אי-שוויונות – ריבועי, שברים, "או" ו"וגם"	36 תרגילים
1.11	משוואות עם פרמטרים	35 תרגילים

סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



פירוק לגורמים – כל הפירוקים וסדר פעולות
YouTube · 6:30



פתרון משוואה ריבועית – כל השיטות
YouTube · 7:51



פתרון משוואות עם נעלם במכנה צעד אחר צעד
YouTube · 8:13



פתרון אי-שוויון ריבועי
YouTube · 9:36

המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף



משוואה ואי-שוויון ריבועי

שנו את a, b, c וראו את הדיסקרימיננטה, את השורשים ואת פתרון אי-השוויון על ציר המספרים.

1.1 סדר פעולות חשבון ומספרים מכוונים

סדר הפעולות: סוגריים ← חזקות ← כפל וחילוק (משמאל לימין) ← חיבור וחיסור. מינוס כפול מינוס – פלוס. שימו לב להבדל בין -2^2 לבין $(-2)^2$.

צפו לפני שמתחילים:



סדר פעולות חשבון
YouTube · 8:11



מספרים מכוונים – חיבור, חיסור, כפל וחילוק
YouTube · 11:03

1. חשבו: $-7+12$
2. חשבו: $-15-(-9)$
3. חשבו: $(-6)\cdot(-4)-30$
4. חשבו: $-48:(-6)+(-3)$
5. שימו לב לסדר הפעולות: $5-3\cdot4+2$
6. עכשיו עם סוגריים: $(5-3)\cdot(4+2)$
7. כפל וחילוק משמאל לימין: $18-12:3\cdot2$
8. חשבו את -2^4 ואת $(-2)^4$. מה ההבדל ביניהם?
9. חשבו: $(-3)^3+(-1)^{10}$
10. חשבו: $3\cdot(-2)^2-(-2)^3$
11. סוגריים מרובעים: $-4\cdot[5-(2-9)]$
12. חשבו: $\frac{-24}{-6}-\frac{15}{-3}$

13 ערך מוחלט: $|-8| - |3 - 11|$

14 חשבו: $-|-5| + |-2| \cdot 3$

15 חיסור שברים: $\frac{2}{3} - \frac{5}{6}$

16 כפל שברים עם סימנים: $\frac{8}{9} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$

17 חילוק שברים: $-\frac{5}{2} : \left(-\frac{10}{3}\right)$

18 חשבו: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$

19 חשבו: $\frac{1}{6} : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$

20 מספרים מעורבים: $2\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2}$

21 שברים עשרוניים: $0.5 - 1.25 \cdot (-4)$

22 שבר מורכב: $\frac{-3-(-7)}{2-(-6)}$

23 חשבו: $\frac{(-2)^3+4^2}{-2^2}$

24 כמה מינוסים? $-(-(-3))$

25 חזקות של -1: $(-1)^{2027} - (-1)^{2026}$

26 סוגריים בתוך סוגריים: $10 - [3 - (4 - (-2)) \cdot 2]$

27 שבר בתוך שבר: $\frac{3-\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}}$

28 הציבו $a = -2$ ו-$b = 3$ בביטוי $a^2 - 2ab + b^2$.

29 הציבו $x = -\frac{1}{2}$ בביטוי $4x^2 - 2x + 1$.

30 הציבו $a=-3$ בביטוי $\frac{a^2-a}{a+1}$.

31 השלימו את המספר החסר: $-6\cdot\square=42$

32 השלימו את המספר החסר: $(-12)+\square=-20$

33 סדרו מהקטן לגדול: $-\frac{3}{4}$, -0.7, $-\frac{2}{3}$, -0.8

34 האם $(-a)^2$ שווה תמיד ל-a^2? ומה הקשר בין $(-a)^3$ לבין a^3?

35 שבר משורשר: $\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}$

36 סכומם של שני מספרים הוא -5 ומכפלתם -14. מהם המספרים?

✔ תשובות סופיות – נושא 1.1

1	5
2	-6
3	-6
4	5
5	-5
6	12
7	10
8	$-2^4=-16$; $(-2)^4=16$ – בלי סוגריים החזקה רק על ה-2
9	-26
10	20
11	-48
12	9
13	0
14	1
15	$-\frac{1}{6}$
16	$-\frac{2}{3}$
17	$\frac{3}{4}$
18	$\frac{1}{4}$
19	1
20	$-\frac{5}{4}$
21	5.5
22	$\frac{1}{2}$
23	-2

24 -3

25 -2

26 19

27 2

28 25

29 3

30 -6

31 -7

32 -8

33 $-\frac{2}{3} > -0.7 > -\frac{3}{4} > -0.8$

34 כן ; $(-a)^3 = -a^3$

35 -1

36 2 ו--7

1.2 חוקי חזקות ושורשים

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}\ ,\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ ,\ (a^m)^n = a^{mn}\ ,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}\ ,\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\ ,$$
$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}\ .$$

צפו לפני שמתחילים:

חוקי חזקות – כל החוקים שחייבים לדעת
YouTube · 8:09

חוקי חזקות עם הסברים והוכחות
YouTube · 18:37

חוקי שורשים – הסבר פשוט ודוגמאות
YouTube · 4:47

1. פשטו: $a^3 \cdot a^5$
2. פשטו: $\frac{x^9}{x^4}$
3. חזקה של חזקה: $(b^3)^4$
4. חזקה של מכפלה: $(2a^3)^2$
5. פשטו: $\frac{12x^7y^3}{4x^2y}$
6. חזקת אפס: $5^0 + (-3)^0 - 0^5$
7. חזקה שלילית: 2^{-3}
8. שבר בחזקה שלילית: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$
9. כתבו בלי מעריכים שליליים: $\frac{a^{-2}b^3}{a^4b^{-1}}$
10. עברו לבסיס 2 וחשבו: $\frac{2^{10} \cdot 4^3}{8^5}$

11 חשבו בלי מחשבון: $\frac{3^{20}+3^{20}+3^{20}}{3^{19}}$

12 הוציאו גורם משותף ופשטו: $\frac{5^{n+2}-5^n}{5^n}$

13 שימו לב לסימן: $(-2x^2y)^3$

14 חשבו: $\sqrt{49}+\sqrt[3]{-27}$

15 הוציאו מהשורש את מה שאפשר: $\sqrt{50}$

16 חיבור שורשים: $\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{75}$

17 כפל שורשים: $\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}$

18 חילוק שורשים: $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$

19 כפל מקוצר עם שורשים: $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

20 פתחו: $(2\sqrt{3}-1)^2$

21 בטלו את השורש מהמכנה: $\frac{6}{\sqrt{3}}$

22 בטלו את השורש מהמכנה (היעזרו בצמוד): $\frac{4}{\sqrt{5}-1}$

23 חזקה עם מעריך שבור: $16^{\frac{3}{4}}$

24 חזקה שבורה ושלילית: $27^{-\frac{2}{3}}$

25 כתבו כחזקה אחת של x (כאשר $x>0$): $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}$

26 כתבו כחזקה אחת של a (כאשר $a>0$): $\frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt{a}}$

27 שורש בתוך שורש (כאשר $a>0$): $\sqrt{a\sqrt{a}}$

28 מצאו את n: $2^n = 32$

29 מצאו את x: $\frac{9^x}{3} = 27$

30 פתחו (כאשר $x > 0$): $\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

31 פשטו: $\frac{a^2 b^{-3}}{(ab^{-1})^{-2}}$

32 איזה מספר גדול יותר: 2^{30} או 3^{20}? (רמז: כתבו את שניהם בחזקת 10)

33 זהירות: $\sqrt{(-5)^2}$

34 פתחו סוגריים: $\sqrt{3}\left(\sqrt{12} - \sqrt{3}\right)$

35 חשבו: $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

36 שורשים של שברים ועשרוניים: $\sqrt{0.09} + \sqrt{\frac{9}{16}}$

37 פשטו: $\frac{(x^2)^3 \cdot x^{-4}}{x^{-3}}$

✔ תשובות סופיות – נושא 1.2

1	a^8
2	x^5
3	b^{12}
4	$4a^6$
5	$3x^5y^2$
6	2
7	$\frac{1}{8}$
8	$\frac{9}{4}$
9	$\frac{b^4}{a^6}$
10	2
11	9
12	24
13	$-8x^6y^3$
14	4
15	$5\sqrt{2}$
16	0
17	12
18	6
19	2
20	$13-4\sqrt{3}$
21	$2\sqrt{3}$
22	$\sqrt{5}+1$
23	8

24	$\frac{1}{9}$
25	$x^{\frac{5}{6}}$
26	$a^{\frac{7}{6}}$
27	$a^{\frac{3}{4}}$
28	$n=5$
29	$x=2$
30	$x+2+\frac{1}{x}$
31	$\frac{a^4}{b^5}$
32	3^{20}, כי $2^{30}=8^{10}<9^{10}=3^{20}$
33	5
34	3
35	$\sqrt{2}$
36	1.05
37	x^5

1.3 פירוק לגורמים – גורם משותף, כפל מקוצר וטרינום

סדר עבודה: (1) גורם משותף (2) כפל מקוצר: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ (3) טרינום (4) פירוק בקבוצות. ממשיכים לפרק עד שאי אפשר יותר.

צפו לפני שמתחילים:



פירוק לגורמים – כל הפירוקים וסדר פעולות
YouTube · 6:30



הוצאת גורם משותף
YouTube · 9:53



הוצאת גורם משותף – תרגול מתקדם
YouTube · 5:56



פירוק לפי קבוצות
YouTube · 4:33

1. הוציאו גורם משותף: $4x+12$
2. הוציאו גורם משותף: $6x^2-9x$
3. גורם משותף בשני משתנים: $5a^2b-10ab^2$
4. גורם משותף שהוא סוגריים: $x(x-3)+2(x-3)$
5. הפרש ריבועים: x^2-25
6. הפרש ריבועים עם מקדמים: $9a^2-16b^2$
7. ריבוע של סכום: $x^2+10x+25$
8. ריבוע של הפרש: $4x^2-12x+9$
9. פרקו עד הסוף (שני שלבים): x^4-1
10. קודם גורם משותף ואחר כך כפל מקוצר: $2x^2-50$

11 טרינום: $x^2 - 7x + 12$

12 טרינום: $x^2 + x - 20$

13 טרינום עם מקדם חופשי שלילי: $x^2 - 2x - 15$

14 טרינום כשהמקדם של x^2 אינו 1: $2x^2 + 7x + 3$

15 טרינום: $3x^2 - 10x - 8$

16 טרינום: $6x^2 - x - 2$

17 גורם משותף ואז ריבוע: $x^3 - 6x^2 + 9x$

18 פירוק בקבוצות: $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

19 פירוק בקבוצות בשני משתנים: $ax + ay + 3x + 3y$

20 טרינום דו-ריבועי: $x^4 - 13x^2 + 36$

21 הפרש חזקות שלישיות: $x^3 - 8$

22 סכום חזקות שלישיות: $x^3 + 27$

23 הפרש ריבועים כשאחד מהם סוגריים: $(x+2)^2 - 9$

24 הפרש ריבועים: $4 - (x-1)^2$

25 פרקו: $x^2y - y^3$

26 שימו לב למקדם השלילי: $-x^2 + 6x - 9$

27 הפרש ריבועים עם שבר: $x^2 - \frac{1}{4}$

28 גורם משותף ואז הפרש ריבועים: $12x^3 - 3x$

29 האם אפשר לפרק את $x^2 + 4$ לגורמים (במספרים ממשיים)? נמקו.

30 ריבוע של סכום בשני משתנים: $4x^2 + 4xy + y^2$

31 פתחו סוגריים: $(3x - 2)^2$

32 פתחו סוגריים: $(a + 2b)(a - 2b)$

33 פתחו סוגריים: $(x + 1)^3$

34 השלימו לריבוע: $x^2 + 8x + \square = (x + \square)^2$

35 חשבו בלי מחשבון בעזרת כפל מקוצר: $101^2 - 99^2$

36 חשבו בלי מחשבון: $51 \cdot 49$ (רמז: $(50 + 1)(50 - 1)$)

37 פרקו עד הסוף: $x^5 - x$

38 פרקו (כאשר a, b פרמטרים): $x^2 - (a + b)x + ab$

✔ תשובות סופיות – נושא 1.3

1	$4(x+3)$
2	$3x(2x-3)$
3	$5ab(a-2b)$
4	$(x-3)(x+2)$
5	$(x-5)(x+5)$
6	$(3a-4b)(3a+4b)$
7	$(x+5)^2$
8	$(2x-3)^2$
9	$(x-1)(x+1)(x^2+1)$
10	$2(x-5)(x+5)$
11	$(x-4)(x-3)$
12	$(x-4)(x+5)$
13	$(x-5)(x+3)$
14	$(x+3)(2x+1)$
15	$(x-4)(3x+2)$
16	$(2x+1)(3x-2)$
17	$x(x-3)^2$
18	$(x-3)(x+2)(x+3)$
19	$(a+3)(x+y)$
20	$(x-3)(x-2)(x+2)(x+3)$
21	$(x-2)(x^2+2x+4)$
22	$(x+3)(x^2-3x+9)$
23	$(x-1)(x+5)$

24	$-(x-3)(x+1)$
25	$y(x-y)(x+y)$
26	$-(x-3)^2$
27	$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$
28	$3x(2x-1)(2x+1)$
29	לא ניתן - סכום ריבועים, ל-0 $x^2+4=0$ אין פתרון
30	$(2x+y)^2$
31	$9x^2-12x+4$
32	a^2-4b^2
33	x^3+3x^2+3x+1
34	$4\ ;\ 16$
35	400
36	2499
37	$x(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$
38	$(x-a)(x-b)$

1.4 משוואות ריבועיות ונוסחת השורשים

$ax^2+bx+c=0 \Longleftarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. הדיסקרימיננטה $\Delta=b^2-4ac$ קובעת את מספר הפתרונות: חיובית – שניים, אפס – אחד, שלילית – אין.

צפו לפני שמתחילים:

פתרון משוואה ריבועית – כל השיטות
YouTube · 7:51

הוכחה לנוסחת השורשים
YouTube · 4:33

1. פתרו: $x^2-9=0$
2. פתרו (אל תחלקו ב-x!): $x^2=5x$
3. פתרו: $2x^2-18=0$
4. פתרו בעזרת טרינום: $x^2-5x+6=0$
5. פתרו: $x^2+2x-15=0$
6. פתרו בנוסחת השורשים: $2x^2-5x-3=0$
7. פתרו: $x^2-6x+9=0$. כמה פתרונות יש?
8. פתרו: $x^2+x+5=0$
9. פתרו (הפתרונות אינם שלמים): $x^2-4x-1=0$
10. פתרו: $3x^2-x-2=0$
11. פתרו בלי לפתוח סוגריים: $(x-3)^2=16$
12. פתחו סוגריים, העבירו אגפים ופתרו: $(x+1)(x-4)=6$

13 פתרו: $x(x-2)=2x-4$

14 משוואה עם שברים: $\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}=\frac{3}{2}$

15 מקדם עשרוני: $0.5x^2-2x=0$

16 פתרו: $4x^2-4x+1=0$

17 שני ריבועים שווים: $(2x-1)^2=(x+1)^2$

18 מקדם עם שורש: $x^2-2\sqrt{3}x+3=0$

19 מקדם x^2 שלילי: $-x^2+3x+10=0$

20 פתרו: $6x^2+x-1=0$

21 פתרו: $(x-1)^2+(x+1)^2=10$

22 סכום של מספר ושל ריבועו הוא 30. מצאו את המספר.

23 מכפלתם של שני מספרים טבעיים עוקבים היא 132. מהם המספרים?

24 אורכו של מלבן גדול ב-3 מרוחבו, ושטחו 40. מצאו את מידות המלבן.

25 בלי לפתור, קבעו כמה פתרונות יש למשוואה $2x^2-3x+5=0$. (רמז: הדיסקרימיננטה)

26 בלי לפתור, קבעו כמה פתרונות יש למשוואה $3x^2-12x+12=0$.

27 כתבו משוואה ריבועית שפתרונותיה הם $x=-2$ ו-$x=5$.

28 אחד הפתרונות של המשוואה $x^2+bx-12=0$ הוא $x=3$. מצאו את b ואת הפתרון השני.

29 פתרו: $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$

30 פתרו: $\frac{1}{4}x^2+x+1=0$

31 מספר אחד גדול ב-4 ממספר אחר, ומכפלתם 45. מצאו את המספרים (שתי אפשרויות).

32 הוכיחו את נוסחת השורשים עבור $ax^2+bx+c=0$ בעזרת השלמה לריבוע.

33 פתרו בשיטת השלמה לריבוע: $x^2+6x-7=0$

34 פתרו: $(x+2)(x-2)=3x$

35 פתרו: $2x(x+3)=x^2-9$

36 מקדמים עשרוניים: $x^2-0.3x-0.1=0$

37 רוכב אופניים עבר 60 ק"מ. אילו היה נוסע מהר יותר ב-5 קמ"ש, היה מגיע שעה אחת קודם. מה הייתה מהירותו?

✔ תשובות סופיות – נושא 1.4

1	$x_2=3\ ,x_1=-3$
2	$x_2=5\ ,x_1=0$
3	$x_2=3\ ,x_1=-3$
4	$x_2=3\ ,x_1=2$
5	$x_2=3\ ,x_1=-5$
6	$x_2=3\ ,x_1=-\frac{1}{2}$
7	$x=3$
8	אין פתרון
9	$x_2=2+\sqrt{5}\ ,x_1=2-\sqrt{5}$
10	$x_2=1\ ,x_1=-\frac{2}{3}$
11	$x_2=7\ ,x_1=-1$
12	$x_2=5\ ,x_1=-2$
13	$x=2$
14	$x_2=3\ ,x_1=-\frac{3}{2}$
15	$x_2=4\ ,x_1=0$
16	$x=\frac{1}{2}$
17	$x_2=2\ ,x_1=0$
18	$x=\sqrt{3}$
19	$x_2=5\ ,x_1=-2$
20	$x_2=\frac{1}{3}\ ,x_1=-\frac{1}{2}$
21	$x_2=2\ ,x_1=-2$
22	5 או -6
23	11 ו-12

24	רוחב 5, אורך 8
25	$\Delta = -31 < 0$ – אין פתרון
26	$\Delta = 0$ – פתרון אחד
27	$x^2 - 3x - 10 = 0$ (או כל כפולה שלה)
28	$x = -4$; $b = 1$
29	$x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{2}$
30	$x = -2$
31	5 ו-9, או -9 ו--5
32	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
33	$x_1 = -7$, $x_2 = 1$
34	$x_1 = -1$, $x_2 = 4$
35	$x = -3$
36	$x_1 = -0.2$, $x_2 = 0.5$
37	15 קמ"ש

1.5 מערכות של שתי משוואות בשני נעלמים

מעלה ראשונה – השוואת מקדמים או הצבה. מערכת ממעלה שנייה – מבודדים נעלם מהמשוואה הקווית ומציבים בשנייה. כל פתרון הוא **זוג** ערכים.

צפו לפני שמתחילים:



2 משוואות עם 2 נעלמים ממעלה ראשונה

YouTube · 10:51



שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה שנייה

YouTube · 7:08



מערכת שתי משוואות ממעלה שנייה

YouTube · 8:15

1 פתרו בשיטת השוואת מקדמים:

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=4 \end{cases}$$

2 פתרו:

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-y=2 \end{cases}$$

3 פתרו:

$$\begin{cases} 3x-2y=12 \\ x+4y=-10 \end{cases}$$

4 פתרו בשיטת ההצבה:

$$\begin{cases} y=2x-1 \\ 3x+y=9 \end{cases}$$

5 מערכת עם שברים:

$$\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=4 \\ x-y=3 \end{cases}$$

6 מקדמים עשרוניים:

$$\begin{cases} 0.2x+0.5y=3.1 \\ x+y=11 \end{cases}$$

7 פתחו סוגריים ופתרו:

$$\begin{cases} 2(x-1)=y+3 \\ 3x-(y-1)=10 \end{cases}$$

8 פתרו ונמקו את התוצאה: $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+4y=7 \end{cases}$

9 פתרו ונמקו את התוצאה: $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 6x-2y=4 \end{cases}$

10 סכומם של שני מספרים הוא 45 וההפרש ביניהם 13. מצאו את המספרים.

11 כרטיס למבוגר עולה 30 ₪ ולילד 18 ₪. נמכרו 20 כרטיסים ב-480 ₪. כמה כרטיסים מכל סוג נמכרו?

12 אב מבוגר פי 3 מבנו. בעוד 10 שנים הוא יהיה מבוגר ממנו פי 2. מה גיליהם היום?

13 ממעלה שנייה: $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$

14 פתרו: $\begin{cases} y=x^2-3 \\ y=2x \end{cases}$

15 פתרו: $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

16 פרקו את x^2-y^2 ופתרו: $\begin{cases} x^2-y^2=16 \\ x+y=8 \end{cases}$

17 פתרו: $\begin{cases} x+2y=7 \\ xy=6 \end{cases}$

18 פתרו: $\begin{cases} y=x^2-4x+5 \\ y=x+1 \end{cases}$

19 פתרו: $\begin{cases} x^2+y=10 \\ x+y=4 \end{cases}$

20 פתרו: $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x^2+xy=-2 \end{cases}$

21 מצאו את נקודות החיתוך של הפרבולה $y=x^2-2x$ עם הישר $y=x+4$.

22 פתרו: $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ y=3x \end{cases}$

23 ארבעה פתרונות! $\begin{cases} xy=12 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

24 פתרו (רמז: מכנה משותף): $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \\ x+y=5 \end{cases}$

25 למערכת $\begin{cases} 2x+ay=4 \\ x+2y=2 \end{cases}$ יש אינסוף פתרונות. מצאו את a.

26 שלושה נעלמים: $x+y=5$, $y+z=7$, $x+z=6$. מצאו את x, y, z.

27 היקפו של מלבן 26 ס"מ ושטחו 40 סמ"ר. מצאו את אורכי צלעותיו.

28 סכום הספרות של מספר דו-ספרתי הוא 9. אם מחליפים את סדר הספרות מתקבל מספר הגדול ב-27. מהו המספר?

29 מכפלתם של שני מספרים היא 24 וסכום ריבועיהם 52. מצאו את המספרים.

30 פתרו: $\begin{cases} x(x-y)=6 \\ x-y=2 \end{cases}$

31 פתרו: $\begin{cases} 3x+2y=-1 \\ 5x-3y=11 \end{cases}$

32 הציבו $u=\frac{1}{x}$, $v=\frac{1}{y}$ ופתרו: $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ \frac{4}{x}-\frac{3}{y}=1 \end{cases}$

33 3 ק"ג תפוחים ו-2 ק"ג אגסים עולים 50 ₪; 2 ק"ג תפוחים ו-3 ק"ג אגסים עולים 55 ₪. מה מחיר ק"ג מכל פרי?

34 פתרו: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 8 \end{cases}$

35 היעזרו בזהות $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ ופתרו: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = 19 \end{cases}$

✔ תשובות סופיות – נושא 1.5

1. $(7,3)$
2. $(3,1)$
3. $(2,-3)$
4. $(2,3)$
5. $(6,3)$
6. $(8,3)$
7. $(4,3)$
8. אין פתרון (ישרים מקבילים)
9. אינסוף פתרונות – כל זוג המקיים $y=3x-2$
10. 29 ו-16
11. 10 למבוגרים ו-10 לילדים
12. האב 30, הבן 10
13. $(2,3)$, $(3,2)$
14. $(-1,-2)$, $(3,6)$
15. $(-3,-4)$, $(4,3)$
16. $(5,3)$
17. $(3,2)$, $(4,\frac{3}{2})$
18. $(1,2)$, $(4,5)$
19. $(-2,6)$, $(3,1)$
20. $(-1,3)$, $(2,-3)$
21. $(-1,3)$, $(4,8)$
22. $(-1,-3)$, $(1,3)$
23. $(-4,-3)$, $(-3,-4)$, $(3,4)$, $(4,3)$

24 $(3,2)$,$(2,3)$

25 $a=4$

26 $z=4$,$y=3$,$x=2$

27 5 ס"מ ו-8 ס"מ

28 36

29 $(6,4)$,$(4,6)$,$(-4,-6)$,$(-6,-4)$

30 $(3,1)$

31 $(1,-2)$

32 $(2,3)$

33 תפוחים 8 ₪, אגסים 13 ₪

34 $(2,4)$,$(-2,4)$

35 $(3,-2)$,$(-2,3)$

1.6 משוואות ממעלות גבוהות, דו-ריבועיות ומשתנה עזר

מוציאים גורם משותף או מפרקים בקבוצות. כשמופיע אותו ביטוי פעמיים (כמו x^2 ו-x^4) מציבים משתנה עזר t, פותרים עבור t – ואז חוזרים ל-x. ערך t שאינו אפשרי (כמו $x^2=-4$) נפסל.

1. הוציאו גורם משותף ופתרו: $x^3-4x=0$
2. פתרו: $2x^3-8x^2=0$
3. פתרו: $x^4-16=0$
4. משוואה דו-ריבועית (הציבו $t=x^2$): $x^4-5x^2+4=0$
5. פתרו: $x^4-10x^2+9=0$
6. פתרו – אחד מערכי t נפסל: $x^4+3x^2-4=0$
7. פתרו: $x^4+5x^2+6=0$
8. פתרו: $x^4-8x^2+16=0$
9. פתרו: $2x^4-7x^2-4=0$
10. משתנה עזר $t=x^2-1$: $(x^2-1)^2-5(x^2-1)+6=0$
11. משתנה עזר $t=x^2+x$: $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=0$
12. משתנה עזר $t=(x-2)^2$: $(x-2)^4-3(x-2)^2-4=0$
13. פירוק בקבוצות: $x^3-x^2-4x+4=0$
14. פירוק בקבוצות: $x^3+3x^2-x-3=0$

15 פתרו: $x^5 - x = 0$

16 משתנה עזר $t = x^3$: $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

17 פתרו: $x^3 - 27 = 0$

18 פתרו: $(x+1)^3 = 8$

19 פתרו: $x^4 - 2x^3 - 3x^2 = 0$

20 פתרו: $\frac{x^4}{4} - x^2 = 0$

21 פתרו (אל תחלקו ב-x^2!): $x^4 = 9x^2$

22 פתרו: $(x^2 - 3x)^2 = 16$

23 הכפילו ב-x^2 ופתרו: $x^2 + \frac{4}{x^2} = 5$

24 משתנה עזר $t = \sqrt{x}$: $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

25 משתנה עזר $t = x^2 + 2x$: $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 2) = 3$

26 ידוע ש-$x = 1$ הוא פתרון של $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. מצאו את שאר הפתרונות.

27 פתרו: $2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$

28 מכפלה ששווה לאפס: $(x^2 - 4)(x^2 - 9) = 0$

29 פתרו: $(x^2 + 1)(x^2 - 2x - 3) = 0$

30 פתרו: $x^4 - 3x^2 = 0$

31 פתרו: $(2x - 1)^4 = 81$

32 פתרו: $x^3+x=0$

33 משתנה עזר $t=x+\frac{1}{x}$: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$

34 כתבו משוואה דו-ריבועית שיש לה בדיוק שני פתרונות, ופתרו אותה.

35 פתרו: $9x^4-10x^2+1=0$

✔ תשובות סופיות – נושא 1.6

1	$x_1=-2\ ,x_2=0\ ,x_3=2$
2	$x_1=0\ ,x_2=4$
3	$x_1=-2\ ,x_2=2$
4	$x_1=-2\ ,x_2=-1\ ,x_3=1\ ,x_4=2$
5	$x_1=-3\ ,x_2=-1\ ,x_3=1\ ,x_4=3$
6	$x_1=-1\ ,x_2=1$
7	אין פתרון
8	$x_1=-2\ ,x_2=2$
9	$x_1=-2\ ,x_2=2$
10	$x_1=-2\ ,x_2=-\sqrt{3}\ ,x_3=\sqrt{3}\ ,x_4=2$
11	$x_1=-3\ ,x_2=-2\ ,x_3=1\ ,x_4=2$
12	$x_1=0\ ,x_2=4$
13	$x_1=-2\ ,x_2=1\ ,x_3=2$
14	$x_1=-3\ ,x_2=-1\ ,x_3=1$
15	$x_1=-1\ ,x_2=0\ ,x_3=1$
16	$x_1=1\ ,x_2=2$
17	$x=3$
18	$x=1$
19	$x_1=-1\ ,x_2=0\ ,x_3=3$
20	$x_1=-2\ ,x_2=0\ ,x_3=2$
21	$x_1=-3\ ,x_2=0\ ,x_3=3$
22	$x_1=-1\ ,x_2=4$
23	$x_1=-2\ ,x_2=-1\ ,x_3=1\ ,x_4=2$

24	$x_1=4\ ,x_2=9$
25	$x_1=-3\ ,x_2=-1\ ,x_3=1$
26	$x_1=2\ ,x_2=3$
27	$x_1=-2\ ,x_2=-\frac{1}{2}\ ,x_3=2$
28	$x_1=-3\ ,x_2=-2\ ,x_3=2\ ,x_4=3$
29	$x_1=-1\ ,x_2=3$
30	$x_1=-\sqrt{3}\ ,x_2=0\ ,x_3=\sqrt{3}$
31	$x_1=-1\ ,x_2=2$
32	$x=0$
33	$x=1\ ,x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$
34	לדוגמה $x^4-3x^2-4=0$: $x=\pm2$
35	$x_1=-1\ ,x_2=-\frac{1}{3}\ ,x_3=\frac{1}{3}\ ,x_4=1$

1.7 שברים אלגבריים – צמצום, חיבור וחיסור

מצמצמים רק **גורמים** (כפל), לא מחוברים! קודם מפרקים מונה ומכנה, ואז מצמצמים.
בחיבור וחיסור – מכנה משותף.

צפו לפני שמתחילים:



צמצום שברים אלגבריים – איך עושים נכון
YouTube · 4:19



חיבור וחיסור שברים אלגבריים
YouTube · 10:28

1 צמצמו: $\frac{6x^2}{9x}$

2 פרקו וצמצמו: $\frac{x^2-9}{x+3}$

3 צמצמו: $\frac{x^2-4x}{x^2-16}$

4 צמצמו: $\frac{x^2+5x+6}{x^2-4}$

5 שימו לב ש-$9-x^2=-(x^2-9)$: $\frac{2x-6}{9-x^2}$

6 צמצמו: $\frac{x^2-6x+9}{3x-9}$

7 צמצמו: $\frac{x^3-x}{x^2+x}$

8 צמצמו: $\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$

9 שני משתנים: $\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$

10 צמצמו: $\frac{x^4-1}{x^2+1}$

11 חברו: $\frac{3}{x}+\frac{2}{x}$

12 חסרו: $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$

13 שימו לב ש- $2-x=-(x-2)$: $\frac{x}{x-2}+\frac{2}{2-x}$

14 מכנה משותף: $\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x-1}$

15 חסרו: $\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x+1}$

16 פרקו את המכנה וחברו: $\frac{2}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}$

17 חסרו: $\frac{x}{x^2-9}-\frac{1}{x+3}$

18 חסרו: $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$

19 מכנה זהה: $\frac{x^2}{x-3}-\frac{9}{x-3}$

20 כפל שברים: $\frac{x^2-1}{x}\cdot\frac{x^2}{x+1}$

21 חילוק שברים: $\frac{x^2-4}{x^2+x}:\frac{x-2}{x}$

22 שני משתנים: $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}$

23 שלושה שברים: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$

24 שבר מורכב: $\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$

25 שבר מורכב: $\dfrac{x-\dfrac{4}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}$

26 ריבוע במכנה: $\dfrac{2x}{x^2-2x+1}-\dfrac{2}{x-1}$

27 צמצמו: $\dfrac{3x+3}{x^2+2x+1}$

28 לאילו ערכי x הביטוי $\dfrac{x+2}{x^2-5x}$ אינו מוגדר?

29 צמצמו את $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$, ואז הציבו $x=3$ בביטוי המצומצם. האם מותר להציב $x=3$ בביטוי המקורי?

30 האם $\dfrac{x^2+4}{x+2}=x+2$? נמקו.

31 כפל מקוצר של חזקה שלישית: $\dfrac{x^3-8}{x^2+2x+4}$

32 חסרו: $\dfrac{6}{x^2-x-6}-\dfrac{2}{x-3}$

33 שלושה שברים: $\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{8}{x^2-4}$

34 כפל וצמצום: $\dfrac{x^2-3x}{x^2-6x+9}\cdot\dfrac{x-3}{x}$

35 צמצמו: $\dfrac{a^2+ab}{ab+b^2}$

✔ תשובות סופיות – נושא 1.7

1	$\frac{2x}{3}$
2	$x-3$
3	$\frac{x}{x+4}$
4	$\frac{x+3}{x-2}$
5	$-\frac{2}{x+3}$
6	$\frac{x-3}{3}$
7	$x-1$
8	$\frac{2x+1}{x+1}$
9	$\frac{a-b}{a+b}$
10	$(x-1)(x+1)$
11	$\frac{5}{x}$
12	$\frac{1}{x(x+1)}$
13	1
14	$\frac{5x-1}{(x-1)(x+1)}$
15	$\frac{2x+1}{x(x+1)}$
16	$\frac{x}{(x-2)(x+2)}$
17	$\frac{3}{(x-3)(x+3)}$
18	$\frac{1}{x+1}$
19	$x+3$
20	$x(x-1)$
21	$\frac{x+2}{x+1}$
22	1
23	$\frac{x^2+x+1}{x^3}$

24	$\frac{x}{x-1}$
25	$x-2$
26	$\frac{2}{(x-1)^2}$
27	$\frac{3}{x+1}$
28	$x=0$ או $x=5$
29	$\frac{x+2}{x+3}$; $\frac{5}{6}$; לא - בביטוי המקורי $x\neq 3$
30	לא - $(x+2)^2=x^2+4x+4\neq x^2+4$
31	$x-2$
32	$-\frac{2(x-1)}{(x-3)(x+2)}$
33	$-\frac{4}{x+2}$
34	1
35	$\frac{a}{b}$

1.8 משוואות עם נעלם במכנה

שלב ראשון תמיד: תחום ההגדרה (המכנה $\neq 0$). כופלים במכנה המשותף, פותרים, ובודקים שהפתרון בתחום – פתרון שמאפס מכנה נפסל.

צפו לפני שמתחילים:



פתרון משוואות עם נעלם במכנה צעד אחר צעד

YouTube · 8:13



משוואות ריבועיות עם נעלם במכנה

YouTube · 13:22



משוואות עם נעלם במכנה

YouTube · 10:37



משוואות עם שברים – מכנה מספרי

YouTube · 9:27

1. פתרו: $\frac{6}{x}=2$
2. פתרו: $\frac{5}{x-1}=10$
3. פתרו: $\frac{x+2}{x}=3$
4. כפל בהצלבה: $\frac{3}{x}=\frac{5}{x+4}$
5. פתרו, ובדקו את הפתרון מול תחום ההגדרה: $\frac{x}{x-2}=\frac{2}{x-2}$
6. פתרו: $\frac{2}{x}+\frac{3}{x}=1$
7. פתרו: $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}=\frac{3}{4}$
8. פתרו: $\frac{x}{x+1}=\frac{2}{3}$
9. מתקבלת משוואה ריבועית: $x+\frac{6}{x}=5$

10 פתרו: $\frac{x}{2}=\frac{8}{x}$

11 פתרו: $\frac{12}{x}-x=1$

12 כפל בהצלבה: $\frac{x+3}{x-1}=\frac{x-1}{x-3}$

13 מכנה משותף x^2-1: $\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x^2-1}$

14 פתרו ובדקו - מה קורה לפתרונות? $\frac{x}{x-3}-\frac{3}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$

15 פתרו: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=\frac{4}{3}$

16 פתרו: $\frac{x^2}{x-2}=\frac{4}{x-2}$

17 פרקו את המכנה: $\frac{3}{x^2-4x}=\frac{1}{x-4}$

18 משתנה עזר $t=\frac{x+1}{x}$: $\frac{x+1}{x}+\frac{x}{x+1}=\frac{5}{2}$

19 פתרו: $\frac{4}{x^2-1}+1=\frac{2}{x-1}$

20 פתרו: $\frac{x-4}{x-5}+\frac{1}{x-5}=2$

21 שלושה מכנים: $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+2}=\frac{3}{x}$

22 פתרו: $\frac{5}{x+2}-\frac{2}{x}=1$

23 פתרו: $\frac{2x}{x+1}=\frac{x+1}{2}$

24 שני ברזים ממלאים יחד בריכה ב-6 שעות. הברז הראשון לבדו ממלא אותה ב-5 שעות פחות מהשני. בכמה זמן ממלא כל ברז לבדו?

25 סירה שטה 24 ק"מ עם הזרם ו-24 ק"מ נגד הזרם במשך 5 שעות בסך הכול. מהירות הזרם 2 קמ"ש. מה מהירות הסירה במים עומדים?

26 פתרו: $\frac{3}{x+1}=\frac{x}{2}+1$

27 פתרו: $\frac{1}{x}=x$

28 פתרו, ובדקו מי מהפתרונות נפסל: $\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x(x-1)}$

29 לאיזה ערך של x השבר $\frac{2}{x-3}$ שווה לשבר $\frac{3}{x-2}$?

30 פתרו: $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$

31 הראו שהשוויון $\frac{6}{x^2-9}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}$ מתקיים לכל x בתחום. מהו התחום?

32 פתרו: $\frac{3x}{x-2}-\frac{x}{x+2}=2$

33 פתרו: $\frac{x^2+1}{x}=\frac{5}{2}$

34 המונה של שבר קטן ב-3 מהמכנה. אם מוסיפים 2 למונה ולמכנה מתקבל $\frac{2}{3}$. מהו השבר?

35 פתרו: $\frac{4}{x^2-x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x-1}$

✔ תשובות סופיות – נושא 1.8

1	$x=3$
2	$x=\frac{3}{2}$
3	$x=1$
4	$x=6$
5	אין פתרון
6	$x=5$
7	$x=2$
8	$x=2$
9	$x_1=2\ ,x_2=3$
10	$x_1=-4\ ,x_2=4$
11	$x_1=-4\ ,x_2=3$
12	$x=5$
13	$x=-2$
14	אין פתרון
15	$x_1=-\frac{3}{2}\ ,x_2=1$
16	$x=-2$
17	$x=3$
18	$x_1=-2\ ,x_2=1$
19	אין פתרון
20	$x=7$
21	$x=6$
22	אין פתרון
23	$x=1$

24	10 שעות ו-15 שעות
25	10 קמ"ש
26	$x_1=-4,\ x_2=1$
27	$x_1=-1,\ x_2=1$
28	$x=-2$
29	$x=5$
30	$x=1$
31	$x\neq\pm3$ - זהות
32	$x=-1$
33	$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=2$
34	$\frac{4}{7}$
35	$x=\frac{3}{2}$

1.9 משוואות אי-רציונליות

מבודדים את השורש, מעלים בריבוע, פותרים – **וחובה לבדוק** כל פתרון במשוואה המקורית: ההעלאה בריבוע יכולה להוסיף פתרונות זרים.

צפו לפני שמתחילים:



פתרון משוואות אי-רציונליות (משוואות עם שורש)
YouTube · 7:33

1. פתרו: $\sqrt{x}=5$

2. פתרו: $\sqrt{x-3}=4$

3. פתרו: $\sqrt{2x+1}=3$

4. האם יש פתרון למשוואה $\sqrt{x+5}=-2$? נמקו בלי לפתור.

5. פתרו: $\sqrt{x^2-9}=4$

6. פתרו ובדקו: $\sqrt{x+2}=x$

7. פתרו ובדקו: $\sqrt{3x+4}=x$

8. בודדו את השורש ופתרו: $x-\sqrt{x}=6$

9. פתרו: $\sqrt{x+7}=x+1$

10. שני שורשים שווים: $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x+3}$

11. פתרו: $\sqrt{5-x}=x+1$

12. פתרו: $2\sqrt{x}=x-3$

13 פתרו: $\sqrt{x^2+x+4}=4$

14 שני שורשים בסכום: $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}=5$

15 העבירו שורש אחד אגף ופתרו: $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=1$

16 שורש שלישי: $\sqrt[3]{x-1}=2$

17 משתנה עזר $t=\sqrt{x}$: $\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}=5$

18 פתרו: $x+\sqrt{x+1}=5$

19 פתרו: $\sqrt{4x+5}=2\sqrt{x}+1$

20 פתרו: $\sqrt{x^2-5}=x-1$

21 פתרו ובדקו: $\sqrt{x-2}=2-x$

22 פתרו: $\sqrt{x^2+3x}=\sqrt{x+8}$

23 מכפלה ששווה לאפס: $(x-4)\sqrt{x-1}=0$

24 פתרו: $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-5}=6$

25 משתנה עזר $t=\sqrt{x+3}$: $\frac{6}{\sqrt{x+3}}=\sqrt{x+3}+1$

26 פתרו: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=5$

27 פתרו: $\sqrt{x^2+9}=x+1$

28 פתרו בעזרת תחום ההגדרה בלבד: $\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}=0$

29 פתרו ובדקו: $\sqrt{1-x}=x-1$

30 שורש בתוך שורש: $\sqrt{x+\sqrt{x+2}}=2$

31 פתרו: $\sqrt{x}=x$

32 הסבירו בעזרת תחום ההגדרה מדוע למשוואה $\sqrt{x-5}=\sqrt{2-x}$ אין פתרון.

33 פתרו: $\sqrt{3x-2}=x$

34 שורש שלישי (אין פתרונות זרים!): $\sqrt[3]{x^3-7}=x-1$

35 פתרו: $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}=2$

✔ תשובות סופיות – נושא 1.9

1	$x=25$
2	$x=19$
3	$x=4$
4	אין פתרון – שורש אינו שלילי
5	$x_1=-5\ ,x_2=5$
6	$x=2$
7	$x=4$
8	$x=9$
9	$x=2$
10	$x=4$
11	$x=1$
12	$x=9$
13	$x_1=-4\ ,x_2=3$
14	$x=8$
15	$x=4$
16	$x=9$
17	$x_1=1\ ,x_2=16$
18	$x=3$
19	$x=1$
20	$x=3$
21	$x=2$
22	$x_1=-4\ ,x_2=2$
23	$x_1=1\ ,x_2=4$

24	$x=9$
25	$x=1$
26	$x=3$
27	$x=4$
28	$x=3$
29	$x=1$
30	$x=2$
31	$x_1=0\ ,x_2=1$
32	צריך $x\geq 5$ וגם $x\leq 2$ – אין ערך כזה
33	$x_1=1\ ,x_2=2$
34	$x_1=-1\ ,x_2=2$
35	$x=5$

1.10 אי-שוויונות – ריבועי, שברים, "או" ו"וגם"

אי-שוויון ריבועי – מוצאים שורשים ומשרטטים סקיצה של פרבולה. שבר – לא כופלים במכנה! מעבירים הכול לאגף אחד ובונים טבלת סימנים. "וגם" – חיתוך התחומים, "או" – איחוד.

צפו לפני שמתחילים:



פתרון אי-שוויון ריבועי
YouTube · 9:36



אי-שוויונות – ניווט בין הסוגים
YouTube · 8:42

1. פתרו: $3x - 5 > 7$
2. חילוק במספר שלילי: $-2x + 1 \leq 9$
3. פתרו: $\frac{x}{3} - 1 < \frac{x}{2}$
4. אי-שוויון ריבועי: $x^2 - 9 < 0$
5. פתרו: $x^2 - 4x \geq 0$
6. פתרו: $x^2 - 5x + 6 > 0$
7. פרבולה בוכה: $-x^2 + x + 6 \geq 0$
8. פתרו: $x^2 + 4 > 0$
9. פתרו: $x^2 + 2x + 5 < 0$
10. ריבוע שלם: $x^2 - 6x + 9 \leq 0$
11. ריבוע שלם: $x^2 - 6x + 9 > 0$

12 פתרו: $2x^2 - x - 1 < 0$

13 העבירו אגפים: $x^2 > 2x + 8$

14 פתחו סוגריים: $x(x+3) < 10$

15 פתרו: $2x - 1 > 3$ וגם $x - 5 < 0$

16 פתרו: $x + 2 < 0$ או $3x > 9$

17 פתרו: $x^2 - 1 > 0$ וגם $x < 3$

18 פתרו: $x^2 < 16$ וגם $x^2 \geq 4$

19 אי-שוויון כפול: $-1 < 2x + 3 < 7$

20 שבר חיובי: $\frac{x-2}{x+3} > 0$

21 פתרו (שימו לב לנקודה שבה המכנה מתאפס): $\frac{x+1}{x-4} \leq 0$

22 אסור לכפול ב-x! $\frac{3}{x} < 1$

23 העבירו אגף ועשו מכנה משותף: $\frac{x}{x-2} \geq 2$

24 פתרו: $\frac{x^2-4}{x} < 0$

25 פתרו: $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x+1}$

26 מונה תמיד חיובי: $\frac{x^2+1}{x-3} < 0$

27 מכנה תמיד חיובי: $\frac{2x-1}{x^2+2} \geq 0$

28 מכפלת שלושה גורמים: $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$

29 פתרו: $x^3 - 4x \leq 0$

30 דו-ריבועי: $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$

31 שימו לב לשורש הכפול: $x^2(x-5) \geq 0$

32 פתרו: $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} \leq 0$

33 לאילו ערכי x הביטוי $\sqrt{x^2 - 9}$ מוגדר?

34 לאילו ערכי x הפרבולה $y = x^2 - 2x - 8$ נמצאת מתחת לציר x?

35 מצאו את כל המספרים השלמים המקיימים $x^2 - 3x - 10 < 0$.

36 פתרו: $x^2 \geq x$

✔ תשובות סופיות – נושא 1.10

1. $x > 4$
2. $x \geq -4$
3. $x > -6$
4. $-3 < x < 3$
5. $x \leq 0$ או $x \geq 4$
6. $x < 2$ או $x > 3$
7. $-2 \leq x \leq 3$
8. לכל x
9. אין פתרון
10. $x = 3$
11. $x \neq 3$
12. $-\frac{1}{2} < x < 1$
13. $x < -2$ או $x > 4$
14. $-5 < x < 2$
15. $2 < x < 5$
16. $x < -2$ או $x > 3$
17. $x < -1$ או $1 < x < 3$
18. $-4 < x \leq -2$ או $2 \leq x < 4$
19. $-2 < x < 2$
20. $x < -3$ או $x > 2$
21. $-1 \leq x < 4$
22. $x < 0$ או $x > 3$
23. $2 < x \leq 4$

24	$x < -2$ או $0 < x < 2$
25	$x < -1$ או $x > 1$
26	$x < 3$
27	$x \geq \frac{1}{2}$
28	$1 < x < 2$ או $x > 3$
29	$x \leq -2$ או $0 \leq x \leq 2$
30	$-2 < x < -1$ או $1 < x < 2$
31	$x = 0$ או $x \geq 5$
32	$-2 \leq x < -1$ או $1 < x \leq 3$
33	$x \leq -3$ או $x \geq 3$
34	$-2 < x < 4$
35	$-1, 0, 1, 2, 3, 4$
36	$x \leq 0$ או $x \geq 1$

1.11 משוואות עם פרמטרים

פרמטר הוא מספר קבוע שאינו ידוע. מחלקים למקרים: מתי המקדם מתאפס, ומתי הדיסקרימיננטה חיובית/אפס/שלילית.

צפו לפני שמתחילים:



משוואות ממעלה ראשונה עם פרמטרים

YouTube · 4:29



משוואה ממעלה שנייה עם פרמטרים

YouTube · 7:55

1. פתרו את המשוואה $ax=6$ עבור $a\neq 0$. מה קורה כאשר $a=0$?
2. פתרו לפי ערכי a: $(a-2)x=a^2-4$
3. פתרו לפי ערכי a: $ax+3=2x+a$
4. פתרו לפי ערכי a: $a(x-1)=x+1$
5. פתרו לפי ערכי a (שלושה מקרים): $a^2x-4=4x+2a$
6. לאילו ערכי m יש למשוואה $x^2+mx+9=0$ פתרון אחד בלבד?
7. לאילו ערכי k יש למשוואה $x^2-4x+k=0$ שני פתרונות שונים?
8. לאילו ערכי k אין פתרון למשוואה $kx^2+4x+1=0$?
9. לאילו ערכי m יש למשוואה $x^2-2mx+m+2=0$ פתרון יחיד?
10. לאילו ערכי m יש למשוואה $(m-1)x^2+2x+1=0$ פתרון יחיד? (זהירות – מקרה שבו המשוואה אינה ריבועית!)
11. הפתרונות של $2x^2+bx+c=0$ הם $x=1$ ו-$x=-3$. מצאו את b ואת c.
12. פרקו לגורמים ופתרו: $x^2-(k+1)x+k=0$

13 לאילו ערכי a אין פתרון למשוואה $x^2+ax+a+3=0$?

14 לאילו ערכי a יש למשוואה $ax^2-2x+a=0$ שני פתרונות שונים?

15 נתונה המערכת $ax+y=2$, $4x+ay=4$. לאילו ערכי a יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות, או אין פתרון?

16 הפתרונות של $x^2+px+q=0$ הם 2 ו-5. מצאו את p ואת q.

17 לאילו ערכי a יש למשוואה $(x-a)(x-3)=0$ פתרון יחיד?

18 לאילו ערכי a אין פתרון למשוואה $\frac{x-a}{x-2}=0$?

19 לאילו ערכי a יש פתרון למשוואה $\sqrt{x}=a$? מהו הפתרון?

20 כמה פתרונות יש למשוואה $x^2=a$? פרטו לפי ערכי a.

21 האם קיים k שעבורו $x=-1$ הוא פתרון של $kx^2+(k+1)x+2=0$? נמקו.

22 הראו שלמשוואה $x^2+mx+m-1=0$ יש פתרון לכל m, ומצאו את הפתרונות.

23 הפתרון של אי-השוויון $2x-a>4$ הוא $x>3$. מצאו את a.

24 פתרו את אי-השוויון $ax>2$ כאשר $a<0$.

25 לאילו ערכי m הישר $y=mx$ משיק לפרבולה $y=x^2+1$ (נקודת חיתוך אחת)?

26 לאילו ערכי k הישר $y=2x+k$ אינו חותך את הפרבולה $y=x^2$?

27 לאילו ערכי a יש פתרונות למשוואה $\frac{a}{x}=x$? מהם?

28 אחד הפתרונות של $x^2-6x+a=0$ גדול פי 2 מהשני. מצאו את a.

29 ההפרש בין שני הפתרונות של $x^2-ax+12=0$ הוא 1. מצאו את a.

30 הפתרון של $(a+1)x = a^2 - 1$ הוא $x = 5$. מצאו את a.

31 פתרו לפי a: $\frac{1}{x-a} = 2$

32 פרקו ופתרו: $x^2 - (a+2)x + 2a = 0$. לאיזה a יש פתרון יחיד?

33 למשוואות $x^2 + ax + 6 = 0$ ו-$x^2 + x - 6 = 0$ יש פתרון משותף. מצאו את a.

34 ידוע ש-$a + b + c = 0$. הראו שלמשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ יש פתרון קבוע, ומצאו אותו.

35 לאילו ערכי m שני הפתרונות של $x^2 - 2x + m = 0$ חיוביים? (רמז: $x = 1 \pm \sqrt{1-m}$)

✔ תשובות סופיות – נושא 1.11

1	$x=\frac{6}{a}$; עבור $a=0$ אין פתרון
2	$a\neq 2$: $x=a+2$; $a=2$: כל x פתרון
3	$a\neq 2$: $x=\frac{a-3}{a-2}$; $a=2$: אין פתרון
4	$a\neq 1$: $x=\frac{a+1}{a-1}$; $a=1$: אין פתרון
5	$a\neq \pm 2$: $x=\frac{2}{a-2}$; $a=-2$: כל x ; $a=2$: אין פתרון
6	$m=\pm 6$
7	$k<4$
8	$k>4$
9	$m=-1$ או $m=2$
10	$m=1$ (אז $x=-\frac{1}{2}$) או $m=2$
11	$b=4$, $c=-6$
12	$x=1$ או $x=k$
13	$-2<a<6$
14	$-1<a<1$ ו-$a\neq 0$
15	$a\neq \pm 2$: יחיד ; $a=2$: אינסוף ; $a=-2$: אין פתרון
16	$p=-7$, $q=10$
17	$a=3$
18	$a=2$
19	$a\geq 0$; $x=a^2$
20	$a>0$: שניים ; $a=0$: אחד ; $a<0$: אין
21	לא – ההצבה נותנת $1=0$
22	$\Delta=(m-2)^2\geq 0$; $x=-1$ או $x=1-m$
23	$a=2$

24 $x < \frac{2}{a}$

25 $m = \pm 2$

26 $k < -1$

27 $a > 0$: $x = \pm\sqrt{a}$; $a \leq 0$: אין

28 $a = 8$

29 $a = 7$ או $a = -7$

30 $a = 6$

31 $x = a + \frac{1}{2}$

32 $x = a$ או $x = 2$; $a = 2$

33 $a = -5$ או $a = 5$

34 $x = 1$

35 $0 < m \leq 1$

פרק 1 סיכומון סוף פרק – הבסיס – אלגברה

סדר פעולות ומספרים מכוונים

- סוגריים ← חזקות ושורשים ← כפל וחילוק ← חיבור וחיסור (משמאל לימין).
- מינוס כפול מינוס – פלוס; $(-a)^2 = a^2$ אבל $-a^2 = -(a^2)$.

שברים ונעלם במכנה

- מפרקים מונה ומכנה לגורמים – מצמצמים רק גורמים, לא מחוברים.
- תחום הגדרה תחילה: מכנה $\neq 0$; פסלו פתרון שמאפס מכנה.

חוקי חזקות ושורשים

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$.
- $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

משוואה אי-רציונלית

- מבודדים את השורש ומעלים בריבוע (פעמיים אם צריך).
- **חובה בדיקה** בהצבה – ההעלאה בריבוע מוסיפה פתרונות זרים.

פירוק לגורמים

- קודם גורם משותף, אחר כך כפל מקוצר, ואז טרינום.
- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
- טרינום: $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$, ובכלל $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

אי-שוויונות

- ריבועי: מוצאים שורשים ומשרטטים פרבולה – בוחרים מעל/מתחת לציר.
- שברים: לא כופלים במכנה! מעבירים הכול לאגף אחד וטבלת סימנים.
- "וגם" – חיתוך התחומים, "או" – איחוד. כפל במספר שלילי הופך את הסימן.

משוואה ריבועית

- $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$.
- $\Delta > 0$ – שני פתרונות, $\Delta = 0$ – פתרון אחד, $\Delta < 0$ – אין.
- משוואה דו-ריבועית: $t = x^2$ (ובודקים ש-$t \geq 0$).

משוואות עם פרמטר

- מעלה ראשונה $ax = b$: $a \neq 0$ – פתרון יחיד; $a = 0, b = 0$ – אינסוף; $a = 0, b \neq 0$ – אין.
- ריבועית: בודקים את Δ ובנפרד את המקרה שבו מקדם x^2 מתאפס.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$ – לא לשכוח את $2ab$.
- לשכוח לבדוק פתרון במשוואה אי-רציונלית או פתרון שמאפס מכנה.
- באי-שוויון עם שבר – לכפול במכנה בלי לדעת את הסימן שלו.

💡 **הטיפ של אילון:** לפני כל תרגיל – עצרו שנייה ושאלו: אפשר לפרק לגורמים? ברוב המקרים הפירוק הוא חצי מהפתרון.

פרק 2

הבסיס – קו ישר

שיפוע, משוואת ישר, חיתוכים, מקבילים ומאונכים – הבסיס לכל הגיאומטריה האנליטית ולחקירות

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

2.1 **שיפוע ומשוואת ישר** — 35 תרגילים

2.2 **חיתוך ישרים, ישרים מקבילים ומאונכים, אמצע קטע ואורך קטע** — 38 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

קורס הקו הישר – מבוא
YouTube · 6:25

קורס קו ישר – השיפוע
YouTube · 6:42

קורס הקו הישר – נקודת חיתוך בין ישרים
YouTube · 2:40

ישרים מאונכים – שיפוע הופכי ונגדי
YouTube · 3:28

🎛️ המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

מעבדת הקו הישר
שנו שיפוע ונקודת חיתוך של שני ישרים וגלו מתי הם מקבילים, מאונכים או נחתכים.

2.1 שיפוע ומשוואת ישר

שיפוע הישר העובר דרך (x_1,y_1) ו-(x_2,y_2): $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. משוואת ישר: $y=mx+b$
, או $y-y_1=m(x-x_1)$. ישר מקביל לציר x: $y=c$; ישר מקביל לציר y: $x=c$.

צפו לפני שמתחילים:

קורס קו ישר – השיפוע
YouTube · 6:42

קורס קו ישר – הביטוי y=mx+b
YouTube · 4:16

איך מוצאים משוואת ישר?
YouTube · 6:50

קורס הקו הישר – נקודות חיתוך עם הצירים
YouTube · 3:58

1. מצאו את השיפוע של הישר העובר דרך הנקודות $A(1,3)$ ו-$B(4,9)$.
2. מצאו את השיפוע של הישר העובר דרך $A(-2,5)$ ו-$B(2,-3)$. האם הישר עולה או יורד?
3. מצאו את השיפוע של הישר העובר דרך $A(-3,4)$ ו-$B(5,4)$. מה מיוחד בישר זה?
4. הסבירו מדוע לישר העובר דרך $A(2,-1)$ ו-$B(2,7)$ אין שיפוע, וכתבו את משוואתו.
5. מצאו את השיפוע של הישר העובר דרך $A(\frac{1}{2},1)$ ו-$B(2,4)$.
6. מהו השיפוע ומהי נקודת החיתוך עם ציר y של הישר $y=-3x+7$?
7. כתבו את הישר $2y-6x=8$ בצורה $y=mx+b$, ומצאו את שיפועו.
8. מצאו את השיפוע של הישר $3x+4y=12$ ואת נקודות החיתוך שלו עם הצירים.
9. כתבו את משוואת הישר ששיפועו 2 ועובר בנקודה $(3,1)$.
10. כתבו את משוואת הישר ששיפועו $-\frac{1}{2}$ ועובר בנקודה $(4,-1)$.

11 מצאו את משוואת הישר העובר דרך הנקודות $(1,2)$ ו-$(3,8)$.

12 מצאו את משוואת הישר העובר דרך $(-4,1)$ ו-$(2,-2)$.

13 מצאו את משוואת הישר העובר דרך הראשית ודרך הנקודה $(5,-10)$.

14 ישר חותך את ציר x ב-$(6,0)$ ואת ציר y ב-$(0,-3)$. מצאו את משוואתו.

15 הנקודה $(2,k)$ נמצאת על הישר $y=4x-5$. מצאו את k.

16 הנקודה $(t,9)$ נמצאת על הישר $y=-2x+3$. מצאו את t.

17 בדקו אם הנקודות $A(0,1)$, $B(2,5)$ ו-$C(5,11)$ נמצאות על ישר אחד.

18 בדקו אם הנקודות $A(-1,4)$, $B(1,0)$ ו-$C(3,-3)$ נמצאות על ישר אחד.

19 מצאו את a כך שהנקודות $(1,a)$, $(3,7)$ ו-$(5,11)$ יהיו על ישר אחד.

20 השיפוע של הישר העובר דרך $(2,3)$ ו-$(6,p)$ הוא $\frac{1}{2}$. מצאו את p.

21 השיפוע של הישר העובר דרך $(q,-1)$ ו-$(4,5)$ הוא 3. מצאו את q.

22 כתבו את משוואת הישר המקביל לציר x ועובר בנקודה $(-7,2)$, ואת משוואת הישר המקביל לציר y ועובר באותה נקודה.

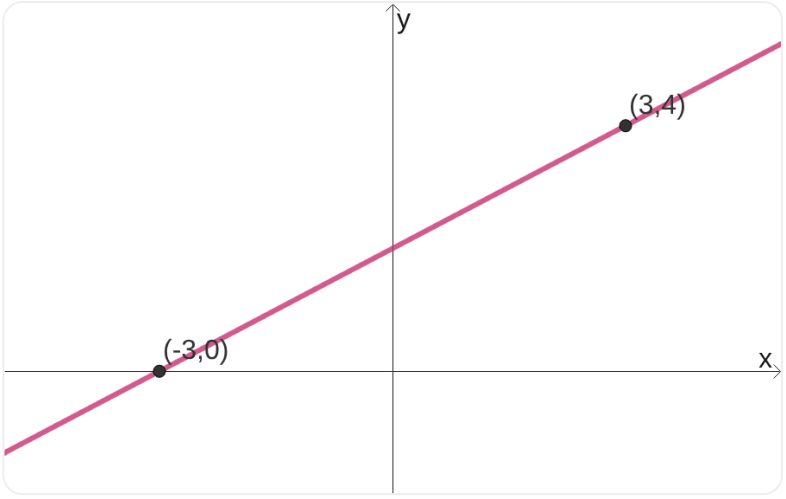
23 הישר $y=mx+4$ עובר בנקודה $(2,0)$. מצאו את m ואת נקודת החיתוך עם ציר y.

24 הישר $y=3x+b$ חותך את ציר x בנקודה $x=-2$. מצאו את b.

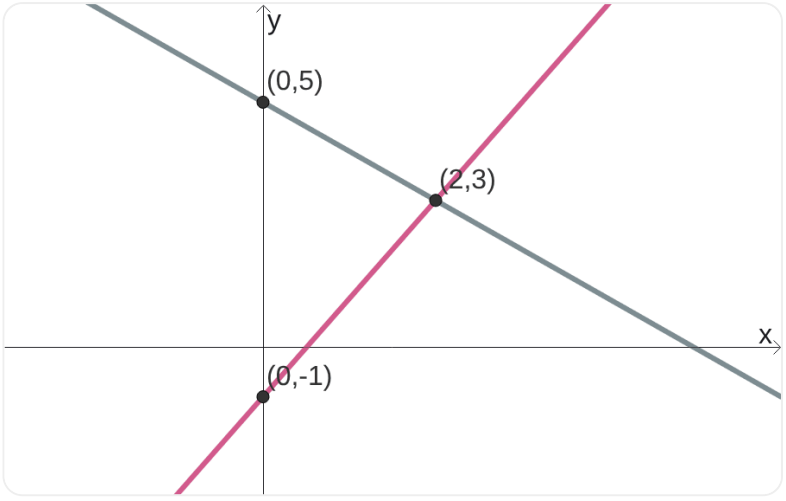
25 מצאו את הזווית שהישר $y=x+3$ יוצר עם הכיוון החיובי של ציר x (רמז: $m=\tan\alpha$).

26 מצאו ישר העובר דרך $(0,-2)$ ויוצר זווית של 135° עם הכיוון החיובי של ציר x.

27 בציור שלפניכם ישר. מצאו את משוואתו בעזרת הנקודות המסומנות.



28 בציור שני ישרים. מצאו את משוואת כל אחד מהם (רמז: היעזרו בנקודות המסומנות).



29 לאילו ערכי x הישר $y=2x-6$ חיובי? ולאילו ערכים הוא שלילי?

30 לאילו ערכי x הישר $y=-\frac{1}{3}x+2$ נמצא מעל ציר x?

31 כתבו משוואת ישר העובר דרך $(1,1)$ שהוא יורד וחותך את ציר y ב-$(0,4)$.

32 הישר $(k-1)x+y=5$ מקביל לציר x. מצאו את k.

33 מצאו את משוואת הישר שעובר דרך $(2,5)$ ושנקודת החיתוך שלו עם ציר x היא $(-3,0)$.

34 מחיר נסיעה במונית: 12 ש"ח התחלתי ועוד 3 ש"ח לכל ק"מ. כתבו את המחיר y כפונקציה של המרחק x, ומצאו כמה ק"מ אפשר לנסוע ב-57 ש"ח.

35 מיכל מים מתרוקן בקצב קבוע: אחרי 2 שעות נשארו בו 340 ליטר ואחרי 5 שעות 250 ליטר. כמה מים היו בו בהתחלה, ומתי יתרוקן?

✔ תשובות סופיות – נושא 2.1

1	$m=2$
2	$m=-2$; יורד
3	$m=0$; ישר מקביל לציר x: $y=4$
4	ישר אנכי (מקביל לציר y) ; $x=2$
5	$m=2$
6	$m=-3$; $(0,7)$
7	$y=3x+4$; $m=3$
8	$m=-\frac{3}{4}$; $(4,0)$,$(0,3)$
9	$y=2x-5$
10	$y=-\frac{1}{2}x+1$
11	$y=3x-1$
12	$y=-\frac{1}{2}x-1$
13	$y=-2x$
14	$y=\frac{1}{2}x-3$
15	$k=3$
16	$t=-3$
17	כן – כל השיפועים שווים ל-2 ($y=2x+1$)
18	לא – $m_{AB}=-2$,$m_{BC}=-\frac{3}{2}$
19	$a=3$
20	$p=5$
21	$q=2$
22	$y=2$; $x=-7$
23	$m=-2$; $(0,4)$

24	$b = 6$
25	45°
26	$y = -x - 2$
27	$y = \frac{2}{3}x + 2$
28	$y = 2x - 1$; $y = -x + 5$
29	חיובי: $x > 3$; שלילי: $x < 3$
30	$x < 6$
31	$y = -3x + 4$
32	$k = 1$
33	$y = x + 3$
34	$y = 3x + 12$; 15 ק"מ
35	400 ליטר ; אחרי $\frac{40}{3}$ שעות (13 שעות ו-20 דקות)

2.2 חיתוך ישרים, ישרים מקבילים ומאונכים, אמצע קטע ואורך קטע

מקבילים: $m_1 = m_2$. מאונכים: $m_1 \cdot m_2 = -1$. אמצע קטע: $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. אורך קטע: $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$.

צפו לפני שמתחילים:

קורס הקו הישר – נקודת חיתוך בין ישרים
YouTube · 2:40

שיפוע הופכי ונגדי – ישרים מאונכים
YouTube · 3:28

נוסחת אמצע קטע – הסבר ותרגילים
YouTube · 5:44

נוסחת מרחק בין שתי נקודות
YouTube · 8:28

1. מצאו את נקודת החיתוך של הישרים $y = 2x + 1$ ו-$y = -x + 7$.
2. מצאו את נקודת החיתוך של הישרים $y = 3x - 4$ ו-$2x + y = 6$.
3. מצאו את נקודת החיתוך של $y = \frac{1}{2}x + 3$ ו-$y = -\frac{3}{2}x - 1$.
4. האם הישרים $y = 4x - 1$ ו-$y = 4x + 5$ נחתכים? נמקו.
5. הראו שהישרים $y = \frac{2}{3}x + 1$ ו-$y = -\frac{3}{2}x + 4$ מאונכים זה לזה.
6. כתבו את משוואת הישר המקביל לישר $y = -2x + 5$ ועובר בנקודה $(1, 4)$.
7. כתבו את משוואת הישר המאונך לישר $y = 3x - 2$ ועובר בנקודה $(6, 1)$.
8. כתבו את משוואת הישר המאונך לישר $2x - 5y = 10$ ועובר בראשית.
9. מצאו את k שעבורו הישרים $y = (k+1)x - 3$ ו-$y = 5x + 2$ מקבילים.
10. מצאו את k שעבורו הישרים $y = kx + 1$ ו-$y = \frac{1}{4}x - 7$ מאונכים.

11 מצאו את אמצע הקטע AB כאשר $A(2,7)$ ו-$B(8,-1)$.

12 מצאו את אמצע הקטע שקצותיו $(-5,3)$ ו-$(2,-4)$.

13 $M(3,-2)$ היא אמצע הקטע AB, ו-$A(1,4)$. מצאו את B.

14 מצאו את אורך הקטע שקצותיו $A(1,2)$ ו-$B(4,6)$.

15 מצאו את אורך הקטע שקצותיו $A(-3,5)$ ו-$B(3,-3)$.

16 מצאו את אורך הקטע שקצותיו $(2,-1)$ ו-$(5,2)$. השאירו את התשובה עם שורש.

17 הנקודה $(a,1)$ נמצאת במרחק 5 מהנקודה $(2,-3)$. מצאו את a (שתי אפשרויות).

18 מצאו נקודה על ציר x שנמצאת במרחקים שווים מ-$A(1,3)$ ומ-$B(5,1)$.

19 מצאו את משוואת האנך האמצעי לקטע שקצותיו $A(0,2)$ ו-$B(4,6)$.

20 מצאו את משוואת האנך האמצעי לקטע שקצותיו $A(-2,1)$ ו-$B(4,-3)$.

21 נתונים $A(1,1)$, $B(5,3)$, $C(3,7)$. הראו שהמשולש ABC ישר זווית, וציינו באיזה קודקוד הזווית הישרה.

22 נתונים $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(2,4)$. הראו שהמשולש ABC שווה שוקיים וחשבו את שטחו.

23 מצאו את שטח המשולש שיוצר הישר $y=-2x+6$ עם הצירים.

24 מצאו את שטח המשולש שיוצרים הישרים $y=x+2$, $y=-x+4$ וציר x.

25 נתונה מקבילית $ABCD$ שבה $A(1,1)$, $B(6,2)$, $C(8,6)$. מצאו את הקודקוד D (רמז: אלכסונים חוצים זה את זה).

26 הראו שהמרובע שקודקודיו $A(0,0)$, $B(3,1)$, $C(4,4)$, $D(1,3)$ הוא מעוין.

27 נתונים $A(2,1)$ ו-$B(6,5)$. מצאו את משוואת הישר העובר דרך אמצע AB ומקביל לישר $y=-3x$.

28 מצאו את המרחק בין נקודת החיתוך של $y=x-1$ ו-$y=-2x+8$ לבין הראשית.

29 הישר $y=2x+b$ עובר דרך נקודת החיתוך של $y=x+3$ ו-$y=-x+5$. מצאו את b.

30 מצאו את a שעבורו שלושת הישרים $y=x+1$, $y=-2x+7$ ו-$y=ax-1$ נחתכים בנקודה אחת.

31 מצאו את היטל הנקודה $(5,0)$ על הישר $y=2x$ (נקודת הרגל של האנך מהנקודה לישר).

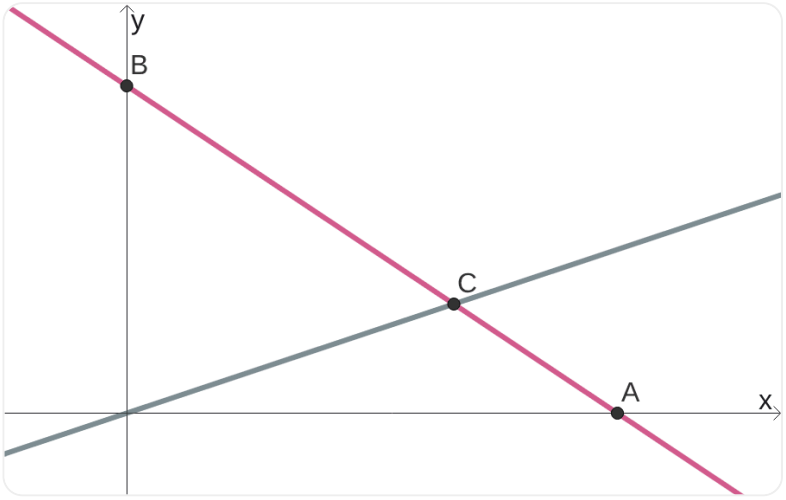
32 מצאו את מרחק הנקודה $(5,0)$ מהישר $y=2x$ (היעזרו בתרגיל הקודם).

33 מצאו את השיקוף של הנקודה $(5,0)$ ביחס לישר $y=2x$.

34 במשולש $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(2,4)$: מצאו את משוואת התיכון לצלע BC.

35 באותו משולש $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(2,4)$: מצאו את משוואת הגובה מ-A לצלע BC ואת נקודת מפגש הגבהים.

36 בציור: הישר $y=-x+6$ חותך את הצירים ב-A וב-B, והישר $y=\frac{1}{2}x$ חותך את AB ב-C. מצאו את C ואת היחס $AC:CB$ כאשר A על ציר x.



37 הנקודות $A(1,2)$ ו-$C(5,6)$ הן קודקודים נגדיים של ריבוע. מצאו את שני הקודקודים האחרים.

38 מצאו נקודה P על הישר $y=x$ שמרחקה מ-$(4,0)$ שווה למרחקה מ-$(0,2)$.

✔ תשובות סופיות – נושא 2.2

1	$(2,5)$
2	$(2,2)$
3	$(-2,2)$
4	לא – מקבילים (אותו שיפוע, חיתוך שונה עם ציר y)
5	$\frac{2}{3}\cdot(-\frac{3}{2})=-1$
6	$y=-2x+6$
7	$y=-\frac{1}{3}x+3$
8	$y=-\frac{5}{2}x$
9	$k=4$
10	$k=-4$
11	$(5,3)$
12	$(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$
13	$B(5,-8)$
14	5
15	10
16	$3\sqrt{2}$
17	$a=5$ או $a=-1$
18	$(2,0)$
19	$y=-x+6$
20	$y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$
21	ב-B: $m_{AB}=\frac{1}{2}$, $m_{BC}=-2$
22	$AC=BC=\sqrt{20}$; שטח 8
23	9

24	9
25	$D(3,5)$
26	כל הצלעות $\sqrt{10}$
27	$y=-3x+15$
28	$\sqrt{13}$ (נקודת החיתוך $(3,2)$)
29	$b=2$
30	$a=2$
31	$(1,2)$
32	$2\sqrt{5}$
33	$(-3,4)$
34	$y=\frac{1}{2}x$
35	$(2,2)$; $y=x$
36	$AC:CB=1:2$; $C(4,2)$
37	$(5,2)$,$(1,6)$
38	$(3,3)$

פרק 2 סיכומון סוף פרק – הבסיס – קו ישר

שיפוע

- $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
- $m > 0$ עולה, $m < 0$ יורד, $m = 0$ ישר מקביל לציר x.
- ישר מקביל לציר y: $x = k$ – אין לו שיפוע.

משוואת ישר

- צורה מפורשת: $y = mx + n$, כאשר n – נקודת החיתוך עם ציר y.
- דרך נקודה ושיפוע: $y - y_1 = m(x - x_1)$.
- צורה כללית $ax + by + c = 0$ – לבודד את y כדי למצוא שיפוע.

חיתוך עם הצירים

- עם ציר x: מציבים $y = 0$.
- עם ציר y: מציבים $x = 0$.

מקבילים ומאונכים

- מקבילים: $m_1 = m_2$.
- מאונכים: $m_1 \cdot m_2 = -1$.

חיתוך שני ישרים

- משווים את ה-y-ים (או פותרים מערכת) ומוצאים x, ואז y.
- שיפועים שווים: מקבילים (אין חיתוך) או ישר אחד.

אמצע קטע ואורך קטע

- אמצע: $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.
- אורך: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

בעיות משולבות

- אנך אמצעי: עובר באמצע הקטע ומאונך לו.
- נקודה על ישר – מקיימת את משוואתו; מציבים ומוצאים פרמטר.
- שטח משולש עם צלע על ציר: בסיס כפול גובה, חלקי 2.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- להפוך את סדר הנקודות במונה ולא במכנה של השיפוע.
- מאונך: לשכוח את המינוס – השיפוע הוא $-\frac{1}{m}$, לא $\frac{1}{m}$.
- באמצע קטע – לחסר במקום לחבר.

💡 **הטיפ של אילון:** תמיד שרטטו סקיצה של הנקודות – היא מגלה מיד אם השיפוע צריך לצאת חיובי או שלילי ומונעת טעויות סימן.

פרק 3

הבסיס – פרבולה

שלוש הצגות של פרבולה, חקירה מלאה, ופגישות של פרבולות עם ישרים

סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

3.1 קודקוד, נקודות חיתוך, תחומי חיוביות ושליליות — 34 תרגילים

3.2 תחומי עלייה וירידה, פרבולה וישר ובעיות משולבות — 37 תרגילים

סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



פרבולה – סיכום מלא מהבסיס ועד חקירה

YouTube · 17:14



פרבולה – מעבר בין ייצוגים

YouTube · 6:27



פרבולה – ייצוג סטנדרטי

YouTube · 11:27



פרבולה – עלייה, ירידה, חיוביות ושליליות

YouTube · 12:50

המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף



מעבדת הפרבולה

הזיזו את a, p, k בהצגה הקודקודית וראו את הקודקוד, החיתוכים ותחום החיוביות.

3.1 קודקוד, נקודות חיתוך, תחומי חיוביות ושליליות

הצגה סטנדרטית $f(x)=ax^2+bx+c$, קודקודית $f(x)=a(x-p)^2+k$, כפלית $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$. שיעור ה-x של הקודקוד: $x=-\frac{b}{2a}$. $a>0$ – פרבולה מחייכת, $a<0$ – בוכה.

צפו לפני שמתחילים:

פרבולה – מבוא
YouTube · 6:48

פרבולה – הצגה קודקודית
YouTube · 8:10

פרבולה – ייצוג כפלי
YouTube · 3:01

פרבולה – נקודות סימטריות
YouTube · 5:44

1. מצאו את קודקוד הפרבולה $f(x)=x^2-6x+5$.

2. מצאו את קודקוד הפרבולה $f(x)=-2x^2+8x-3$, וקבעו אם הוא נקודת מקסימום או מינימום.

3. מצאו את נקודות החיתוך של $f(x)=x^2-x-12$ עם הצירים.

4. מצאו את נקודות החיתוך של $f(x)=-x^2+4x$ עם הצירים.

5. הראו שלפרבולה $f(x)=x^2+2x+5$ אין נקודות חיתוך עם ציר x. מה תחום החיוביות שלה?

6. לפרבולה $f(x)=x^2-8x+16$ יש נקודת חיתוך אחת עם ציר x. מצאו אותה. מה מיוחד בה?

7. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)=x^2-5x+6$.

8. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)=-x^2+2x+8$.

9 מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)=2x^2-8$.

10 מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)=-(x-3)^2$.

11 הפרבולה נתונה בהצגה הקודקודית $f(x)=(x-2)^2-9$. מצאו את הקודקוד ואת נקודות החיתוך עם הצירים.

12 הפרבולה נתונה בהצגה הכפלית $f(x)=-(x+1)(x-5)$. מצאו את נקודות החיתוך עם ציר x ואת הקודקוד בלי לפתוח סוגריים.

13 כתבו את $f(x)=x^2+4x-5$ בהצגה קודקודית ובהצגה כפלית.

14 כתבו את $f(x)=2(x-1)^2-8$ בהצגה הסטנדרטית ובהצגה הכפלית.

15 מצאו את הפרבולה $f(x)=x^2+bx+c$ שקודקודה $(3,-4)$.

16 מצאו פרבולה שחותכת את ציר x ב-$(-2,0)$ ו-$(4,0)$ ועוברת בנקודה $(0,-16)$.

17 מצאו פרבולה שקודקודה $(-1,5)$ ועוברת בנקודה $(1,-3)$.

18 הנקודות $(1,7)$ ו-$(5,7)$ נמצאות על פרבולה. מהו ציר הסימטריה שלה?

19 הפרבולה $f(x)=x^2+bx+3$ עוברת בנקודה $(2,-1)$. מצאו את b ואת הקודקוד.

20 ציר הסימטריה של $f(x)=ax^2+6x-1$ הוא $x=1$. מצאו את a ואת ערך הפונקציה בקודקוד.

21 לאילו ערכי c לפרבולה $f(x)=x^2-4x+c$ יש שתי נקודות חיתוך עם ציר x? ולאילו ערכים אין בכלל?

22 מצאו את k שעבורו הפרבולה $f(x)=x^2+kx+9$ משיקה לציר x.

23 לאילו ערכי m הפרבולה $f(x)=mx^2-2x+1$ חיובית לכל x?

24 פתרו את אי-השוויון $x^2-9>0$ בעזרת סקיצה של פרבולה.

25 פתרו את אי-השוויון $x^2 \leq 4x$.

26 פתרו את אי-השוויון $-x^2 + x + 6 \geq 0$.

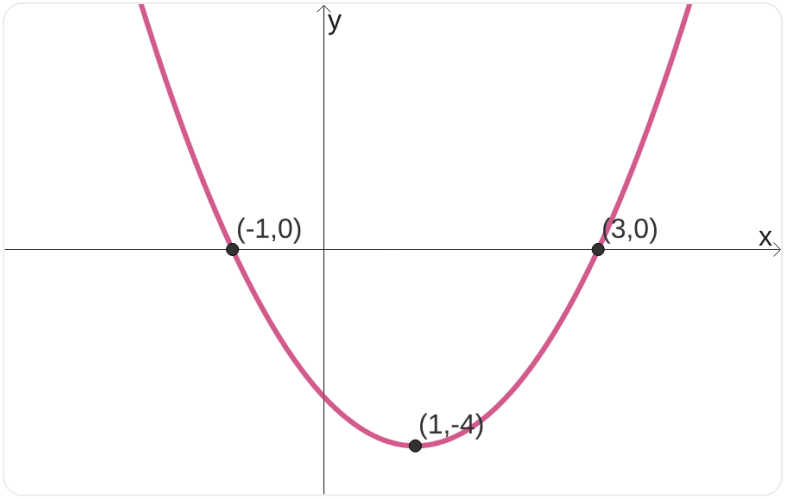
27 פתרו את אי-השוויון $x^2 + x + 1 < 0$. נמקו.

28 מצאו את תחום הערכים (הטווח) של $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

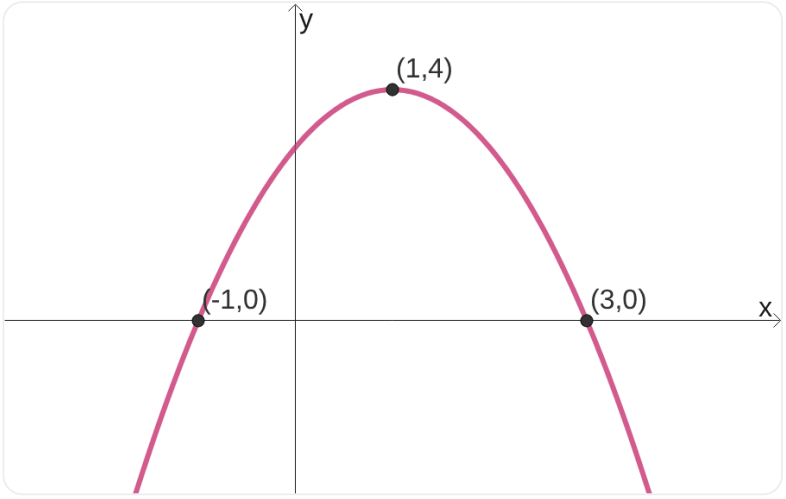
29 מצאו את תחום הערכים של $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.

30 מהו הערך המינימלי של הביטוי $x^2 + 10x + 30$, ועבור איזה x הוא מתקבל?

31 בציור גרף של פרבולה. מצאו את הפונקציה בעזרת הנקודות המסומנות.



32 בציור גרף של פרבולה בוכה. מצאו את הפונקציה ואת תחומי החיוביות שלה.



33 הפרבולה $f(x)=x^2-2(k+1)x+k^2$ חותכת את ציר y ב-$(0,9)$ והקודקוד שלה ברביע הרביעי. מצאו את k.

34 סכום שני מספרים הוא 10. מה המכפלה הגדולה ביותר שלהם? (הביעו את המכפלה כפרבולה)

✔ תשובות סופיות – נושא 3.1

1. $(3,-4)$
2. $(2,5)$ – מקסימום
3. $(-3,0)$, $(4,0)$; $(0,-12)$
4. $(0,0)$, $(4,0)$; $(0,0)$
5. $\Delta=-16<0$; חיובית לכל x
6. $(4,0)$ – זה גם הקודקוד (משיקה לציר)
7. חיובית: $x<2$ או $x>3$; שלילית: $2<x<3$
8. חיובית: $-2<x<4$; שלילית: $x<-2$ או $x>4$
9. חיובית: $x<-2$ או $x>2$; שלילית: $-2<x<2$
10. חיובית: אף x ; שלילית: $x\neq 3$
11. קודקוד $(2,-9)$; חיתוך עם x: $(-1,0)$, $(5,0)$; חיתוך עם y: $(0,-5)$
12. $(-1,0)$, $(5,0)$; קודקוד $(2,9)$
13. $(x+2)^2-9$; $(x+5)(x-1)$
14. $2x^2-4x-6$; $2(x-3)(x+1)$
15. $f(x)=x^2-6x+5$
16. $f(x)=2(x+2)(x-4)=2x^2-4x-16$
17. $f(x)=-2(x+1)^2+5$
18. $x=3$
19. $b=-4$; $(2,-1)$
20. $a=-3$; $f(1)=2$
21. שתי נקודות: $c<4$; אין: $c>4$
22. $k=6$ או $k=-6$
23. $m>1$

24 $x < -3$ או $x > 3$

25 $0 \le x \le 4$

26 $-2 \le x \le 3$

27 אין פתרון ($\Delta < 0$ והפרבולה מחייכת)

28 $y \ge -4$

29 $y \le 3$

30 $x = -5$ עבור 5,

31 $f(x) = (x-1)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3$

32 $f(x) = -(x+1)(x-3)$; חיובית: $-1 < x < 3$

33 $k = 3$ (קודקוד $(4, -7)$)

34 25 (כאשר שני המספרים 5)

3.2 תחומי עלייה וירידה, פרבולה וישר ובעיות משולבות

פרבולה מחייכת יורדת משמאל לקודקוד ועולה מימינו; פרבולה בוכה – להפך. חיתוך פרבולה וישר: משווים ביניהם ופותרים משוואה ריבועית – מספר הפתרונות הוא מספר נקודות החיתוך ($\Delta = 0$ – השקה).

צפו לפני שמתחילים:



פרבולה – עלייה, ירידה, חיוביות ושליליות
YouTube · 12:50



חיתוך בין פרבולה וישר וחיתוך בין פרבולות
YouTube · 10:37



פרבולה – חקירה בהצגה הקודקודית
YouTube · 16:27



פרבולה – סיכום מלא מהבסיס ועד חקירה
YouTube · 17:14

1 מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

2 מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x) = -3x^2 - 12x$.

3 מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x) = 5 - x^2$.

4 מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x) = (x+3)(x-7)$ בלי לפתוח סוגריים.

5 בצעו חקירה מלאה של $f(x) = x^2 + 2x - 8$: קודקוד, חיתוכים, חיוביות/שליליות, עלייה/ירידה.

6 בצעו חקירה מלאה של $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

7 פרבולה מחייכת יורדת בתחום $x < -2$. מהו שיעור ה-x של הקודקוד? באיזה תחום היא עולה?

8 הפונקציה $f(x) = x^2 + bx$ עולה רק בתחום $x > 3$. מצאו את b.

9 הפונקציה $f(x) = ax^2 + 4x$ יורדת בתחום $x > 1$. מצאו את a.

10 מצאו את נקודות החיתוך של הפרבולה $y=x^2$ עם הישר $y=x+2$.

11 מצאו את נקודות החיתוך של $y=x^2-3x$ עם $y=x-3$.

12 הראו שהישר $y=2x-1$ משיק לפרבולה $y=x^2$, ומצאו את נקודת ההשקה.

13 הראו שהישר $y=x-5$ אינו חותך את הפרבולה $y=x^2+1$.

14 מצאו את k שעבורו הישר $y=k$ משיק לפרבולה $y=x^2-6x+4$.

15 לאילו ערכי m הישר $y=mx$ משיק לפרבולה $y=x^2+4$?

16 מצאו את נקודות החיתוך בין הפרבולות $y=x^2-2$ ו-$y=-x^2+6$.

17 מצאו את נקודות החיתוך בין $y=x^2+x$ ו-$y=2x^2-x-3$.

18 לאילו ערכי x הפרבולה $y=x^2$ נמצאת מעל הישר $y=x+6$?

19 לאילו ערכי x הפרבולה $y=-x^2+4$ נמצאת מעל הפרבולה $y=x^2-4$?

20 הישר $y=x+1$ חותך את הפרבולה $y=x^2-1$ בנקודות A ו-B. מצאו את אורך הקטע AB.

21 הפרבולה $y=x^2-4x$ חותכת את ציר x ב-O וב-A, וקודקודה B. מצאו את שטח המשולש OAB.

22 הפרבולה $f(x)=-x^2+2x+3$ חותכת את ציר x ב-A וב-B ואת ציר y ב-C. מצאו את שטח המשולש ABC.

23 הישר $y=2x+3$ חותך את הפרבולה $y=x^2$ ב-A וב-B. מצאו את משוואת הישר העובר דרך קודקוד הפרבולה ודרך אמצע AB.

24 מצאו את משוואת הישר העובר דרך קודקודי הפרבולות $y=x^2-2x+3$ ו-$y=-x^2-4x$.

25 הפרבולה $y=x^2+bx+c$ עוברת בנקודות $(1,0)$ ו-$(0,-3)$. מצאו את b, c ואת הקודקוד.

26 הפרבולה $y=ax^2+bx+c$ עוברת בנקודות $(0,1)$, $(1,4)$, $(-1,0)$. מצאו את a, b, c.

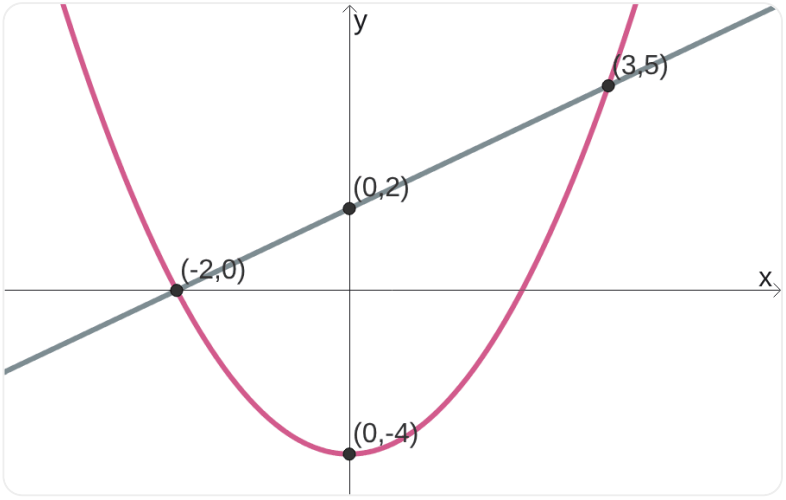
27 נקודה $P(t,t^2)$ נמצאת על הפרבולה $y=x^2$. הביעו את מרחקה האנכי מהישר $y=2x-3$ ומצאו את המרחק האנכי המינימלי.

28 זורקים כדור; גובהו (במטרים) אחרי t שניות הוא $h(t)=-5t^2+20t$. מתי מגיע הכדור לגובה המקסימלי ומה הגובה? מתי יפגע בקרקע?

29 גדר באורך 40 מטר סוגרת שטח מלבני. מה השטח המקסימלי האפשרי ומה מידות המלבן?

30 גדר באורך 60 מטר סוגרת שלוש צלעות של מלבן (הצלע הרביעית היא קיר). מה השטח המקסימלי?

31 בציור פרבולה וישר. מצאו את משוואות שניהם ואת נקודות החיתוך ביניהם.



32 פרבולה מחייכת עם קודקוד $(2,-1)$. לאילו ערכי k הישר $y=k$ חותך אותה בשתי נקודות? בנקודה אחת?

33 הפרבולה $y=x^2+px+q$ משיקה לציר x בנקודה $x=3$. מצאו את p ו-q.

34 הזיזו את הפרבולה $y=x^2$ שתי יחידות ימינה ושלוש למטה. כתבו את הפרבולה החדשה ומצאו את נקודות החיתוך שלה עם ציר x.

35 נתונות $f(x)=x^2-2x$ ו-$g(x)=f(x)+k$. מצאו את k שעבורו קודקוד $g(x)$ נמצא על ציר x, ואת k שעבורו $g(x)$ עוברת בראשית.

36 לאילו ערכי a אין לישר $y=a$ ולפרבולה $y=-x^2+6x$ אף נקודה משותפת?

37 נתונה $f(x)=x^2-6x+8$. מצאו את כל ערכי x שעבורם $f(x)$ שלילית וגם יורדת.

✔ תשובות סופיות – נושא 3.2

1. עלייה: $x>2$; ירידה: $x<2$
2. עלייה: $x<-2$; ירידה: $x>-2$
3. עלייה: $x<0$; ירידה: $x>0$
4. עלייה: $x>2$; ירידה: $x<2$
5. קודקוד $(-1,-9)$; חיתוך עם x: $(-4,0)$, $(2,0)$; חיתוך עם y: $(0,-8)$; חיובית: $x<-4$ או $x>2$; שלילית: $-4<x<2$; עלייה: $x>-1$; ירידה: $x<-1$
6. קודקוד $(3,4)$; חיתוך עם x: $(1,0)$, $(5,0)$; חיתוך עם y: $(0,-5)$; חיובית: $1<x<5$; שלילית: $x<1$ או $x>5$; עלייה: $x<3$; ירידה: $x>3$
7. $x=-2$; $x>-2$
8. $b=-6$
9. $a=-2$
10. $(-1,1)$, $(2,4)$
11. $(1,-2)$, $(3,0)$
12. $(1,1)$ (פתרון יחיד)
13. $x^2-x+6=0$: $\Delta=-23<0$
14. $k=-5$
15. $m=4$ או $m=-4$
16. $(-2,2)$, $(2,2)$
17. $(-1,0)$, $(3,12)$
18. $x<-2$ או $x>3$
19. $-2<x<2$
20. $3\sqrt{2}$ ($A(-1,0)$, $B(2,3)$)
21. 8
22. 6

23 $y = 5x$ (האמצע $(1,5)$)

24 $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ (קודקודים $(1,2)$, $(-2,4)$)

25 $b = 2$, $c = -3$; $(-1,-4)$

26 $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$

27 $t^2 - 2t + 3$; מינימום ב- $t = 1$ 2

28 אחרי 2 שניות, 20 מ' ; אחרי 4 שניות

29 100 מ"ר - ריבוע 10×10

30 450 מ"ר (15×30)

31 $y = x^2 - 4$; $y = x + 2$; $(-2,0)$, $(3,5)$

32 שתי נקודות: $k > -1$; נקודה אחת: $k = -1$

33 $p = -6$, $q = 9$

34 $y = (x-2)^2 - 3$; $(2-\sqrt{3},0)$, $(2+\sqrt{3},0)$

35 $k = 1$; $k = 0$

36 $a > 9$

37 $2 < x < 3$

פרק 3 סיכומון סוף פרק – הבסיס – פרבולה

צורות הפרבולה

- כללית: $y=ax^2+bx+c$; $a>0$ – "מחייכת", $a<0$ – "בוכה".
- קודקודית: $y=a(x-p)^2+k$, הקודקוד (p,k).
- מכפלה: $y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

חיוביות ושליליות

- חיובית – הגרף מעל ציר x, שלילית – מתחת.
- $a>0$: שלילית בין השורשים, חיובית מחוץ להם (ולהפך כש-$a<0$).
- $\Delta<0$: חיובית תמיד ($a>0$) או שלילית תמיד ($a<0$).

קודקוד

- שיעור ה-x של הקודקוד: $x=-\frac{b}{2a}$, ואת y מציבים בפונקציה.
- הקודקוד באמצע בין נקודות החיתוך: $\frac{x_1+x_2}{2}$.
- $a>0$ – הקודקוד מינימום; $a<0$ – מקסימום.

עלייה וירידה

- משתנה רק בקודקוד: $a>0$ – יורדת עבור $x<p$ ועולה עבור $x>p$.
- $a<0$ – הפוך: עולה עבור $x<p$ ויורדת עבור $x>p$.

נקודות חיתוך

- עם ציר y: $(0,c)$.
- עם ציר x: פותרים $ax^2+bx+c=0$ – לפי Δ שתיים, אחת או אף אחת.

פרבולה וישר

- משווים: $ax^2+bx+c=mx+n$ ומקבלים משוואה ריבועית.
- שני פתרונות – חותך, פתרון אחד ($\Delta=0$) – משיק, אין – לא נפגשים.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לשכוח את המינוס ב-$-\frac{b}{2a}$.
- $y=(x-3)^2$: הקודקוד ב-$x=3$, לא ב-$x=-3$.
- לבלבל בין תחום חיוביות (לפי השורשים) לתחום עלייה (לפי הקודקוד).
- לרשום תחום עם y במקום עם x.

💡 **הטיפ של אילון:** בכל שאלת פרבולה – קודם סקיצה עם הקודקוד והשורשים. כמעט כל סעיף נפתר מקריאה נכונה של הסקיצה.

פרק 4

גיאומטריה – משולשים, זוויות, שטחים והיקפים

מהזוויות הבסיסיות ועד דמיון ושטחים – כל משפטי המשולש במקום אחד

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

4.1	זוויות וידע כללי	35 תרגילים
4.2	חפיפת משולשים	33 תרגילים
4.3	משולש שווה שוקיים	34 תרגילים
4.4	משולש ישר זווית – פיתגורס, תיכון ליתר, 30-60-90	33 תרגילים
4.5	קטעי אמצעים ומפגש תיכונים, גבהים וחוצי זווית	33 תרגילים
4.6	דמיון משולשים ושטחים	34 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

▶ קורס גיאומטריה – מבוא ותיאוריה
YouTube · 12:55

▶ איך עושים טענה ונימוק בגיאומטריה?
YouTube · 11:03

▶ כל משפטי משולש ישר זווית
YouTube · 10:16

▶ כל משפטי השטחים בגיאומטריה
YouTube · 8:56

המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

מעבדת המשולש

גררו את קודקודי המשולש וראו בזמן אמת: קטע אמצעים שווה לחצי הצלע, מפגש התיכונים מחלק ביחס 1 : 2, ותיכון ליתר שווה לחצי היתר.

4.1 זוויות וידע כללי

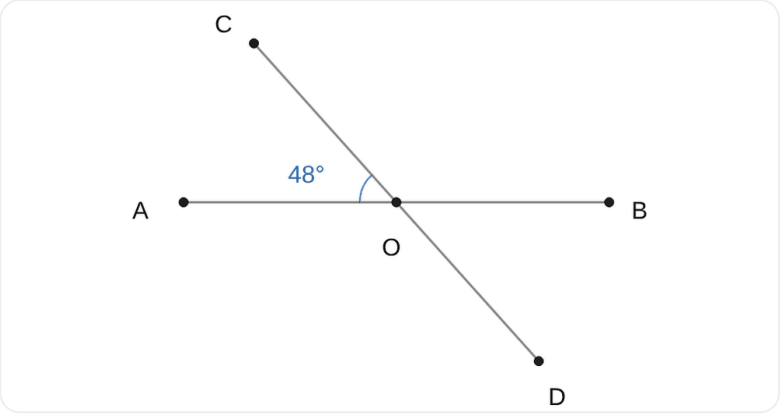
זוויות קודקודיות שוות, זוויות צמודות משלימות ל-$180°$, בין ישרים מקבילים: מתאימות ומתחלפות שוות וחד-צדדיות משלימות ל-$180°$. סכום זוויות משולש $180°$, וסכום זוויות מצולע $180°(n-2)$.

צפו לפני שמתחילים:

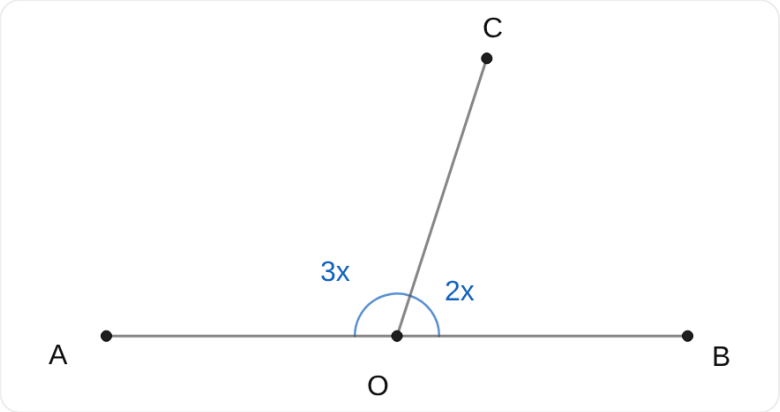
קורס גיאומטריה – מבוא ותיאוריה
YouTube · 12:55

כל הגיאומטריה כיתה ח – סיכום
YouTube · 17:37

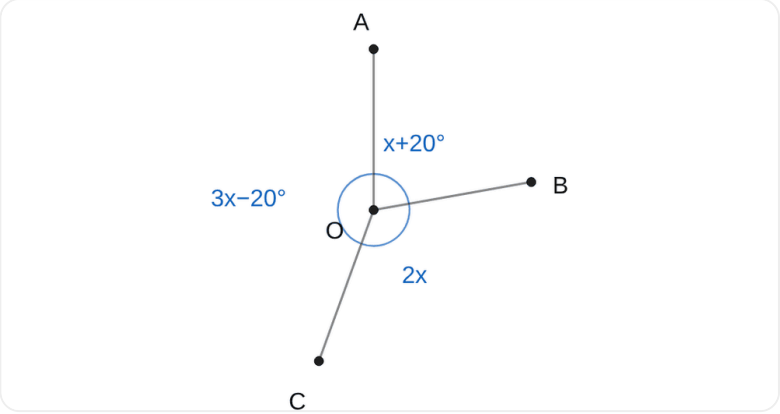
1 הישרים AB ו-CD נחתכים בנקודה O. נתון: $\sphericalangle AOC = 48°$. מצאו את $\sphericalangle BOD$ ואת $\sphericalangle AOD$.



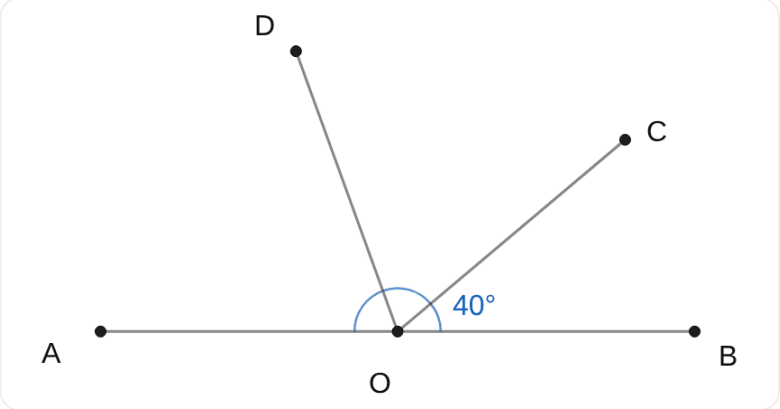
2 הנקודות A, O, B נמצאות על ישר אחד. נתון: $\sphericalangle AOC = 3x$, $\sphericalangle COB = 2x$. מצאו את x ואת שתי הזוויות.



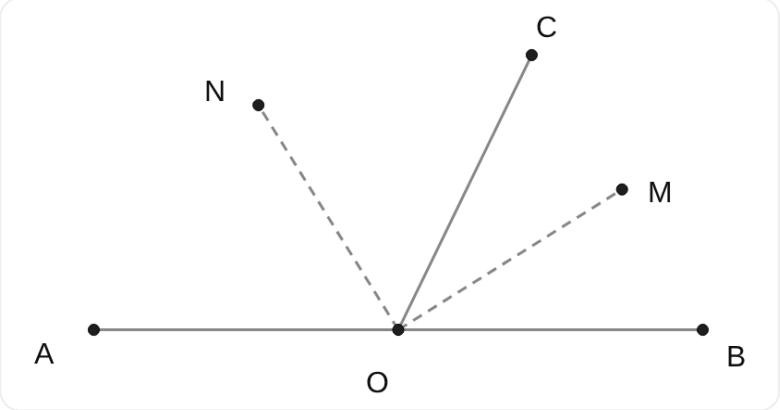
3 שלוש קרניים OA, OB, OC יוצאות מהנקודה O ומחלקות את הזווית השלמה לשלוש זוויות: $\sphericalangle AOB = x + 20°$, $\sphericalangle BOC = 2x$, $\sphericalangle COA = 3x - 20°$. מצאו את שלוש הזוויות.



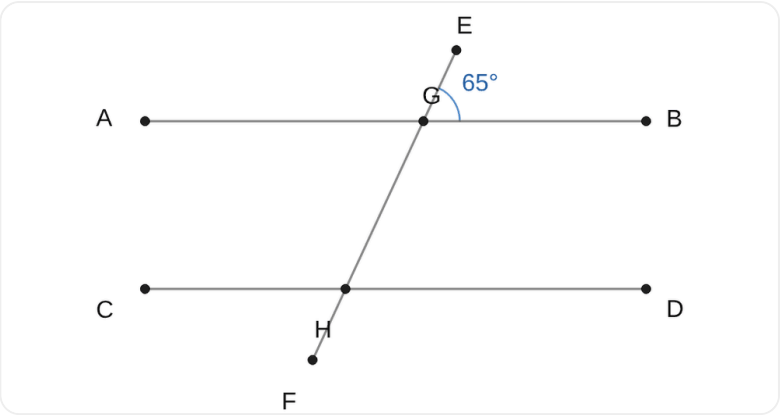
4 A, O, B על ישר אחד. $\sphericalangle COB = 40°$, והקרן OD חוצה את $\sphericalangle AOC$. מצאו את $\sphericalangle AOD$ ואת $\sphericalangle DOB$.



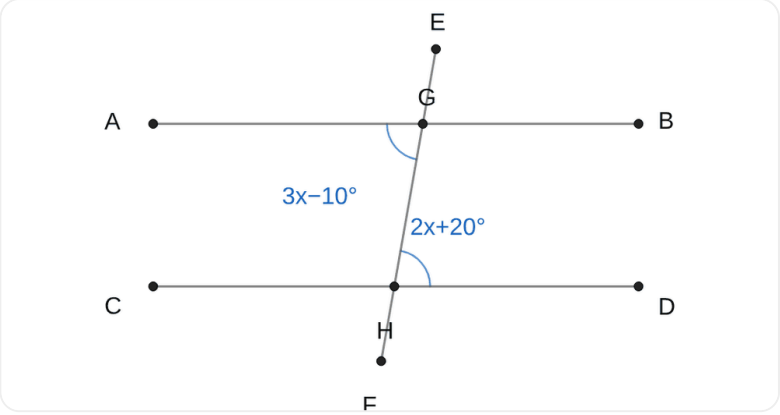
5 A, O, B על ישר אחד, ו-OC קרן כלשהי. OM חוצה את $\sphericalangle COB$ ו-ON חוצה את $\sphericalangle AOC$. הוכיחו ש-$OM \perp ON$, כלומר מצאו את $\sphericalangle MON$.



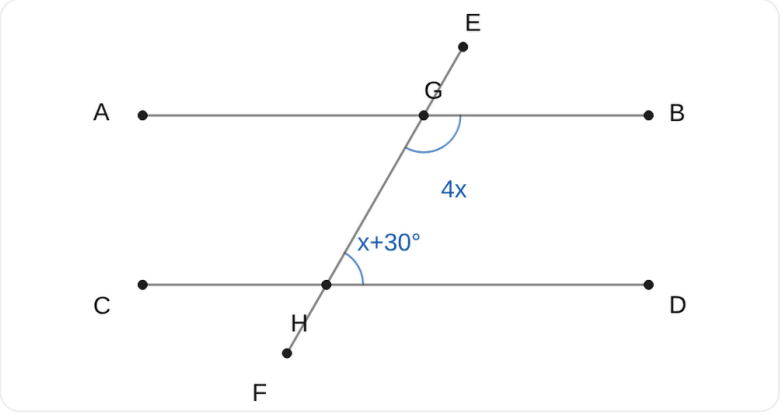
6 $AB \parallel CD$ והישר EF חותך אותם בנקודות G ו-H. נתון: $\sphericalangle EGB = 65°$. מצאו את $\sphericalangle GHD$ ואת $\sphericalangle GHC$.



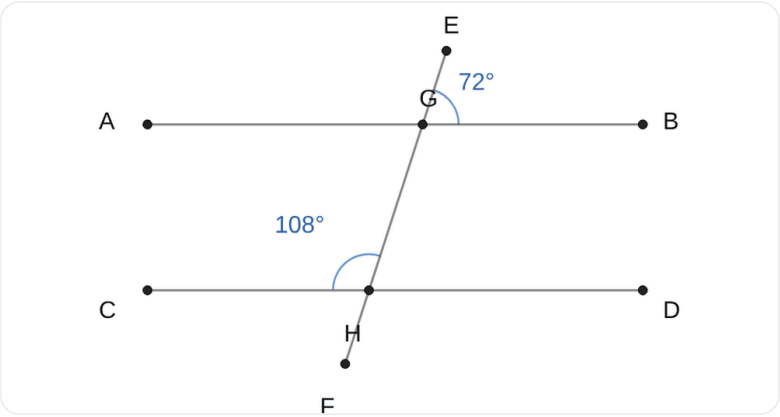
7 $AB \parallel CD$. נתון: $\sphericalangle AGH = 3x - 10°$ ו-$\sphericalangle GHD = 2x + 20°$. מצאו את x ואת גודל הזוויות.



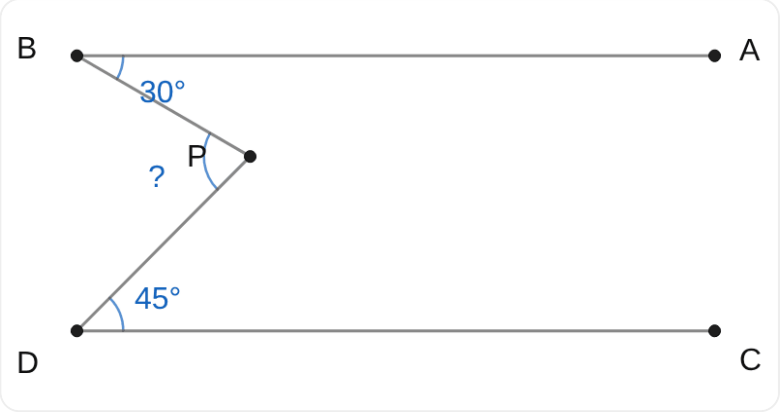
8 $AB \parallel CD$. נתון: $\sphericalangle BGH = 4x$ ו-$\sphericalangle GHD = x + 30°$. מצאו את שתי הזוויות.



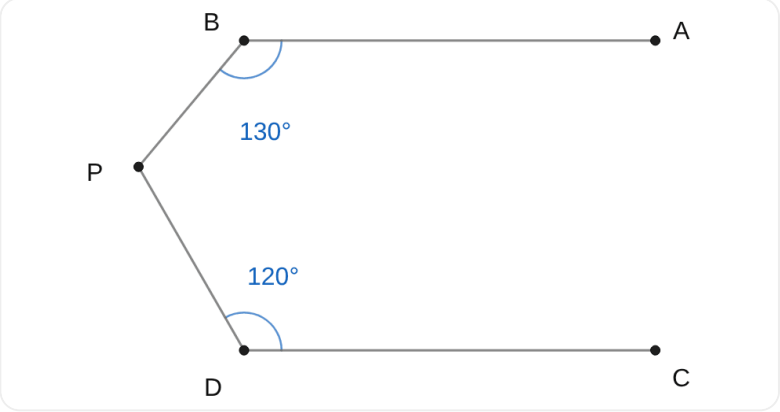
9 הישר EF חותך את הישרים AB ו-CD. נתון: $\sphericalangle EGB = 72°$, $\sphericalangle GHC = 108°$. האם $AB \parallel CD$? נמקו.



10 $AB \parallel CD$, והנקודה P נמצאת בין הישרים. נתון: $\sphericalangle ABP = 30°$, $\sphericalangle CDP = 45°$. מצאו את $\sphericalangle BPD$ (רמז: העבירו דרך P ישר מקביל).

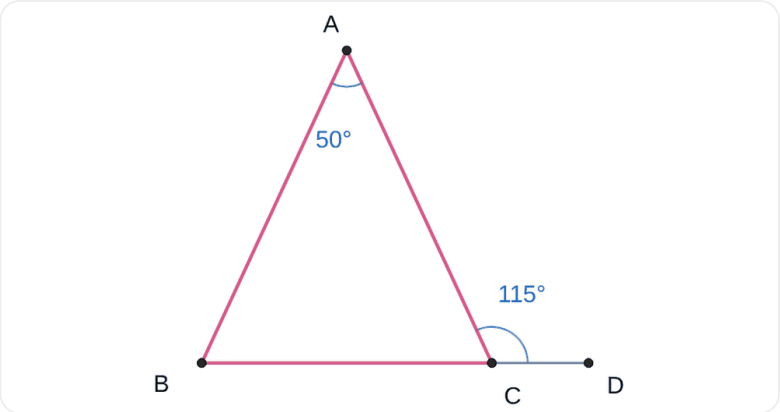


11 $AB \parallel CD$ והנקודה P בין הישרים, משמאל ל-B ול-D. נתון: $\sphericalangle ABP = 130°$, $\sphericalangle CDP = 120°$ (הזוויות נפתחות לכיוון A ו-C). מצאו את $\sphericalangle BPD$.



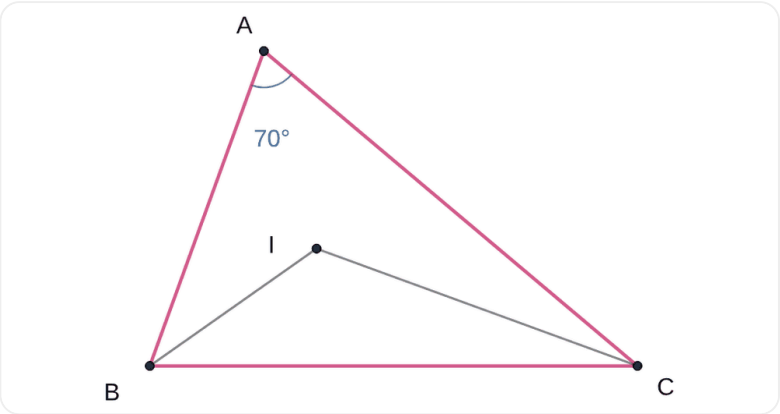
12 במשולש ABC הזוויות מתייחסות זו לזו כמו $1:2:3$. מצאו את זוויות המשולש. איזה סוג משולש זה?

13 במשולש ABC הנקודה D על המשך BC. נתון: $\sphericalangle ACD = 115^\circ$, $\sphericalangle A = 50^\circ$. מצאו את $\sphericalangle B$.

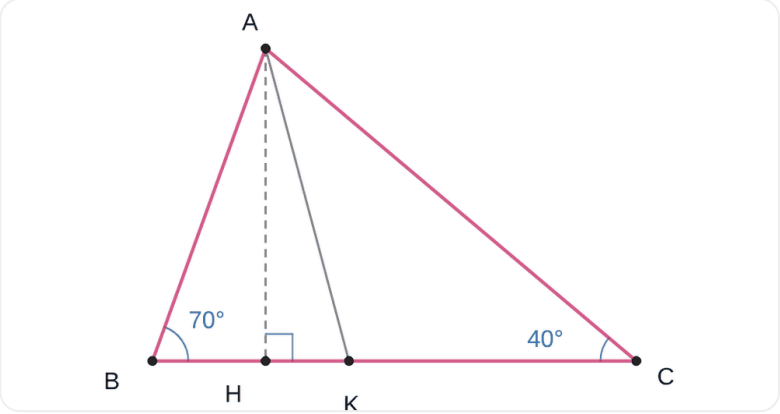


14 שתי זוויות חיצוניות של משולש (בשני קודקודים שונים) הן 110° ו-130°. מצאו את שלוש הזוויות הפנימיות ואת הזווית החיצונית השלישית.

15 במשולש ABC נתון $\sphericalangle A = 70^\circ$. חוצי הזוויות B ו-C נפגשים בנקודה I. מצאו את $\sphericalangle BIC$. הראו שהתשובה אינה תלויה בגודל $\sphericalangle B$.



16 במשולש ABC: $\sphericalangle B = 70°$, $\sphericalangle C = 40°$. AH גובה ו-AK חוצה זווית. מצאו את הזווית $\sphericalangle HAK$ שבין הגובה לחוצה.



17 מהו סכום הזוויות הפנימיות של מחומש? מהו גודל כל זווית במשושה משוכלל?

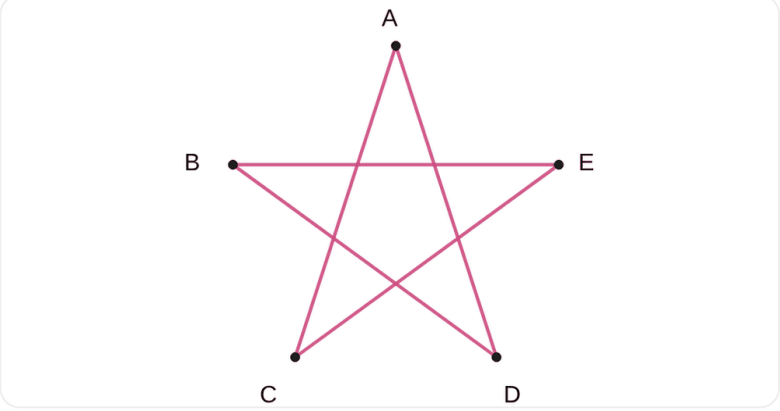
18 כל זווית פנימית של מצולע משוכלל היא $150°$. כמה צלעות יש למצולע?

19 הזווית החיצונית של מצולע משוכלל היא $24°$. כמה צלעות יש לו, ומהו סכום זוויותיו הפנימיות?

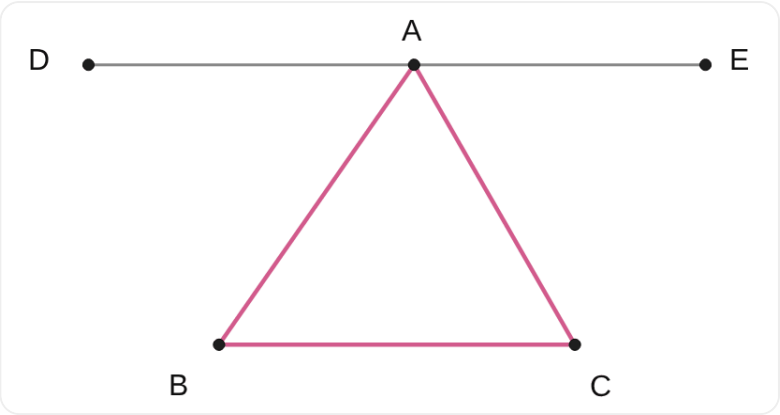
20 סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור הוא $1440°$. כמה צלעות יש למצולע?

21 זוויות מרובע קמור מתייחסות כמו $2:3:4:6$. מצאו את זוויות המרובע ואת ההפרש בין הזווית הגדולה לקטנה.

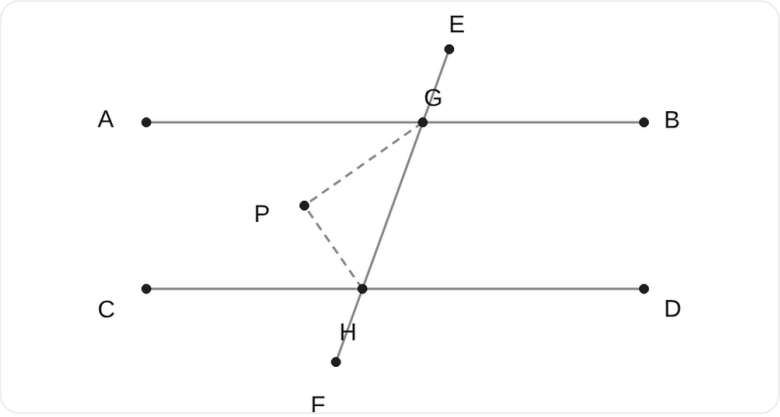
22 בציור כוכב בעל חמישה קודקודים A, B, C, D, E. מצאו את סכום חמש הזוויות שבקודקודי הכוכב.



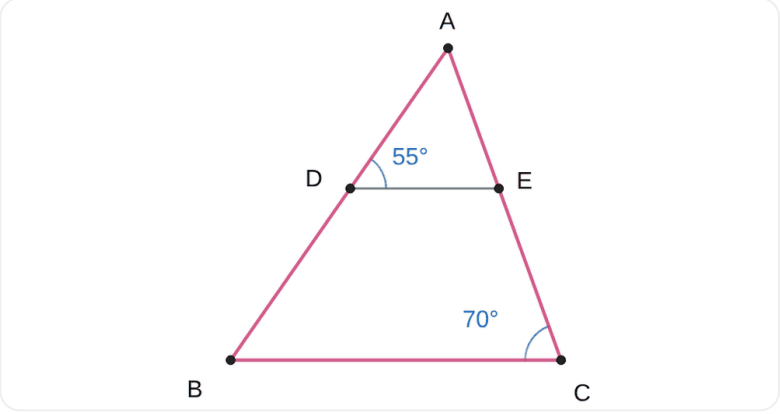
23 דרך הקודקוד A של משולש ABC מעבירים ישר $DE \parallel BC$. בעזרת הציור הוכיחו שסכום זוויות המשולש הוא $180°$. באילו זוויות שוות השתמשתם?



24 $AB \parallel CD$ והישר EF חותך אותם ב-G וב-H. חוצי הזוויות $\sphericalangle AGH$ ו-$\sphericalangle CHG$ נפגשים בנקודה P. מצאו את $\sphericalangle GPH$.



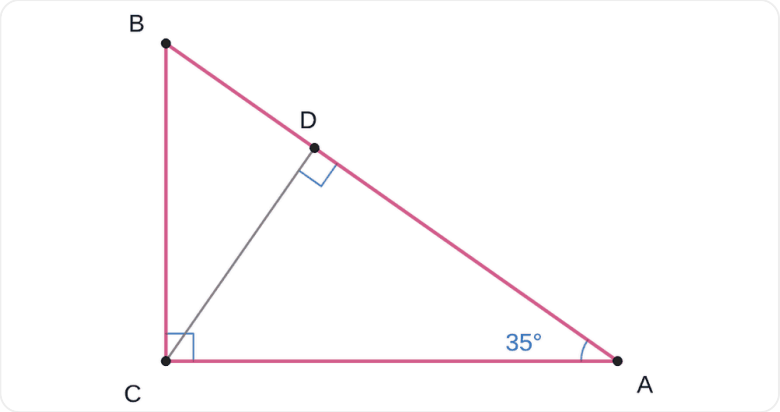
25 במשולש ABC: $DE \parallel BC$ (D על AB, E על AC). נתון: $\sphericalangle ADE = 55°$, $\sphericalangle C = 70°$. מצאו את $\sphericalangle A$ ואת $\sphericalangle DEC$.



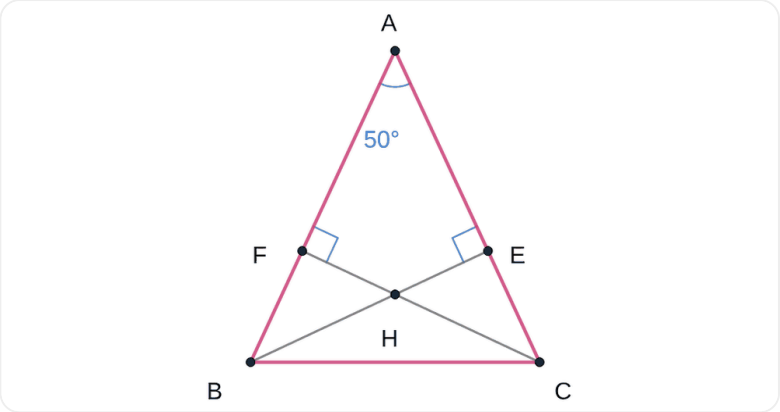
26 הוכיחו שחוצה זווית פנימית וחוצה הזווית החיצונית הצמודה לה (באותו קודקוד של משולש) מאונכים זה לזה.

27 במשולש ABC: $\sphericalangle A = x + 10^\circ$, $\sphericalangle B = 2x - 5^\circ$, והזווית החיצונית ליד C היא $4x - 25^\circ$. מצאו את x ואת שלוש הזוויות הפנימיות.

28 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$) נתון $\sphericalangle A = 35^\circ$. CD הוא הגובה ליתר. מצאו את $\sphericalangle BCD$ ואת $\sphericalangle ACD$.



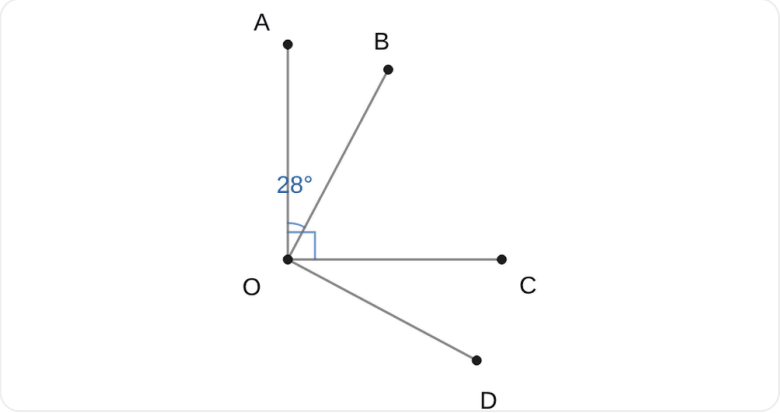
29 במשולש חד-זווית ABC נתון $\sphericalangle A = 50^\circ$. הגבהים BE ו-CF נחתכים בנקודה H. מצאו את $\sphericalangle BHC$.



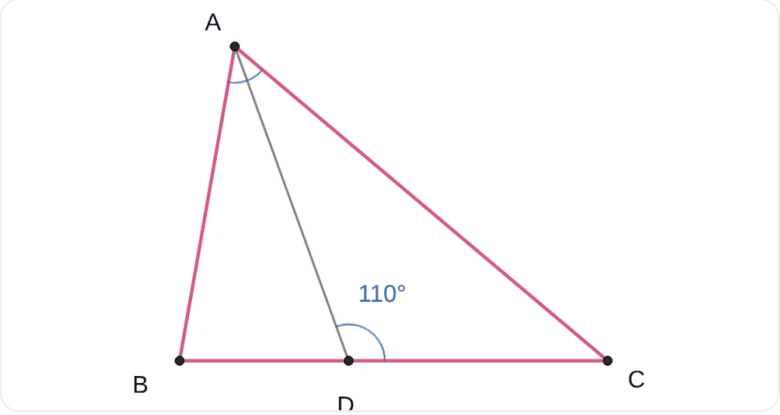
30 במשושה קמור חמש זוויות הן בנות 115° כל אחת. מצאו את הזווית השישית.

31 מצאו זווית שהזווית הצמודה לה (המשלימה ל-180°) גדולה פי 4 מהזווית המשלימה אותה ל-90°.

32 בציור: $OA \perp OC$ ו-$OB \perp OD$. נתון: $\sphericalangle AOB = 28°$. מצאו את $\sphericalangle COD$ ואת $\sphericalangle BOC$.



33 במשולש ABC: AD חוצה את $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B = 2\sphericalangle C$ ו-$\sphericalangle ADC = 110°$. מצאו את זוויות המשולש.



34 האם קיים מצולע משוכלל שכל זווית פנימית שלו היא $130°$? נמקו.

35 במשולש ABC הזווית $\sphericalangle A$ גדולה ב-$20°$ מ-$\sphericalangle B$, ו-$\sphericalangle C$ קטנה פי 2 מסכום שתיהן. מצאו את זוויות המשולש.

✔ תשובות סופיות – נושא 4.1

1. $\sphericalangle BOD = 48^\circ$ (קודקודיות), $\sphericalangle AOD = 132^\circ$ (צמודות)
2. $x = 36^\circ$; $\sphericalangle AOC = 108^\circ$, $\sphericalangle COB = 72^\circ$
3. $x = 60^\circ$; 80°, 120°, 160°
4. $\sphericalangle AOD = 70^\circ$, $\sphericalangle DOB = 110^\circ$
5. $\sphericalangle MON = 90^\circ$ – חצי מ-180° (חוצי זויות צמודות)
6. $\sphericalangle GHD = 65^\circ$ (מתאימות), $\sphericalangle GHC = 115^\circ$
7. $x = 30^\circ$; שתיהן 80° (מתחלפות)
8. $x = 30^\circ$; $\sphericalangle BGH = 120^\circ$, $\sphericalangle GHD = 60^\circ$ (חד-צדדיות)
9. כן: $\sphericalangle GHD = 72^\circ = \sphericalangle EGB$ (מתאימות שוות)
10. $\sphericalangle BPD = 75^\circ$
11. $\sphericalangle BPD = 110^\circ$
12. 30°, 60°, 90° – משולש ישר זווית
13. $\sphericalangle B = 65^\circ$ (זווית חיצונית שווה לסכום שתי הפנימיות שאינן צמודות לה)
14. פנימיות: 70°, 50°, 60° ; החיצונית השלישית: 120°
15. $\sphericalangle BIC = 90^\circ + \frac{\sphericalangle A}{2} = 125^\circ$
16. $\sphericalangle HAK = 15^\circ$ (בכלליות: $\frac{\sphericalangle B - \sphericalangle C}{2}$)
17. 540° ; 120°
18. 12 צלעות
19. 15 צלעות ; 2340°
20. 10 צלעות
21. 48°, 72°, 96°, 144° ; הפרש 96°
22. 180°
23. $\sphericalangle DAB = \sphericalangle B$ ו-$\sphericalangle EAC = \sphericalangle C$ (מתחלפות), ושלוש הזוויות ב-A יוצרות 180°

24	$\sphericalangle GPH = 90°$ (חצי מסכום זוויות חד-צדדיות)
25	$\sphericalangle A = 55°$, $\sphericalangle DEC = 110°$
26	הזווית ביניהם $90°$ – חצי מ- $180°$
27	$x = 30°$; $\sphericalangle A = 40°$, $\sphericalangle B = 55°$, $\sphericalangle C = 85°$
28	$\sphericalangle BCD = 35°$, $\sphericalangle ACD = 55°$
29	$\sphericalangle BHC = 130°$ $(180° - \sphericalangle A)$
30	$145°$
31	$60°$
32	$\sphericalangle COD = 28°$, $\sphericalangle BOC = 62°$
33	$\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 80°$, $\sphericalangle C = 40°$
34	לא: הזווית החיצונית $50°$, ו- $360 : 50 = 7.2$ אינו מספר שלם
35	$\sphericalangle A = 70°$, $\sphericalangle B = 50°$, $\sphericalangle C = 60°$

4.2 חפיפת משולשים

ארבעת משפטי החפיפה: צ.ז.צ, ז.צ.ז, צ.צ.צ, וצ.צ.ז – כאשר הזווית מול הצלע הגדולה מבין השתיים. אחרי החפיפה – כל הצלעות והזוויות המתאימות שוות.

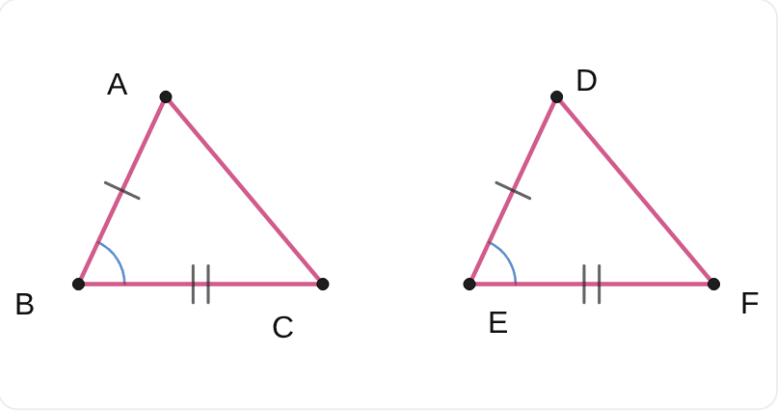
צפו לפני שמתחילים:

חפיפת משולשים – הסבר ותרגול
YouTube · 8:56

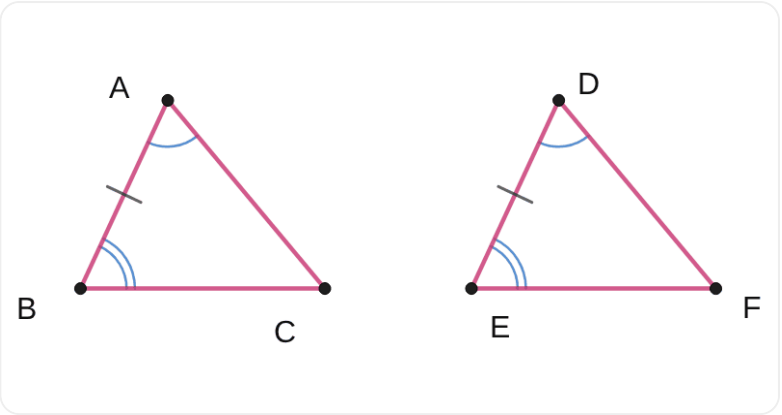
משפט חפיפה רביעי (צ.צ.ז)
YouTube · 8:53

חפיפת משולשים – כל המשפטים
YouTube · 10:49

1 נתון: $AB = DE$, $BC = EF$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$. האם $\triangle ABC \cong \triangle DEF$? לפי איזה משפט?

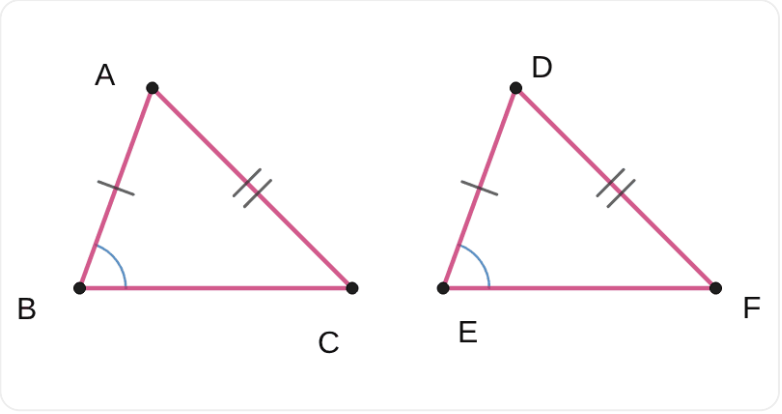


2 נתון: $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, $AB = DE$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$. לפי איזה משפט המשולשים ABC ו-DEF חופפים? איזו צלע ב-$\triangle DEF$ שווה ל-AC?



3 נתון: $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$. לפי איזה משפט המשולשים חופפים?
אם $\sphericalangle A = 70^\circ$, מהי הזווית השווה לה במשולש DEF?

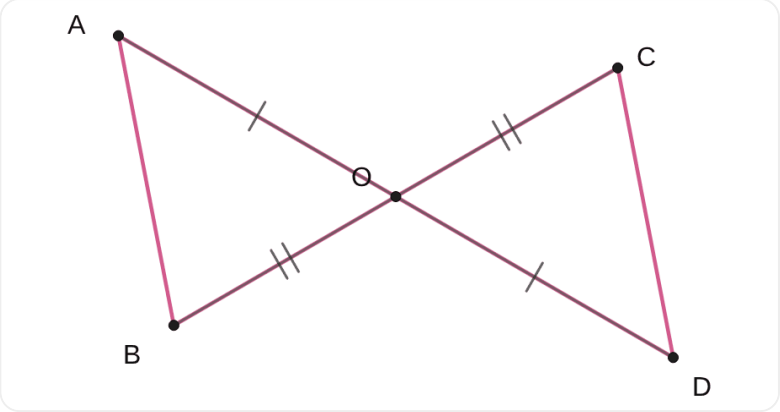
4 נתון: $AB = DE = 8$, $AC = DF = 10$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$. האם המשולשים חופפים?
לפי איזה משפט? (שימו לב מול איזו צלע נמצאת הזווית.)



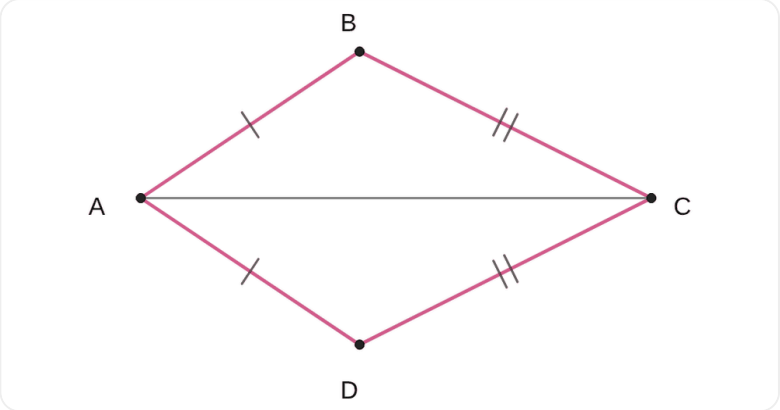
5 נתון: $AB = DE = 10$, $AC = DF = 7$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E = 40^\circ$. האם אפשר לקבוע שהמשולשים חופפים? נמקו.

6 שני משולשים שבהם שלוש הזוויות שוות בהתאמה. האם הם בהכרח חופפים? מה כן אפשר לומר עליהם?

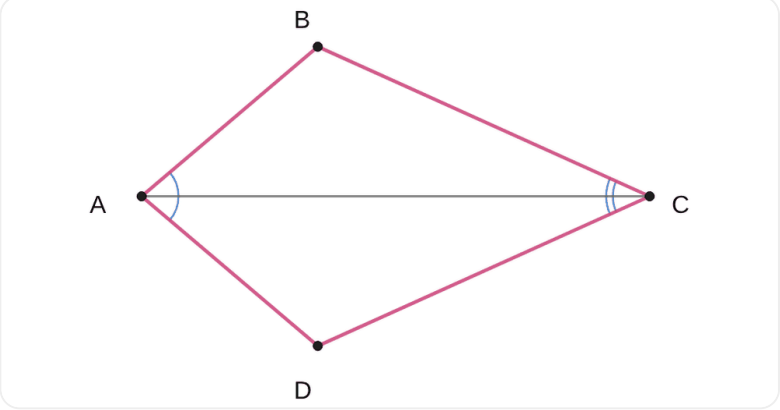
7 הקטעים AD ו-BC נחתכים בנקודה O, ו-O היא אמצע של כל אחד מהם. הוכיחו ש-$\triangle AOB \cong \triangle DOC$. אם $AB = 7$, מצאו את DC.



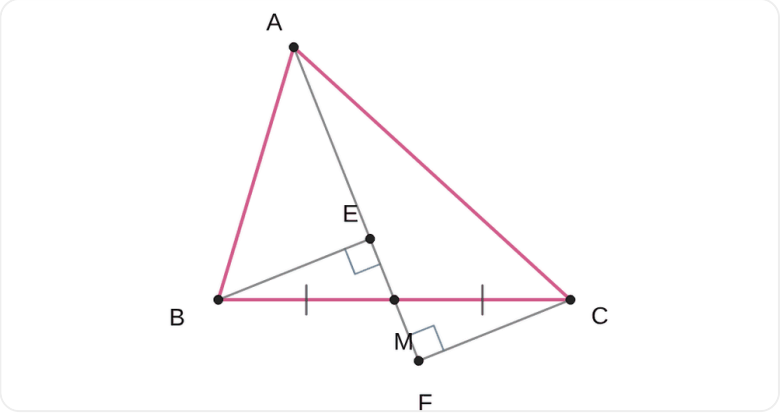
8 במרובע $ABCD$: $AB = AD$, $CB = CD$. הוכיחו ש-$\triangle ABC \cong \triangle ADC$. אם $\sphericalangle BAD = 80°$, מצאו את $\sphericalangle BAC$.



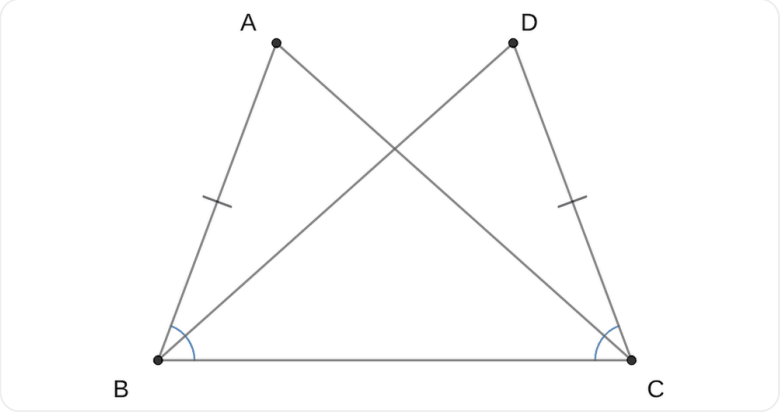
9 במרובע $ABCD$ האלכסון AC חוצה את $\sphericalangle A$ ואת $\sphericalangle C$. נתון: $AB = 5$, $BC = 8$. מצאו את היקף המרובע. לפי איזה משפט חפיפה השתמשתם?



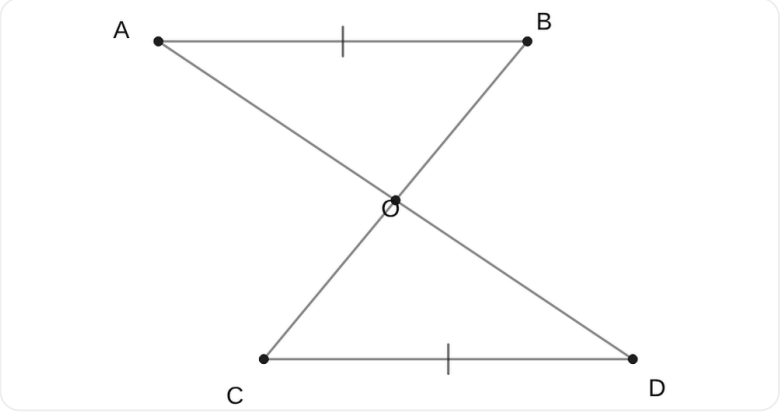
10 במשולש ABC, AM תיכון. מהקודקודים B ו-C מורידים אנכים לישר AM: BE ו-CF. הוכיחו ש-$BE = CF$. באילו נתונים השתמשתם?



11 A ו-D באותו צד של BC, כך ש-$AB = DC$ ו-$\sphericalangle ABC = \sphericalangle DCB$. הוכיחו ש-$AC = DB$. אם $AC = 9$, מצאו את DB.

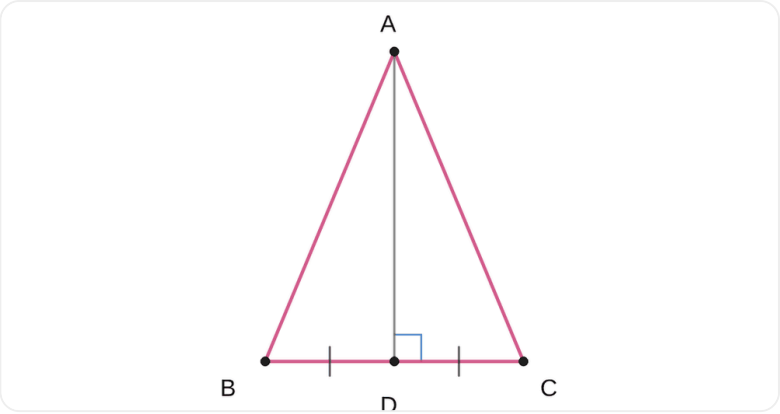


12 $AB \parallel CD$ ו-$AB = CD$. הקטעים AD ו-BC נחתכים בנקודה O. הוכיחו ש-O אמצע AD. אם $AD = 12$, מצאו את AO.

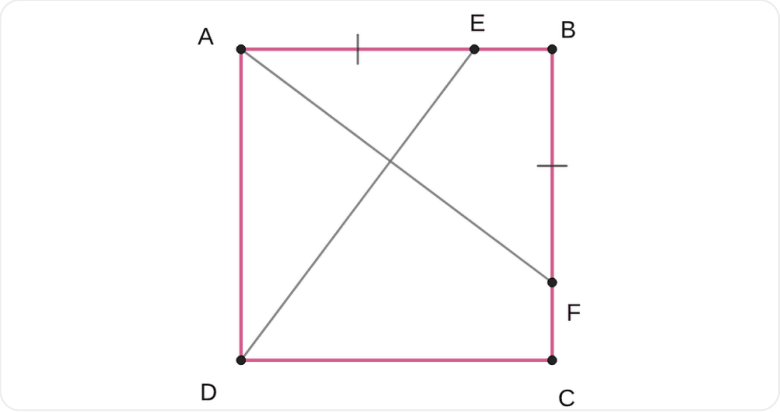


13 במשולשים ABC ו-DEF: $AB = DE = 8$, $AC = DF = 10$,
$\sphericalangle B = \sphericalangle E = 70°$, $BC = 11$. מצאו את EF ואת $\sphericalangle F$ אם $\sphericalangle C = 40°$.

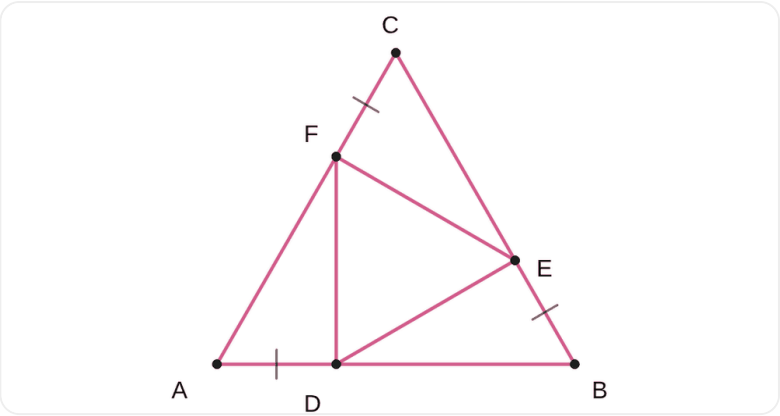
14 במשולש ABC, $AD \perp BC$ ו-$BD = DC$. הוכיחו ש-$AB = AC$. אם
$AB = 13$ ו-$BD = 5$, מצאו את היקף המשולש.



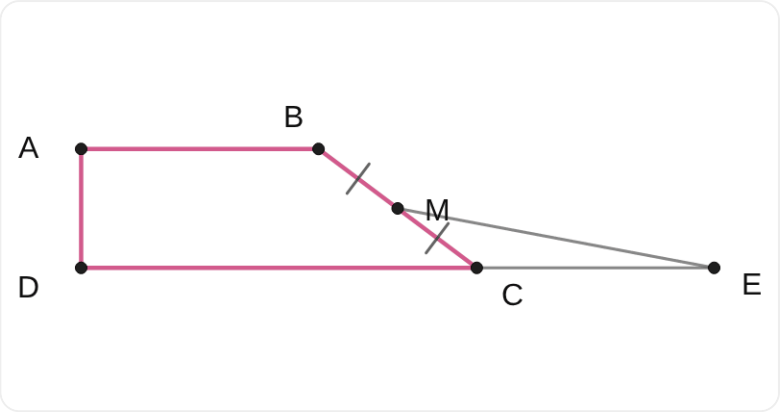
15 $ABCD$ ריבוע שצלעו 4. E על AB ו-F על BC, כך ש-$AE = BF = 3$.
הוכיחו ש-$DE = AF$ ומצאו את אורכם.



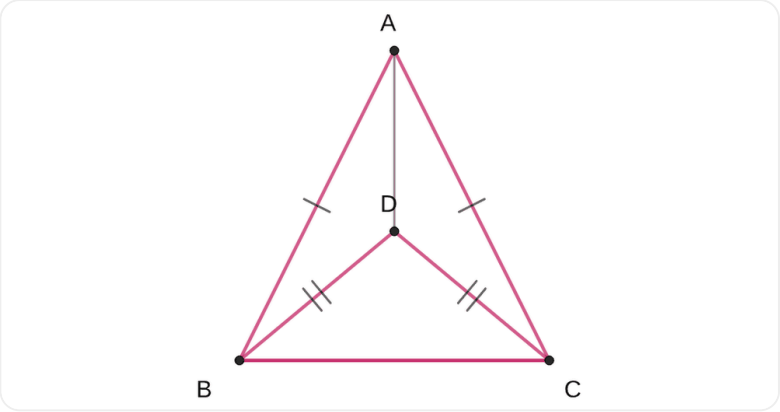
16 ABC משולש שווה צלעות. על הצלעות AB, BC, CA מסמנים נקודות D, E, F כך ש-$AD = BE = CF$. הוכיחו ש-$\triangle DEF$ שווה צלעות.



17 בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$), M אמצע השוק BC. הישר AM חותך את המשך DC בנקודה E. הוכיחו ש-$AB = CE$. אם $AB = 6$ ו-$DC = 10$, מצאו את DE.

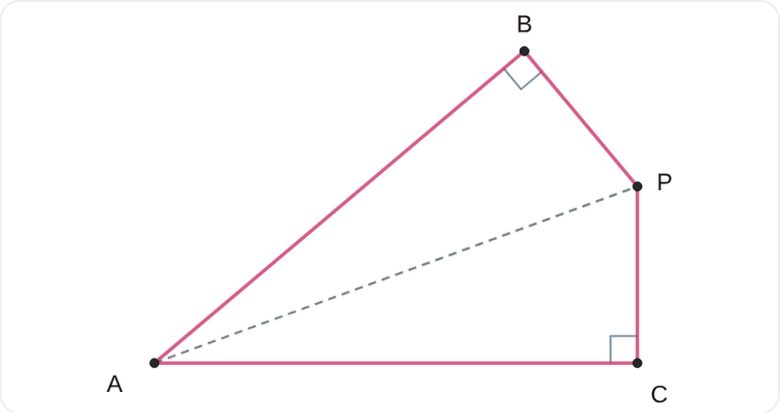


18 ABC ו-DBC משולשים שווי שוקיים על אותו בסיס BC (A ו-D באותו צד). הוכיחו ש-AD חוצה את $\sphericalangle BAC$. אם $\sphericalangle BAC = 50°$, מצאו את $\sphericalangle BAD$.

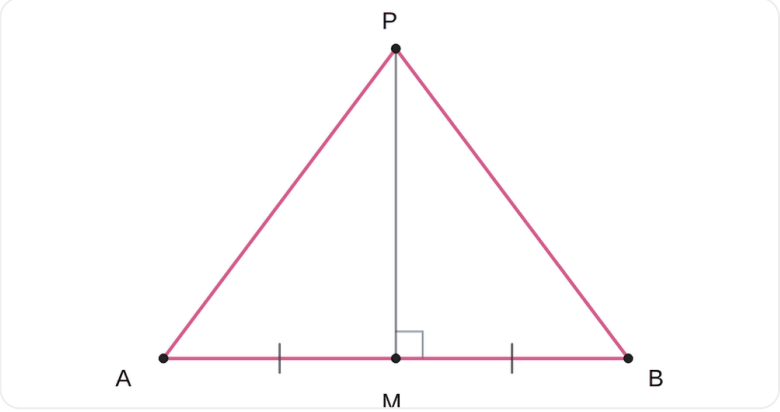


19 נתון: $AB = DE$ ו- $\sphericalangle A = \sphericalangle D$. איזה נתון נוסף דרוש כדי להוכיח חפיפה של $\triangle ABC$ ו- $\triangle DEF$ לפי צ.ז.צ? ואיזה לפי ז.צ.ז?

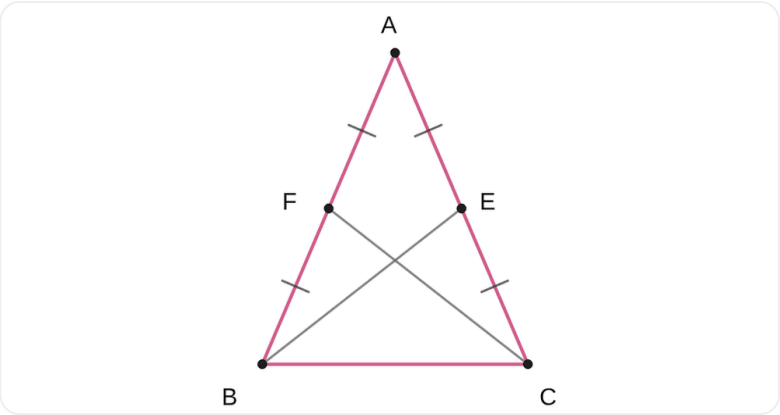
20 הנקודה P נמצאת על חוצה הזווית $\sphericalangle A$. PB ו- PC אנכים לשוקי הזווית. הוכיחו ש- $PB = PC$ ו- $AB = AC$. אם $PB = 4$, מצאו את PC.



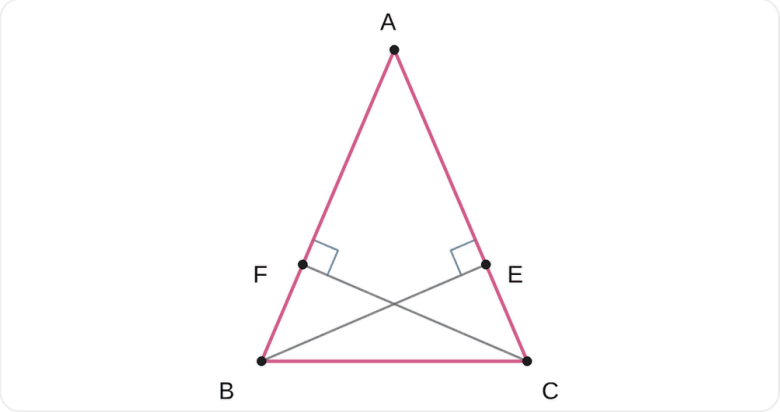
21 הנקודה P נמצאת על האנך האמצעי לקטע AB (M אמצע AB). הוכיחו ש- $PA = PB$. אם $PA = 7$, מהו PB? ואם $AB = 6$ ו- $PM = 4$ – מהו PA?



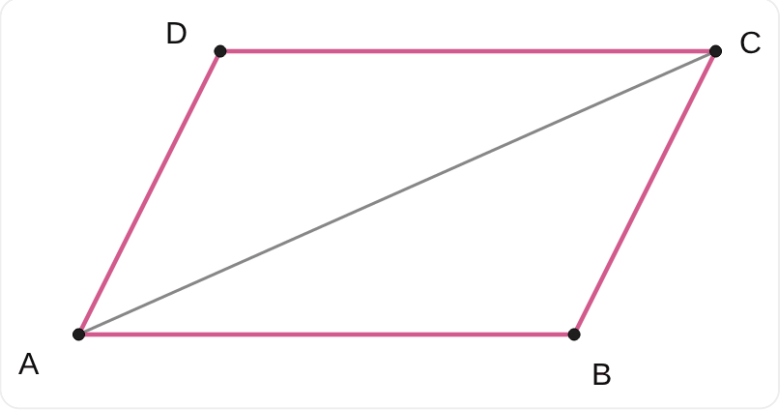
22 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$), BE ו-CF תיכונים לשוקיים. הוכיחו ש-$BE = CF$. אם $BE = 9$, מצאו את CF.



23 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$), BE ו-CF גבהים לשוקיים. הוכיחו ש-$BE = CF$. אם $CF = 6$, מהו BE?

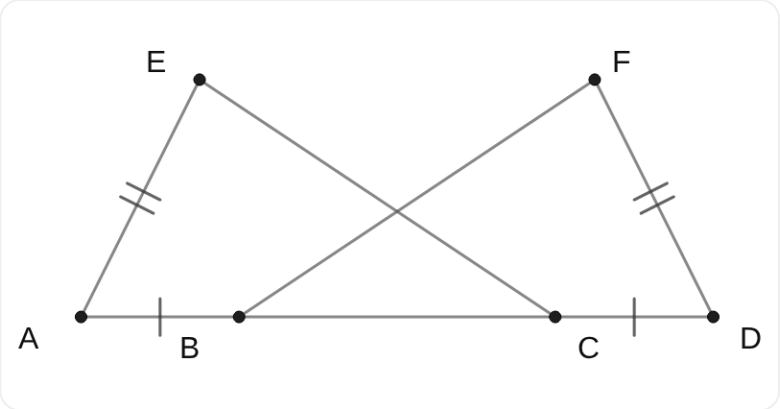


24 במרובע $ABCD$: $DC \parallel AB$ ו-$AD \parallel BC$. הוכיחו ש-$\triangle ABC \cong \triangle CDA$. אם $AB = 7$ ו-$BC = 4$, מצאו את היקף המרובע.



25 כמה משולשים שונים (לא חופפים) קיימים שבהם $AB=8$, $AC=6$, $\sphericalangle B=40^\circ$?
(רמז: הזווית נתונה מול הצלע הקטנה)

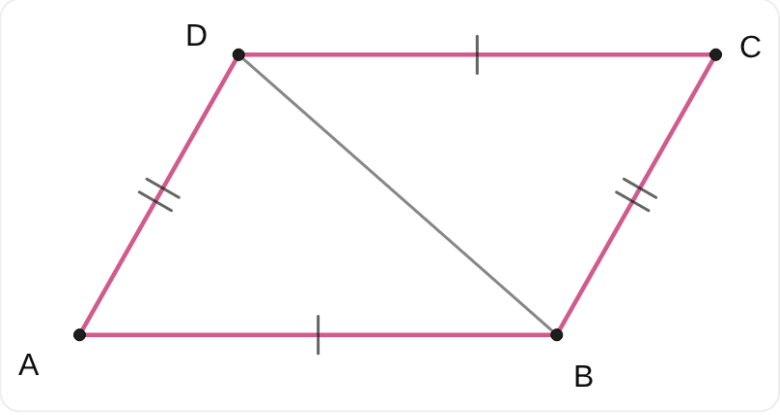
26 הנקודות A,B,C,D על ישר אחד, ו-$AB=CD$. E ו-F באותו צד של הישר, $AE=DF$ ו-$\sphericalangle EAD=\sphericalangle FDA$. הוכיחו ש-$CE=BF$. אם $CE=10$, מצאו את BF.



27 נתון: $AB=AD$, $AC=AE$ ו-$\sphericalangle BAC=\sphericalangle DAE$. הוכיחו ש-$BC=DE$. אם $\sphericalangle ABC=65^\circ$, מצאו את $\sphericalangle ADE$.

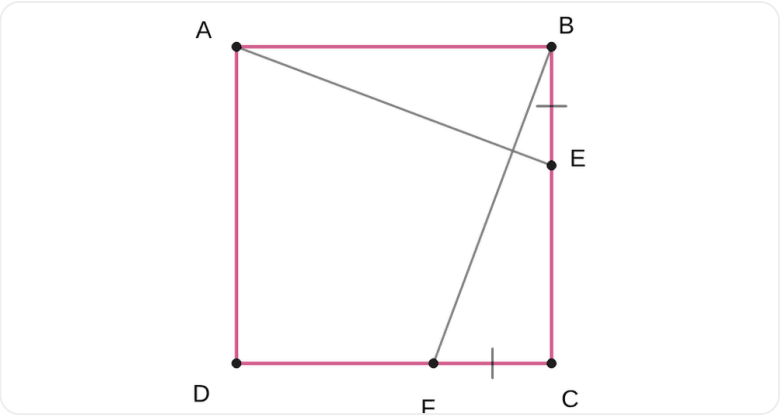
28 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB=AC$) מורידים גובה AD לבסיס. הוכיחו בעזרת משפט החפיפה הרביעי ש-$BD=DC$. אם $BC=14$, מצאו את BD.

29 במרובע $ABCD$: $AB=CD$ ו-$AD=BC$. הוכיחו ש-$\sphericalangle A=\sphericalangle C$ ושה-$AB\parallel CD$. אם $\sphericalangle A=110^\circ$, מצאו את $\sphericalangle C$.

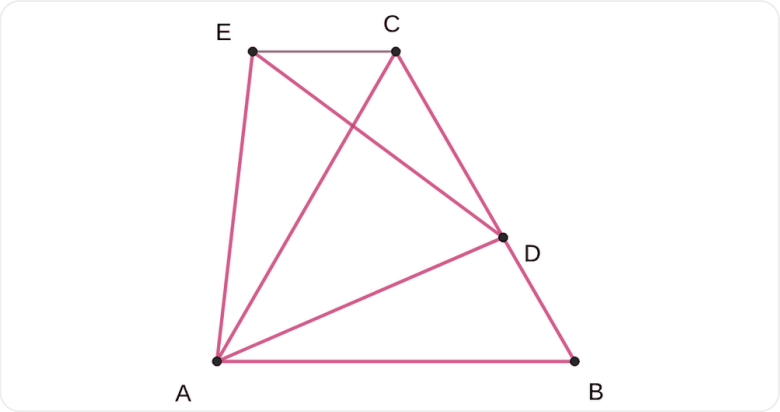


30 במשולשים ABC ו-DEF: $AB=DE=9$, $BC=EF=7$, $\sphericalangle C=\sphericalangle F$.
האם המשולשים חופפים? נמקו.

31 $ABCD$ ריבוע. E על BC ו-F על CD כך ש-$BE=CF$. הוכיחו ש-$AE\perp BF$. מהי הזווית בין AE ל-BF?



32 ABC משולש שווה צלעות ו-D נקודה על BC. בונים משולש שווה צלעות ADE (E מחוץ ל-$\triangle ABC$). הוכיחו ש-$CE=BD$. אם $BD=3$, מצאו את CE ואת $\sphericalangle ACE$.



33 הסבירו מדוע "צ.צ.ז" כאשר הזווית מול הצלע הגדולה מבטיח חפיפה, ואילו מול הצלע הקטנה – לא. מה קורה כשהזווית ישרה?

✔ תשובות סופיות – נושא 4.2

1. כן – צ.ז.צ
2. $DF = AC$; ז.צ.ז
3. $\sphericalangle D = 70^\circ$; צ.צ.צ
4. כן – משפט החפיפה הרביעי (צ.צ.ז): הזווית מול הצלע הגדולה מבין השתיים
5. לא בהכרח – הזווית נמצאת מול הצלע הקטנה (יש שני משולשים אפשריים)
6. לא – הם דומים (ייתכן שבגודל שונה)
7. $DC = 7$; צ.ז.צ (זוויות קודקודיות)
8. $\sphericalangle BAC = 40^\circ$; צ.צ.צ
9. היקף 26 ; ז.צ.ז
10. $\triangle BEM \cong \triangle CFM$ (ז.צ.ז: זווית ישרה, זוויות קודקודיות ו- $BM = CM$)
11. $DB = 9$; צ.ז.צ (BC משותפת)
12. $AO = 6$; ז.צ.ז (זוויות מתחלפות)
13. $EF = 11$, $\sphericalangle F = 40^\circ$ (חפיפה לפי צ.צ.ז)
14. היקף 36 ; צ.ז.צ
15. $\triangle DAE \cong \triangle ABF$ (צ.ז.צ) ; $DE = AF = 5$
16. $\triangle ADF \cong \triangle BED \cong \triangle CFE$ (צ.ז.צ) ולכן $DE = EF = FD$
17. $DE = 16$; ז.צ.ז ($\triangle ABM \cong \triangle ECM$)
18. 25° ; צ.צ.צ ($\triangle ABD \cong \triangle ACD$)
19. צ.ז.צ: $AC = DF$; ז.צ.ז: $\sphericalangle B = \sphericalangle E$
20. $\triangle ABP \cong \triangle ACP$ (ז.צ.ז) ; $PC = 4$
21. צ.ז.צ ; $PB = 7$; $PA = 5$
22. $\triangle EBC \cong \triangle FCB$ (צ.ז.צ) ; $CF = 9$
23. $BE = 6$; ז.צ.ז ($\triangle EBC \cong \triangle FCB$)

24 ז.צ.ז ; היקף 22

25 שניים ($\sphericalangle C \approx 59^\circ$ או $\sphericalangle C \approx 121^\circ$)

26 $\triangle ACE \cong \triangle DBF$ (צ.ז.צ, כי $AC = BD$) ; $BF = 10$

27 צ.ז.צ ; $\sphericalangle ADE = 65^\circ$

28 $AB = AC$, AD משותפת, זווית ישרה מול הצלע הגדולה ; $BD = 7$

29 צ.צ.צ ($\triangle ABD \cong \triangle CDB$) ; $\sphericalangle C = 110^\circ$

30 כן – משפט רביעי: $\sphericalangle C$ מול AB , שהיא הצלע הגדולה

31 $\triangle ABE \cong \triangle BCF$ (צ.ז.צ) ; 90°

32 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (צ.ז.צ) ; $CE = 3$, $\sphericalangle ACE = 60^\circ$

33 זווית ישרה תמיד מול הצלע הגדולה (היתר) ולכן תמיד חפיפה

4.3 משולש שווה שוקיים

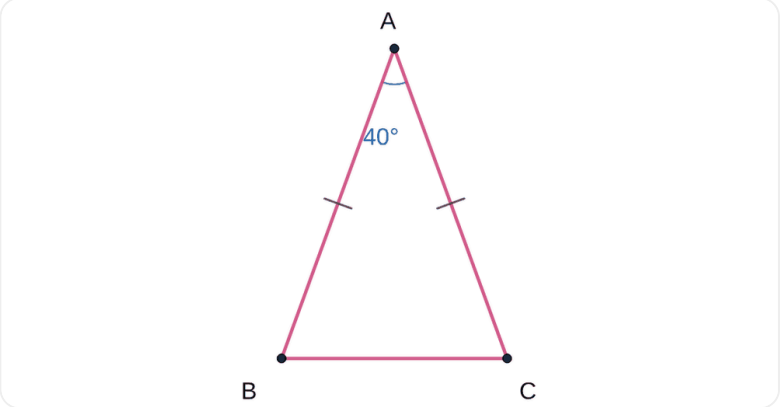
זויות הבסיס שוות (וההפך). במשולש שווה שוקיים התיכון לבסיס, הגובה לבסיס וחוצה זווית הראש – הם אותו קטע.

צפו לפני שמתחילים:

משולש שווה שוקיים – כל מה שצריך לדעת
YouTube · 10:26

משולש שווה שוקיים – קווים מיוחדים
YouTube · 4:47

1 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) זווית הראש $\sphericalangle A = 40°$. מצאו את זויות הבסיס.



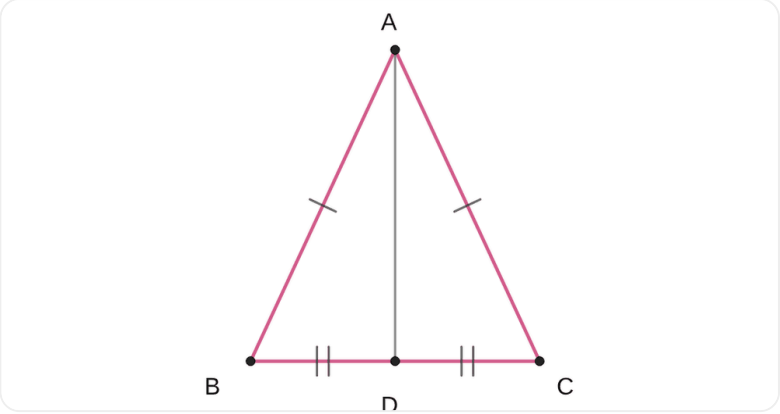
2 במשולש שווה שוקיים זווית הבסיס היא $35°$. מצאו את זווית הראש ואת הזווית החיצונית ליד הבסיס.

3 במשולש שווה שוקיים זווית אחת היא $100°$. מצאו את שתי הזוויות האחרות. מדוע $100°$ לא יכולה להיות זווית בסיס?

4 במשולש שווה שוקיים זווית אחת היא $50°$. מצאו את כל האפשרויות לשתי הזוויות האחרות.

5 במשולש שווה שוקיים זווית הראש גדולה פי 3 מזווית הבסיס. מצאו את זויות המשולש.

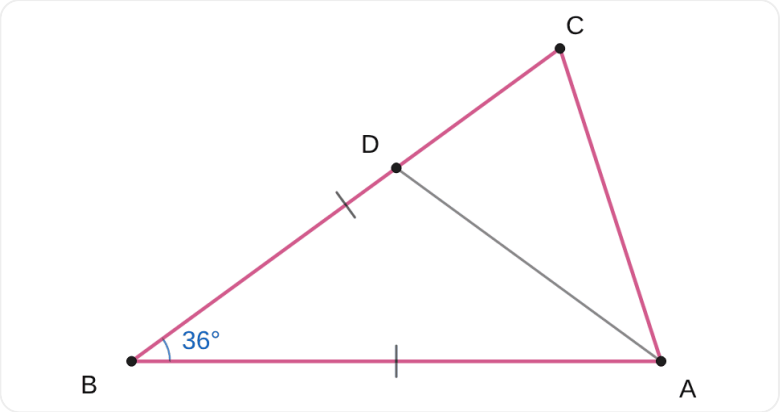
6 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$), AD תיכון לבסיס. נתון $\sphericalangle BAC = 50°$. מצאו את $\sphericalangle BAD$ ואת $\sphericalangle ADB$. איזה משפט השתמשתם בו?



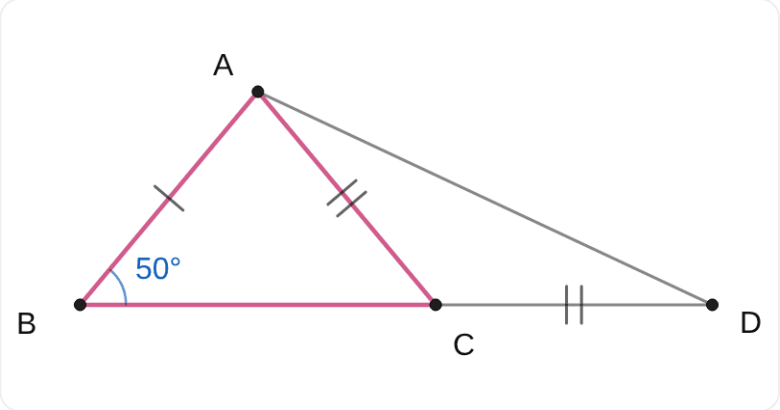
7 משולש שווה שוקיים שבסיסו 10 וגובהו לבסיס 12. מצאו את אורך השוק ואת היקף המשולש.

8 היקף משולש שווה שוקיים הוא 32 והבסיס קצר ב-4 מהשוק. מצאו את צלעות המשולש.

9 במשולש ABC: $BA = BC$ ו-$\sphericalangle B = 36°$. חוצה הזווית $\sphericalangle A$ חותך את BC בנקודה D. הוכיחו ש-$\triangle ADC$ ו-$\triangle ABD$ שווי שוקיים.

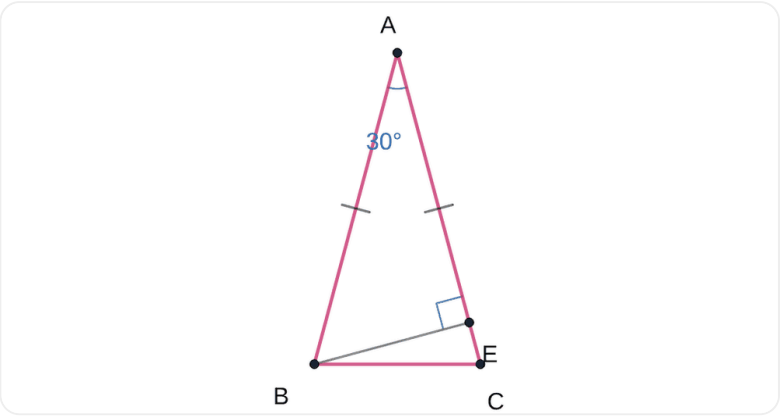


10 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB=AC$) $\sphericalangle B=50^\circ$. על המשך הבסיס BC מעבר ל-C מסמנים נקודה D כך ש-$CD=CA$. מצאו את $\sphericalangle CAD$ ואת $\sphericalangle BAD$.

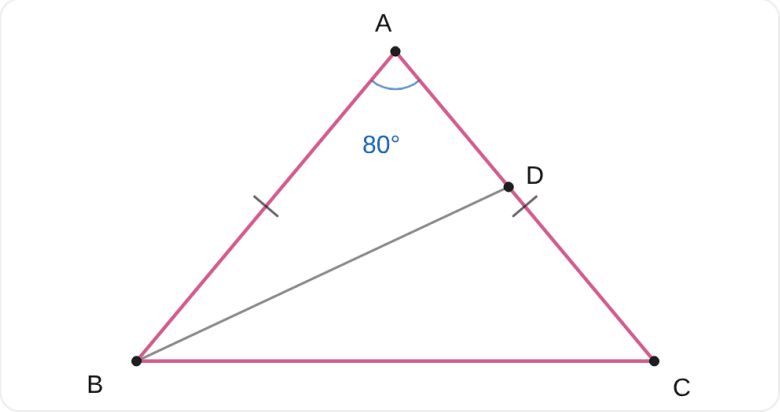


11 במשולש ABC: $\sphericalangle A=70^\circ$, $\sphericalangle B=40^\circ$. האם המשולש שווה שוקיים? אם כן – אילו צלעות שוות?

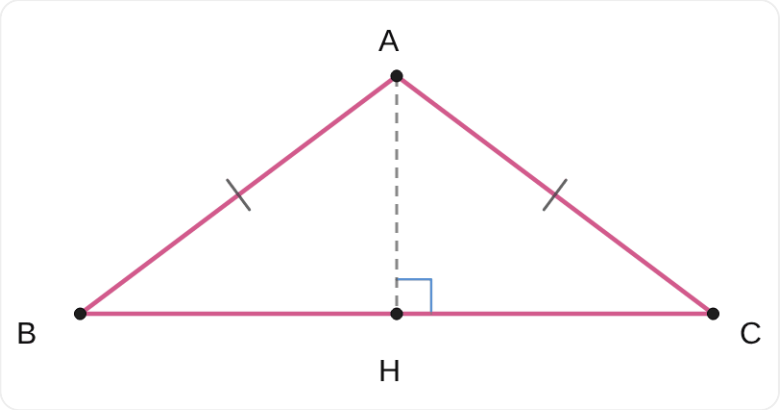
12 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB=AC$) $\sphericalangle A=30^\circ$, ו-$BE$ גובה לשוק AC. מצאו את $\sphericalangle EBC$.



13 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) $\sphericalangle A = 80°$. חוצה הזווית $\sphericalangle B$ חותך את AC בנקודה D. מצאו את $\sphericalangle BDC$ ואת $\sphericalangle ADB$.

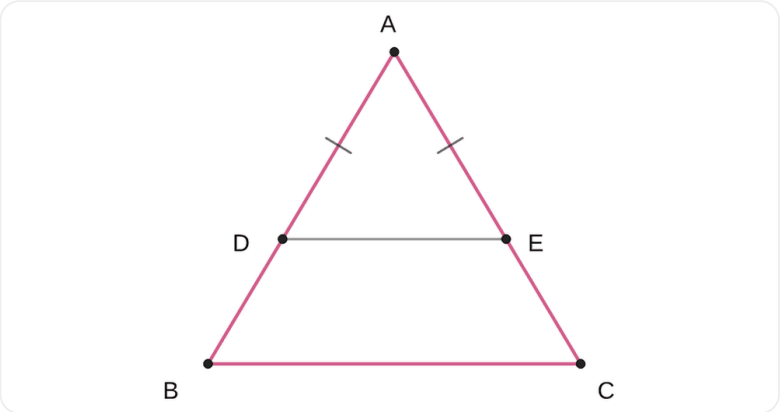


14 משולש שווה שוקיים ששוקו 5 ובסיסו 8. מצאו את הגובה לבסיס ואת שטח המשולש.

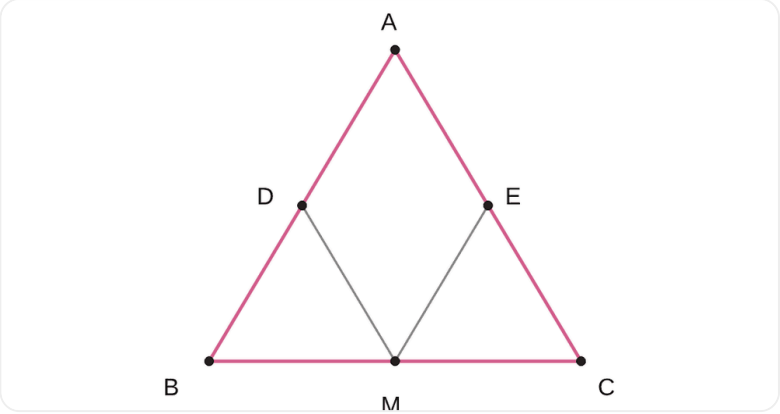


15 הוכיחו שבמשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות ל-$60°$. מה גובהו של משולש שווה צלעות שצלעו 6?

16 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) מסמנים על השוקיים נקודות D, E כך ש-$AD = AE$. הוכיחו ש-$DE \parallel BC$.



17 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB=AC$), M אמצע הבסיס BC. D ו-E אמצעי השוקיים. הוכיחו ש-$MD=ME$.

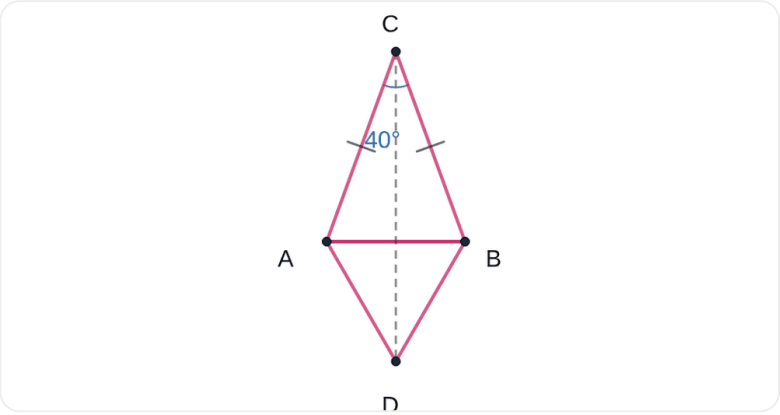


18 במשולש ABC חוצה הזווית AD הוא גם גובה לצלע BC. הוכיחו שהמשולש שווה שוקיים.

19 במשולש ABC התיכון AM שווה למחצית הצלע BC. מצאו את $\sphericalangle BAC$. (רמז: שני משולשים שווי שוקיים)

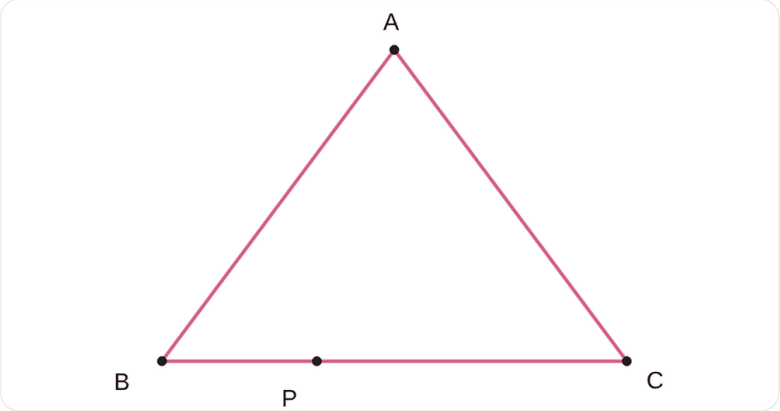
20 הנקודה O נמצאת כך ש-$OA=OB=OC$. נתון: $\sphericalangle OAB=20^\circ$, $\sphericalangle OBC=30^\circ$, $\sphericalangle OCA=40^\circ$. מצאו את זויות $\triangle ABC$.

21 על הצלע AB של משולש שווה שוקיים ABC ($CA=CB$) בונים כלפי חוץ משולש שווה צלעות ABD. אם $\sphericalangle ACB=40^\circ$, מצאו את $\sphericalangle CAD$.



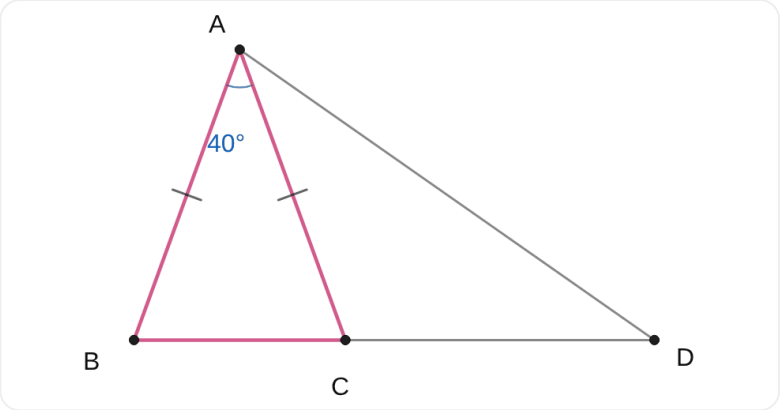
22 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB=AC$) הזווית החיצונית ליד C היא $3x+10^\circ$, וזווית הראש היא $2x-20^\circ$. מצאו את זויות המשולש.

23 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC = 5$, $BC = 6$), נקודה P נמצאת על הבסיס. מסכום המרחקים של P מהשוקיים לא תלוי במיקום P. מצאו סכום זה (רמז: חלקו את השטח).



24 במשולש ABC: $AB = AC$ ו- $\sphericalangle B = 2x$, $\sphericalangle A = x + 30°$. מצאו את x וקבעו אם המשולש חד-זווית, ישר-זווית או קהה-זווית.

25 משולש ABC שווה שוקיים ($AB = AC$). D על המשך BC כך ש- $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ADC$. אם $\sphericalangle BAC = 40°$, מצאו את $\sphericalangle D$.



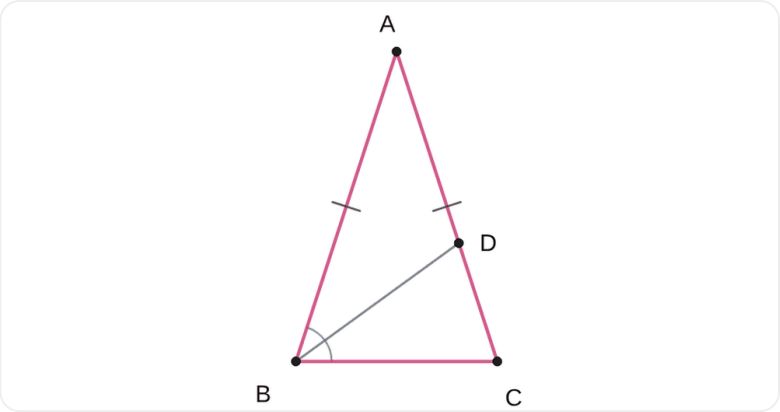
26 במשולש שווה שוקיים הגובה לבסיס הוא 8 והבסיס 12. מצאו את אורך הגובה לשוק.

27 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) נתון $BC = AB$. מהם גודלי הזוויות? איך נקרא המשולש?

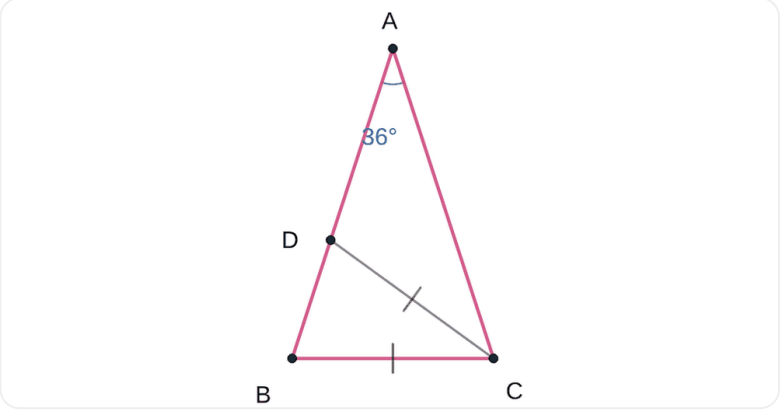
28 הוכיחו: במשולש שבו שני גבהים שווים, המשולש שווה שוקיים.

29 במשולש ABC שווה שוקיים ($AB = AC$) מעבירים ישר מקביל לבסיס החותך את השוקיים ב-D וב-E. הוכיחו ש-$BDEC$ טרפז שווה שוקיים.

30 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) $\sphericalangle B = 72^\circ$, ו-$BD$ חוצה את $\sphericalangle B$ (D על AC). אם $BC = 4$, מצאו את BD ואת AD.

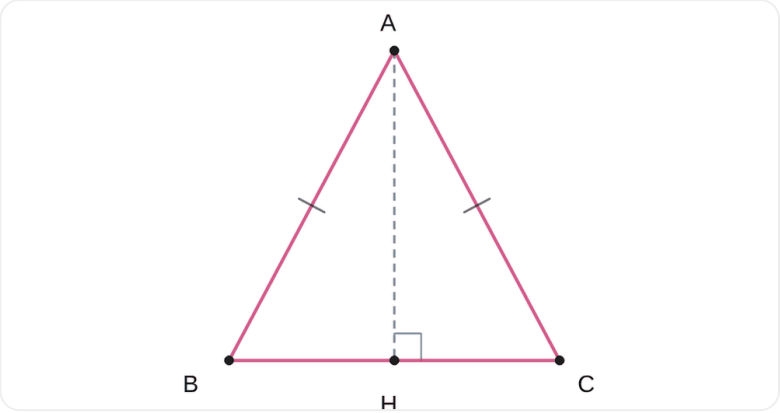


31 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) הנקודה D על AB כך ש-$CD = CB$. אם $\sphericalangle A = 36^\circ$, מצאו את $\sphericalangle ACD$.

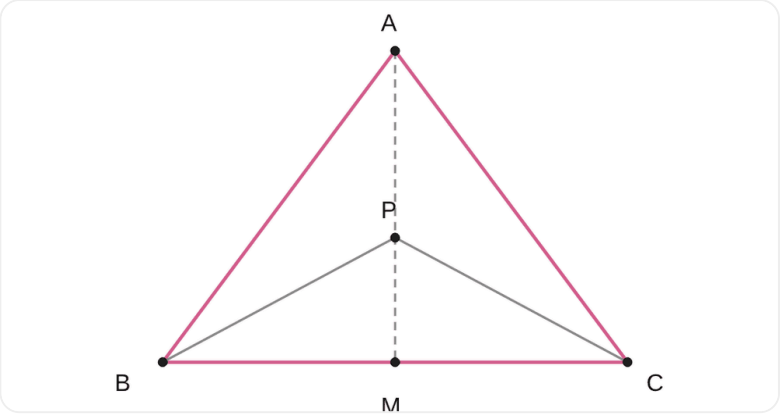


32 זווית הבסיס במשולש שווה שוקיים היא α. הביעו את זווית הראש ואת הזווית שבין הגובה לבסיס לבין השוק.

33 משולש שווה שוקיים, השוק 17 והגובה לבסיס 15. מצאו את הבסיס, ההיקף והשטח.



34 בתוך משולש שווה שוקיים ABC ($AB=AC$) הנקודה P נמצאת על הגובה לבסיס. הוכיחו ש-$PB=PC$ וש-$\sphericalangle PBC=\sphericalangle PCB$.



✔ תשובות סופיות – נושא 4.3

1. 70° כל אחת
2. זווית ראש 110° ; זווית חיצונית 145°
3. 40°, 40° ; שתי זוויות בסיס של 100° יחרגו מ- 180°
4. 50° ו- 80°, או 65° ו- 65°
5. 36°, 36°, 108°
6. $\sphericalangle BAD = 25^\circ$, $\sphericalangle ADB = 90^\circ$; במשולש שו"ש התיכון לבסיס הוא גם גובה וחוצה זווית
7. שוק 13 ; היקף 36
8. שוקיים 12, בסיס 8
9. $\sphericalangle C = \sphericalangle ADC = 72^\circ$ ולכן $AD = AC$; $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BAD = 36^\circ$ ולכן $AD = BD$
10. $\sphericalangle CAD = 25^\circ$, $\sphericalangle BAD = 105^\circ$
11. כן: $\sphericalangle A = 70^\circ = \sphericalangle C$ ולכן $AB = BC$
12. $\sphericalangle EBC = 15^\circ$ (חצי מזווית הראש)
13. $\sphericalangle BDC = 105^\circ$, $\sphericalangle ADB = 75^\circ$
14. גובה 3 ; שטח 12
15. $3\sqrt{3}$
16. $\sphericalangle ADE = \frac{180^\circ - \sphericalangle A}{2} = \sphericalangle B$ – זוויות מתאימות שוות
17. $\triangle BDM \cong \triangle CEM$ (צ.ז.צ)
18. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (ז.צ.ז) ולכן $AB = AC$
19. $\sphericalangle BAC = 90^\circ$
20. $\sphericalangle A = 60^\circ$, $\sphericalangle B = 50^\circ$, $\sphericalangle C = 70^\circ$
21. $\sphericalangle CAD = 130^\circ$
22. $x = 35^\circ$; $\sphericalangle A = 50^\circ$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 65^\circ$ (חיצונית 115°)

23 $\frac{24}{5}=4.8$ (שווה לגובה לשוק)

24 $x=30°$; $60°$, $60°$, $60°$ – שווה צלעות (חד-זווית)

25 $\sphericalangle D=35°$

26 $\frac{48}{5}=9.6$

27 $60°$ כל אחת – שווה צלעות

28 החפיפה $\triangle EBC\cong\triangle FCB$ (משפט רביעי) נותנת $\sphericalangle B=\sphericalangle C$

29 $BD=AB-AD=AC-AE=CE$ ו-$DE\parallel BC$

30 $BD=4$, $AD=4$ (שני משולשים שווי שוקיים)

31 $\sphericalangle ACD=36°$

32 זווית הראש $180°-2\alpha$; הזווית $90°-\alpha$

33 בסיס 16 ; היקף 50 ; שטח 120

34 הגובה לבסיס הוא האנך האמצעי של BC, ולכן $PB=PC$

4.4 משולש ישר זווית – פיתגורס, תיכון ליתר, 90-60-30

$a^2+b^2=c^2$; התיכון ליתר שווה למחצית היתר ; מול זווית של 30° – ניצב השווה למחצית היתר. לכל משפט יש גם משפט הפוך.

צפו לפני שמתחילים:

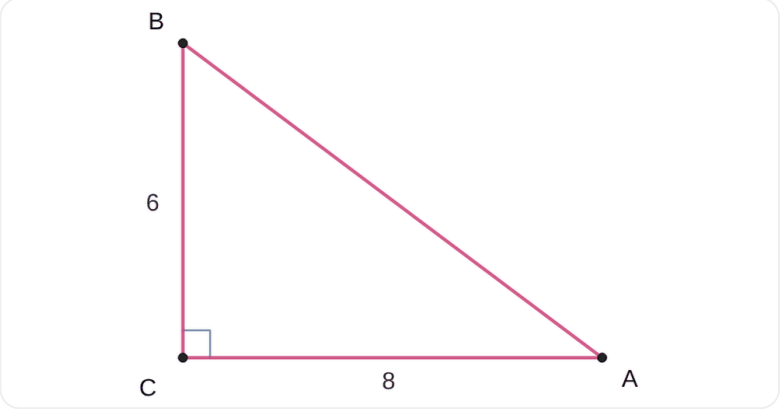
כל משפטי משולש ישר זווית
YouTube · 10:16

הוכחת משפט פיתגורס
YouTube · 8:06

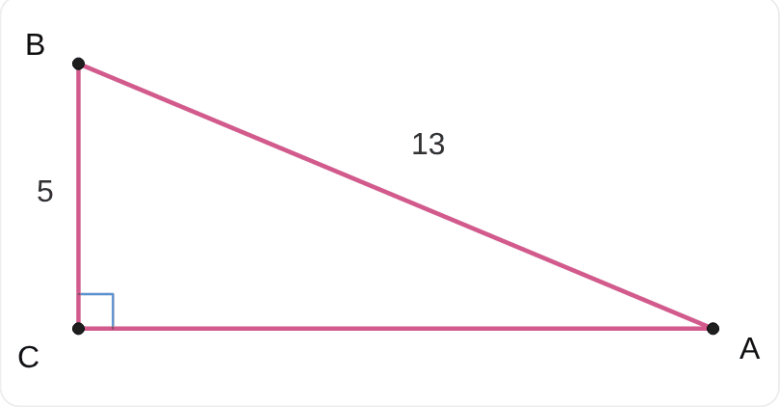
שלשות פיתגוריות
YouTube · 7:11

הוכחת משפט תיכון ליתר
YouTube · 1:53

1 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C=90^\circ$): $AC=8$, $BC=6$. מצאו את היתר AB.



2 במשולש ישר זווית היתר 13 וניצב אחד 5. מצאו את הניצב השני ואת שטח המשולש.



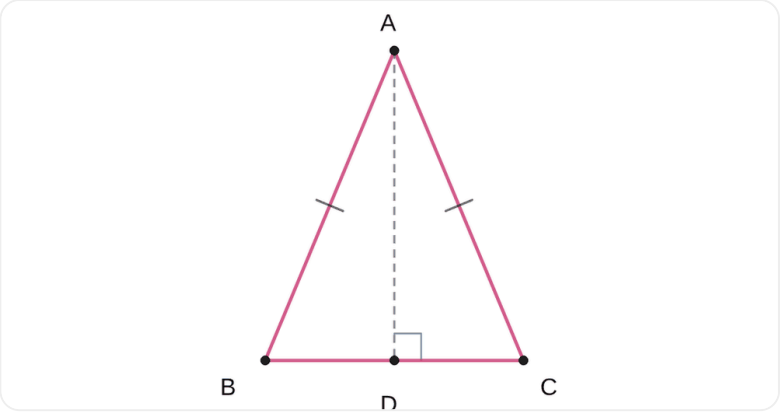
3 ניצבי משולש ישר זווית הם 3 ו-3. מצאו את היתר.

4 האם משולש שצלעותיו 7, 24, 25 ישר זווית? ומשולש שצלעותיו 6, 8, 11?

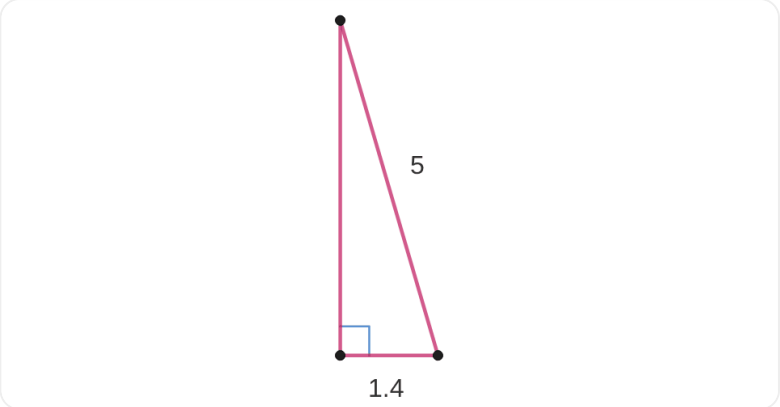
5 אלכסון ריבוע הוא 10. מצאו את צלע הריבוע ואת שטחו.

6 מלבן שאורכו 15 ואלכסונו 17. מצאו את רוחבו ואת היקפו.

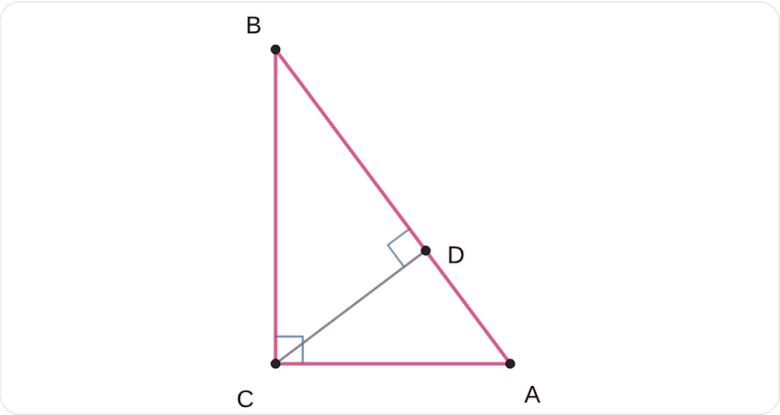
7 במשולש שווה שוקיים השוק 13 והבסיס 10. מצאו את הגובה לבסיס בעזרת משפט פיתגורס.



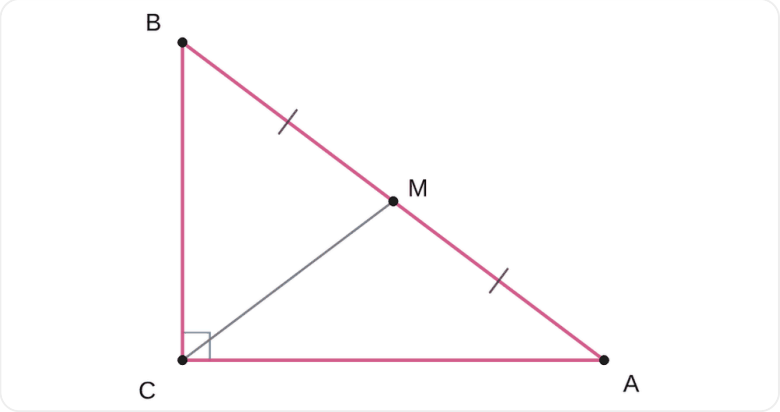
8 סולם באורך 5 מטר נשען על קיר, ורגלו במרחק 1.4 מטר מהקיר. לאיזה גובה מגיע הסולם?



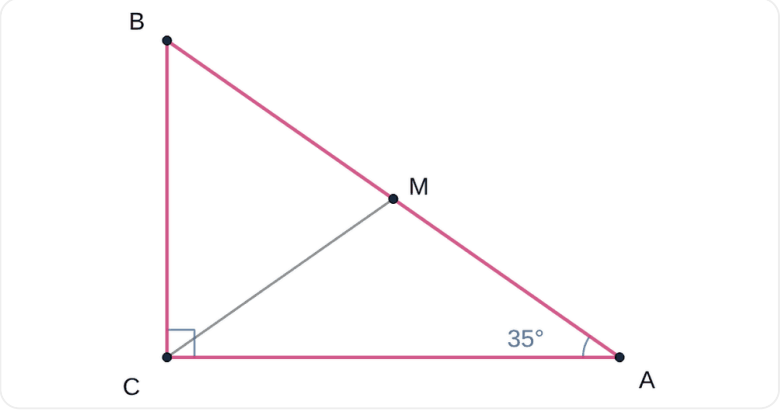
9 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90°$): $AC = 9$, $BC = 12$. הגובה ליתר CD.
מצאו את AB, את CD ואת AD.



10 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90°$): $AC = 8$, $BC = 6$, ו- CM התיכון ליתר.
מצאו את CM.

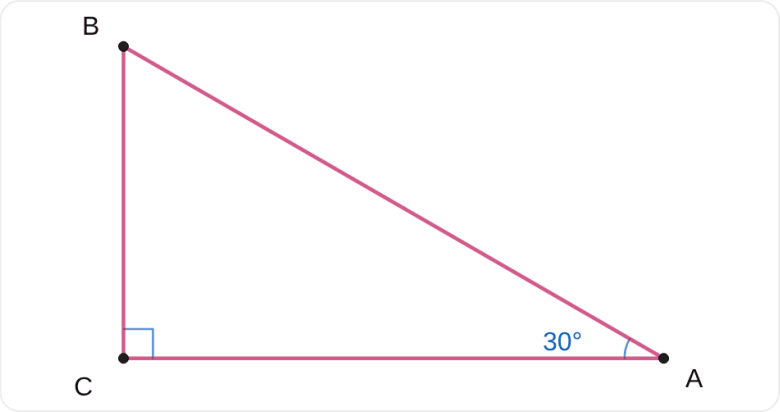


11 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90°$), CM תיכון ליתר ו- $\sphericalangle A = 35°$. מצאו את
$\sphericalangle MCA$ ואת $\sphericalangle BMC$.



12 במשולש ABC התיכון CM לצלע AB שווה ל-MA. הוכיחו ש-$\sphericalangle ACB = 90°$ (המשפט ההפוך).

13 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90°$, $\sphericalangle A = 30°$) היתר $AB = 12$. מצאו את BC ואת AC.

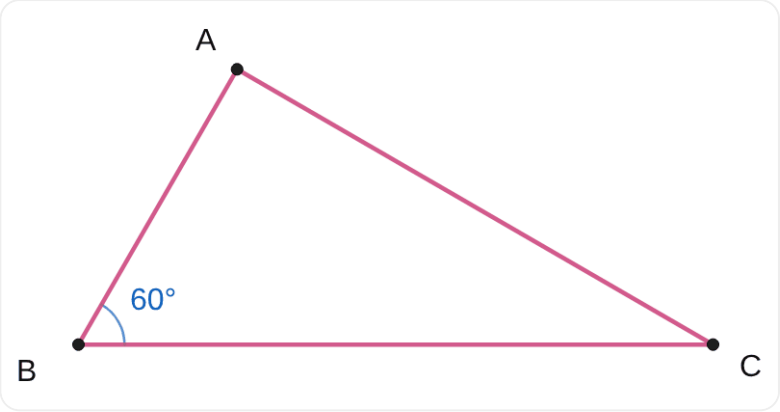


14 במשולש ישר זווית הזווית החדה $60°$, והניצב הסמוך לה 5. מצאו את היתר ואת הניצב השני.

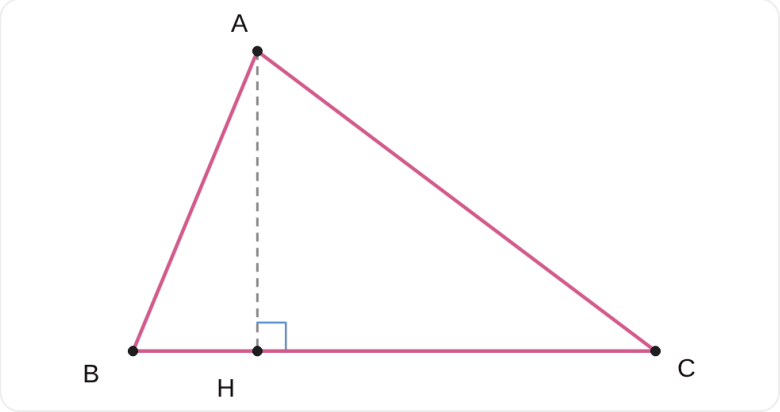
15 במשולש ABC ישר זווית ($\sphericalangle C = 90°$) נתון $AB = 2BC$. מצאו את $\sphericalangle A$.

16 במשולש ישר זווית ושווה שוקיים הניצב הוא 6. מצאו את היתר ואת הגובה ליתר.

17 במשולש ABC: $\sphericalangle B = 60°$, $AB = 4$, $BC = 8$. הוכיחו ש-$\sphericalangle A = 90°$ ומצאו את AC.

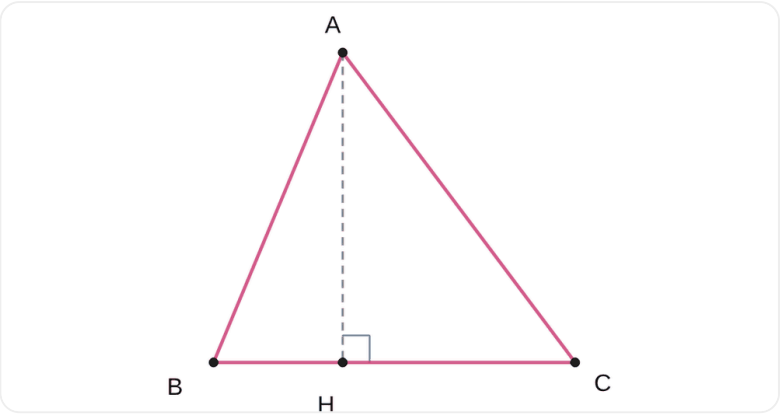


18 במשולש ABC הגובה AH לצלע BC מחלק אותה לקטעים $BH=5$ ו-$HC=16$, ו-$AH=12$. מצאו את AB ואת AC. האם $\sphericalangle BAC$ ישרה?

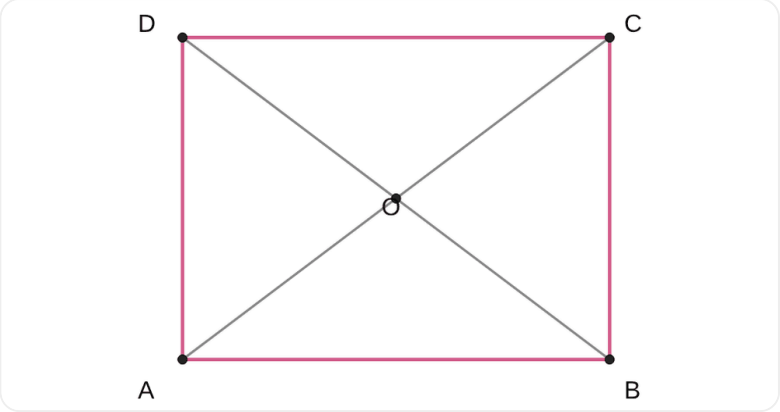


19 מצאו את המרחק בין שתי פינות נגדיות של חדר שמידותיו 3×4 מטר (אלכסון הרצפה), ולאחר מכן את המרחק בין פינה בתחתית לפינה הנגדית בתקרה, אם גובה החדר 12 מטר.

20 במשולש ABC: $AB=13$, $AC=15$, $BC=14$. מצאו את הגובה AH לצלע BC (רמז: סמנו $BH=x$ וכתבו פיתגורס בשני המשולשים).

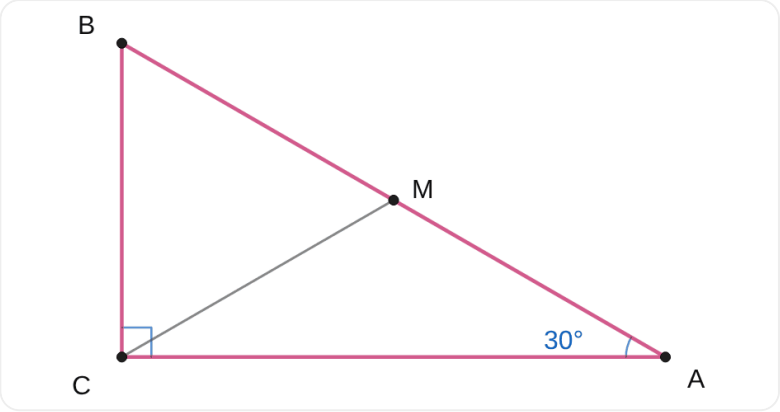


21 במלבן $ABCD$: $AB=8$, $BC=6$. האלכסונים נחתכים בנקודה O. מצאו את AO ואת היקף $\triangle AOB$.

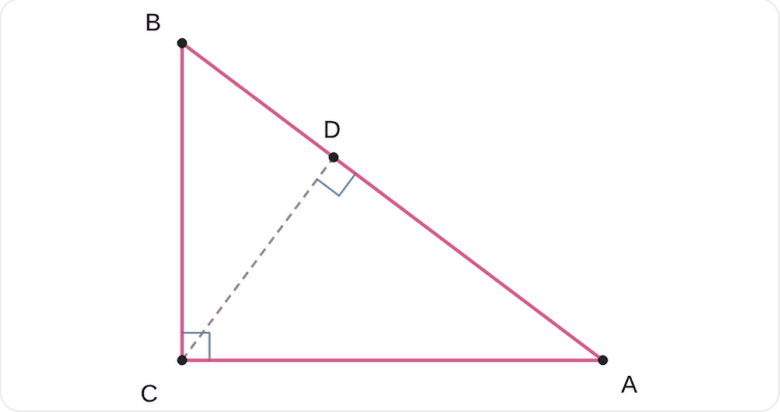


22 שלשות פיתגוריות: השלימו – $(5,12,\ ?)$, $(8,\ ?,17)$, $(\ ?,40,41)$. מה מקבלים כשמכפילים שלשה פיתגורית במספר?

23 במשולש ABC ($\sphericalangle C=90^\circ$, $\sphericalangle A=30^\circ$), CM תיכון ליתר ו-$BC=4$. מצאו את CM, את AB והוכיחו ש-$\triangle BCM$ שווה צלעות.



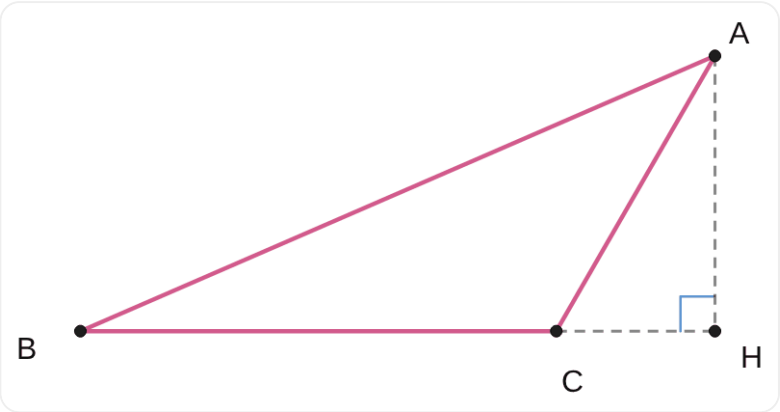
24 במשולש ישר זווית הניצבים מתייחסים כמו $4:3$ והיתר 25. מצאו את הניצבים ואת הגובה ליתר.



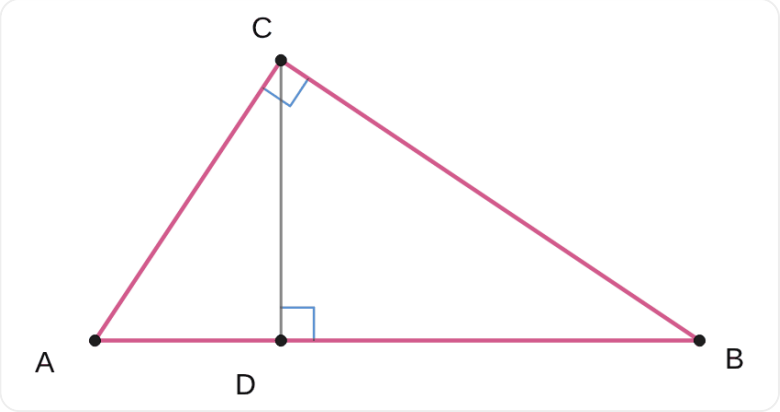
25 במשולש ישר זווית אחד הניצבים קצר ב-2 מהיתר, והניצב השני הוא 6. מצאו את צלעות המשולש.

26 במשולש שווה צלעות שצלעו a הביעו את הגובה ואת השטח באמצעות a. חשבו עבור $a=4$.

27 במשולש ABC: $\sphericalangle C=120^\circ$, $AC=4$, $BC=6$. מצאו את AB. (רמז: הורידו גובה מ-A להמשך BC – נוצר משולש 90-60-30).

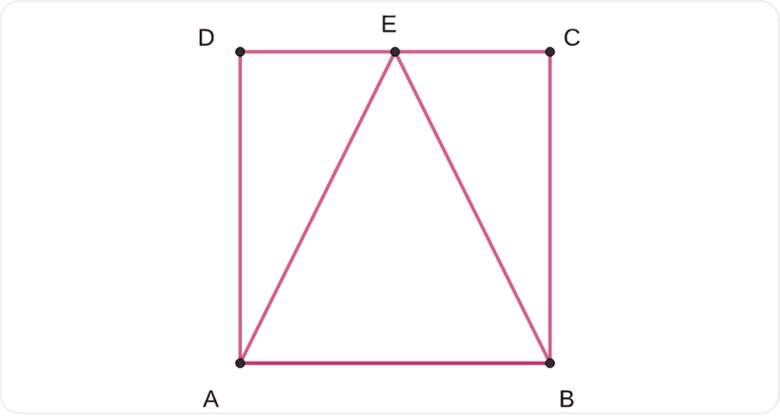


28 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90°$) CD גובה ליתר. הוכיחו ש-$\sphericalangle B = \sphericalangle ACD$. אם $AD = 4$ ו-$DB = 9$, מצאו את CD.

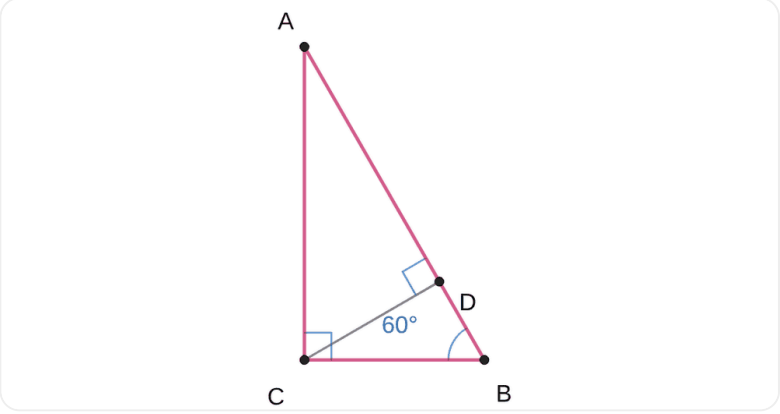


29 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90°$) התיכון ליתר הוא 6.5 וניצב אחד 5. מצאו את הניצב השני.

30 $ABCD$ ריבוע שצלעו 6, ו-E אמצע DC. מצאו את AE ואת היקף $\triangle ABE$.



31 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90°$, $\sphericalangle B = 60°$) הגובה ליתר $CD = 3$. מצאו את BC, AC ואת AB.



32 נתון משולש שצלעותיו n^2-1, $2n$, n^2+1 ($n>1$). הוכיחו שהוא ישר זווית, ותנו דוגמה עבור $n=4$.

33 ניווט: לכל נתון רשמו באיזה משפט של משולש ישר זווית תשתמשו – (א) ידועים שני ניצבים ומחפשים יתר; (ב) ידועה זווית 30° והיתר; (ג) ידוע תיכון ליתר ומחפשים את היתר.

✔ תשובות סופיות – נושא 4.4

1. $AB = 10$
2. 12 ; שטח 30
3. $3\sqrt{2}$
4. הראשון כן ($49 + 576 = 625$) ; השני לא ($100 \neq 121$)
5. צלע $5\sqrt{2}$; שטח 50
6. רוחב 8 ; היקף 46
7. 12
8. 4.8 מטר
9. $AB = 15$,$CD = 7.2$,$AD = 5.4$
10. $CM = 5$ (התיכון ליתר שווה למחצית היתר)
11. $\sphericalangle MCA = 35^\circ$; $\sphericalangle BMC = 70^\circ$
12. $\triangle AMC$,$\triangle BMC$ שווי שוקיים, ו- $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$
13. $BC = 6$,$AC = 6\sqrt{3}$
14. יתר 10 ; ניצב $5\sqrt{3}$
15. $\sphericalangle A = 30^\circ$ (המשפט ההפוך)
16. יתר $6\sqrt{2}$; גובה ליתר $3\sqrt{2}$
17. $AC = 4\sqrt{3}$
18. $AB = 13$,$AC = 20$; לא ($169 + 400 \neq 441$)
19. אלכסון הרצפה 5 ; האלכסון במרחב 13
20. $BH = 5$,$AH = 12$
21. $AO = 5$; היקף 18
22. 13, 15, 9 ; שוב שלשה פיתגורית
23. $AB = 8$,$CM = 4$; $BC = CM = BM = 4$

24 15, 20 ; גובה ליתר 12

25 8, 6, 10

26 גובה $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, שטח $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$; עבור $a=4$: $2\sqrt{3}$ ו-$4\sqrt{3}$

27 $AB=2\sqrt{19}$

28 $CD=6$ ($CD^2=AD\cdot DB$)

29 12 (היתר 13)

30 $AE=BE=3\sqrt{5}$; היקף $6+6\sqrt{5}$

31 $BC=2\sqrt{3}$, $AC=6$, $AB=4\sqrt{3}$

32 $(n^2-1)^2+(2n)^2=(n^2+1)^2$; $(15,8,17)$

33 (א) פיתגורס ; (ב) הניצב מול 30° – חצי יתר ; (ג) תיכון ליתר – מחצית היתר

4.5 קטעי אמצעים ומפגש תיכונים, גבהים וחוצי זווית

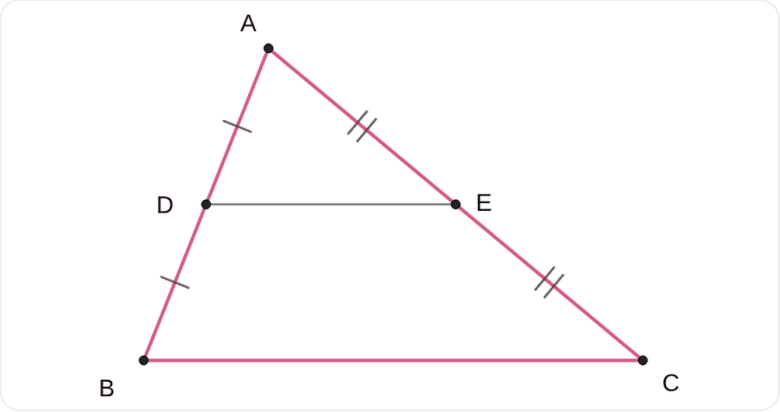
קטע אמצעים מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה. התיכונים נפגשים בנקודה המחלקת כל תיכון ביחס $1:2$ מהקודקוד. חוצי הזוויות נפגשים במרכז המעגל החסום, והאנכים האמצעיים – במרכז המעגל החוסם.

צפו לפני שמתחילים:

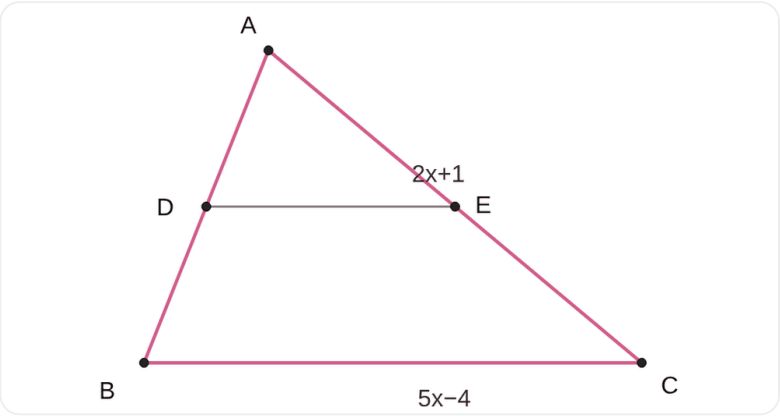
קטע אמצעים במשולש ובטרפז
YouTube · 7:29

מפגש תיכונים במשולש – הסבר ותרגול
YouTube · 12:33

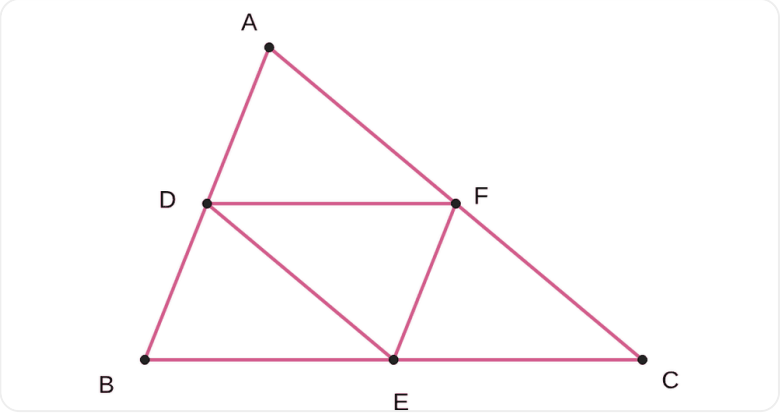
1 במשולש ABC, D ו-E אמצעי הצלעות AB ו-AC. נתון $BC=14$. מצאו את DE. מה אפשר לומר על הישרים DE ו-BC?



2 במשולש ABC, DE קטע אמצעים המקביל ל-BC, ו-$DE=2x+1$, $BC=5x-4$. מצאו את x ואת BC.

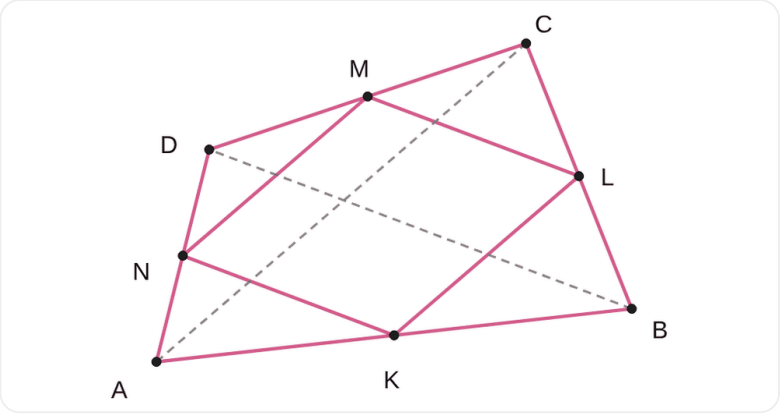


3 D, E, F אמצעי הצלעות של משולש ABC שצלעותיו $AB=10$, $BC=12$, $AC=8$. מצאו את היקף $\triangle DEF$.



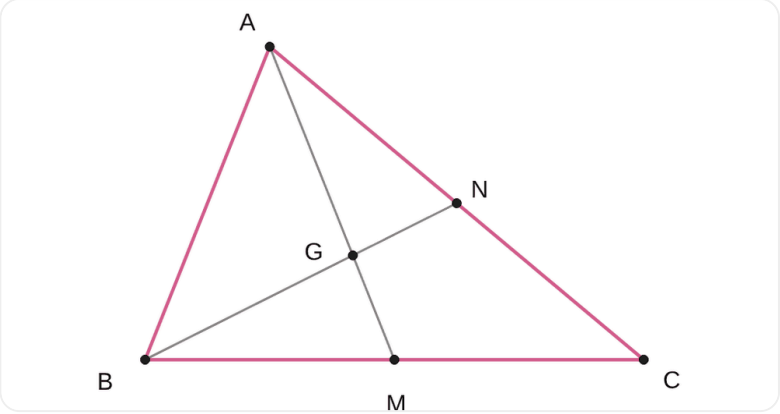
4 במשולש ABC D אמצע AB, ודרך D מעבירים מקביל ל-BC החותך את AC ב-E. הוכיחו ש-E אמצע AC. אם $AC=11$, מצאו את AE.

5 הוכיחו: אמצעי הצלעות של מרובע כלשהו יוצרים מקבילית. מה היקף המקבילית אם אלכסוני המרובע הם 10 ו-14?

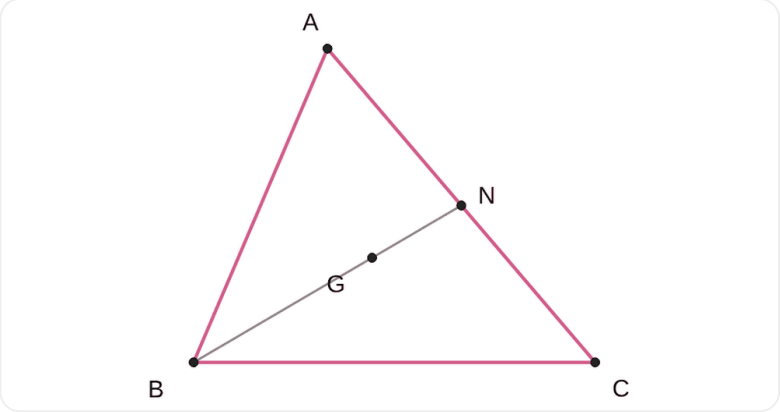


6 במרובע $ABCD$ האלכסונים שווים זה לזה. מה סוג המרובע שנוצר מחיבור אמצעי הצלעות? ואם האלכסונים מאונכים?

7 במשולש ABC התיכונים AM ו-BN נחתכים בנקודה G. נתון $AM=12$. מצאו את AG ואת GM.



8 במשולש ABC, G נקודת מפגש התיכונים, ו-$BG=10$. מצאו את אורך התיכון מ-B.

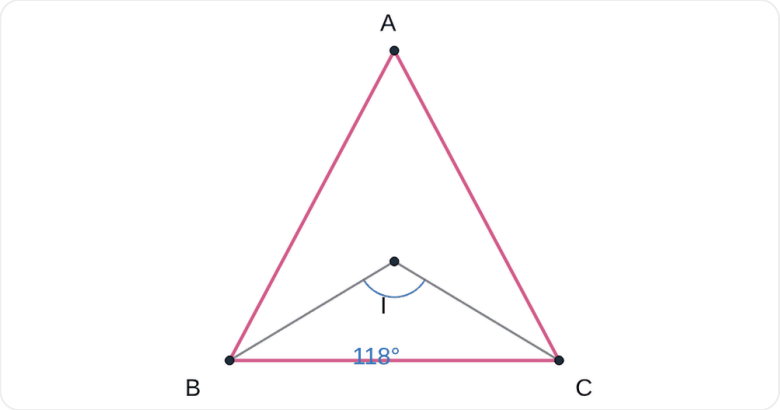


9 במשולש ABC התיכונים $AM=9$ ו-$BN=12$ מאונכים זה לזה ונחתכים ב-G. מצאו את AB.

10 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C=90^\circ$) היתר $AB=18$. G נקודת מפגש התיכונים. מצאו את CG.

11 באיזה משולש נקודת מפגש הגבהים נמצאת על קודקוד? ובאיזה משולש היא מחוץ למשולש?

12 במשולש ABC, I נקודת מפגש חוצי הזוויות. נתון $\sphericalangle BIC = 118°$. מצאו את $\sphericalangle A$.

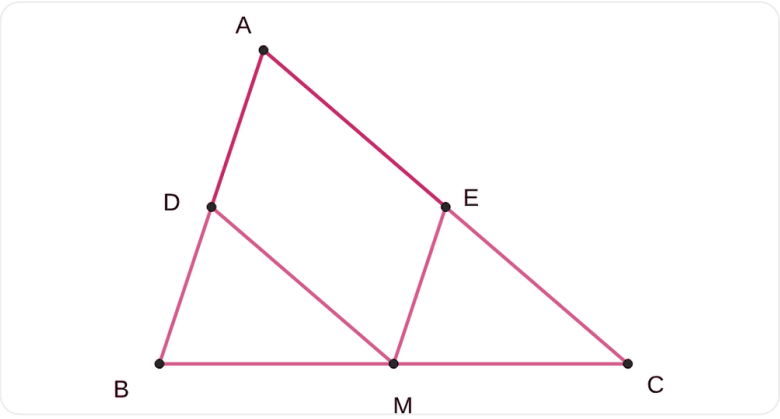


13 נקודת מפגש חוצי הזוויות במשולש מרוחקת 3 מהצלע BC. מה מרחקה מהצלע AB? מדוע?

14 נקודת מפגש האנכים האמצעיים במשולש מרוחקת 5 מהקודקוד A. מה מרחקה מהקודקודים B ו-C?

15 במשולש ישר זווית שניצביו 6 ו-8, איפה נמצאת נקודת מפגש האנכים האמצעיים? מה מרחקה מכל קודקוד?

16 במשולש ABC, D ו-E אמצעי AB ו-AC, ו-M אמצע BC. הוכיחו ש-$ADME$ מקבילית. אם $AB = 8$ ו-$AC = 10$, מצאו את היקפה.



17 בטרפז קטע האמצעים הוא 9 והבסיס הקטן 5. מצאו את הבסיס הגדול.

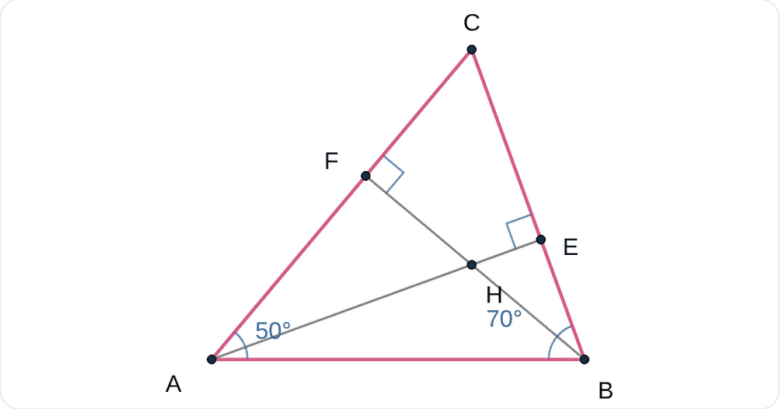
18 במשולש ABC, AM תיכון ו-N אמצע AM. הישר BN חותך את AC בנקודה K. הוכיחו ש-$AK = \frac{1}{3}AC$ (רמז: העבירו קטע אמצעים מ-M המקביל ל-BK).

19 במשולש ABC, DE קטע אמצעים (D על AB, E על AC). מה היחס בין שטח $\triangle ADE$ לשטח $\triangle ABC$? ומה היחס בין שטח הטרפז $DBCE$ לשטח $\triangle ABC$?

20 במשולש ABC התיכון $AM=9$, ו-G מפגש התיכונים. מצאו את המרחק של G מ-M ומ-A.

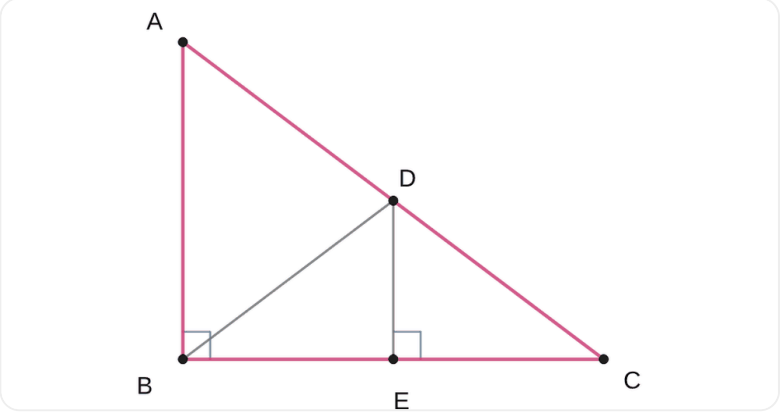
21 הוכיחו ששלושת התיכונים מחלקים משולש לשישה משולשים שווי שטח. אם שטח ABC הוא 36, מה שטח כל אחד?

22 במשולש ABC $\sphericalangle A=50^\circ$ ו-$\sphericalangle B=70^\circ$. H נקודת מפגש הגבהים. מצאו את $\sphericalangle AHB$.



23 במשולש ABC, I מפגש חוצי הזוויות, $\sphericalangle A=80^\circ$, $\sphericalangle B=60^\circ$. מצאו את $\sphericalangle AIB$, $\sphericalangle BIC$ ו-$\sphericalangle AIC$.

24 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90^\circ$): $AB=6$, $BC=8$. D אמצע AC ו-E אמצע BC. מצאו את DE ואת BD.

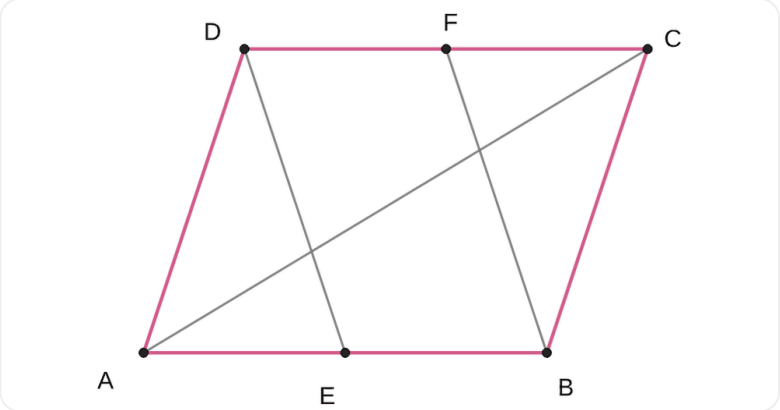


25 במשולש ABC: D אמצע AB, E אמצע AC, ו-$DE = BD$. מה אפשר לומר על המשולש ABC?

26 במשולש ABC DE קטע אמצעים, ו-F אמצע DE. הישר AF חותך את BC ב-M. הוכיחו ש-M אמצע BC.

27 במשולש שווה צלעות שצלעו 6, מצאו את המרחק בין מרכז המשולש (מפגש התיכונים) לבין קודקוד, ובינו לבין צלע.

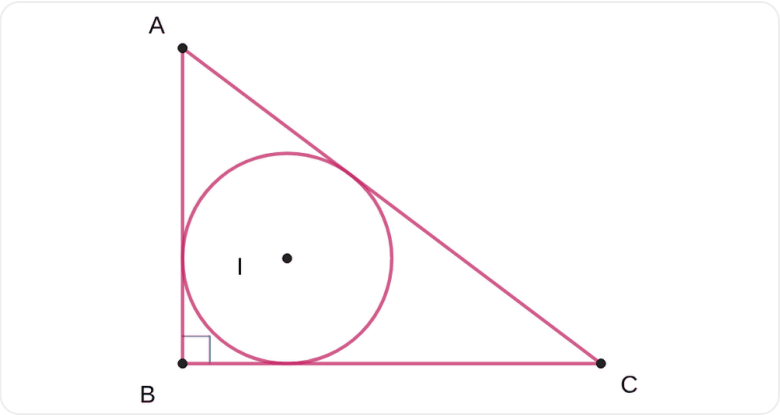
28 במקבילית $ABCD$ E ו-F אמצעי AB ו-CD. הוכיחו ש-$AECF$ מקבילית, ושהקטעים DE ו-BF מחלקים את האלכסון AC לשלושה חלקים שווים. אם $AC = 15$, מה אורך כל חלק?



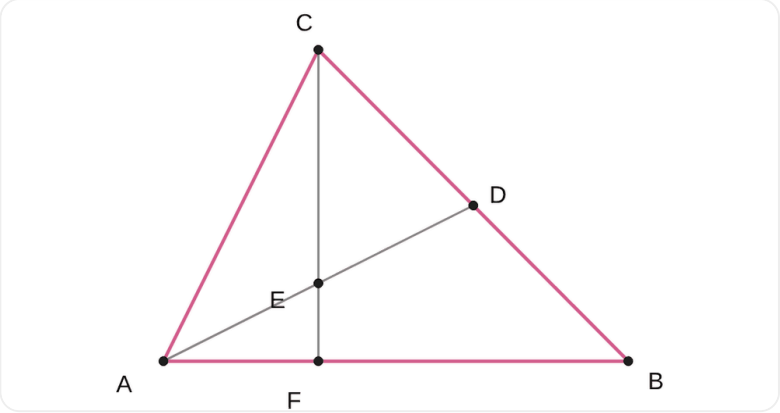
29 במשולש ABC נתון: $AB = AC$, ו-G מפגש התיכונים. הוכיחו ש-G נמצא על הגובה לבסיס.

30 נקודת מפגש התיכונים G במשולש ABC, $BC = 12$, וגובה המשולש לצלע BC הוא 9. מה המרחק של G מ-BC, ומה שטח $\triangle GBC$?

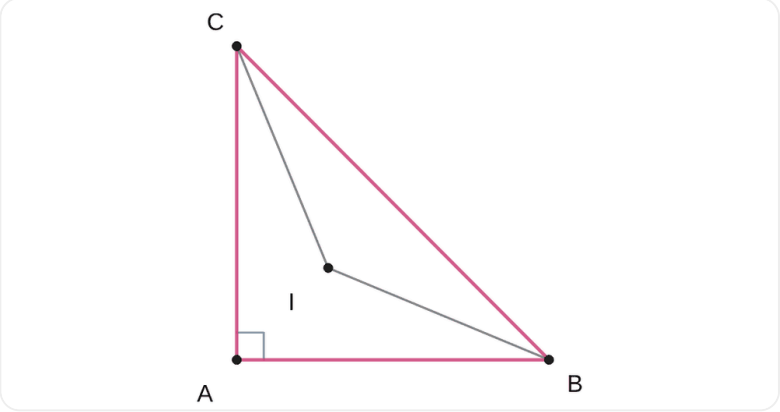
31 במשולש ישר זווית שניצביו 6 ו-8 מצאו את המרחק של נקודת מפגש חוצי הזוויות מהצלעות (רדיוס המעגל החסום). רמז: $r=\frac{a+b-c}{2}$.



32 משולש ABC, D אמצע BC, E אמצע AD. ההמשך של CE חותך את AB ב-F. מצאו את היחס $FB:AF$.



33 במשולש ABC $\sphericalangle A=90^\circ$, $AB=AC$, ו-I מפגש חוצי הזוויות. מצאו את $\sphericalangle BIC$.



✔ תשובות סופיות – נושא 4.5

1	$DE \parallel BC$; $DE = 7$
2	$BC = 26$; $x = 6$
3	15 (חצי מהיקף ABC)
4	משפט: ישר דרך אמצע צלע המקביל לצלע שנייה חוצה את השלישית ; $AE = 5.5$
5	כל צלע מקבילה לאלכסון ושווה למחציתו ; היקף 24
6	שווים – מעוין ; מאונכים – מלבן
7	$AG = 8$, $GM = 4$ (נקודת מפגש התיכונים מחלקת ביחס $2:1$)
8	15
9	$AG = 6$, $BG = 8$ ולכן $AB = 10$
10	$CG = 6$ (התיכון ליתר 9, ו-$CG = \frac{2}{3} \cdot 9$)
11	במשולש ישר זווית – בקודקוד הזווית הישרה ; במשולש קהה זווית – מחוצה לו
12	$\sphericalangle A = 56^\circ$
13	3 – כל נקודה על חוצה זווית שווה מרחק משוקי הזווית
14	5 ו-5 – היא מרכז המעגל החוסם
15	באמצע היתר ; 5
16	שני זוגות צלעות מקבילות (קטעי אמצעים) ; היקף 18
17	13
18	דרך M מקביל ל-BK חוצה את KC, ובמשולש AML ישר דרך N חוצה את AL – לכן $AK = KL = LC$
19	$1:4$; $3:4$
20	$GM = 3$, $AG = 6$
21	כל תיכון חוצה שטח ; 6
22	$\sphericalangle AHB = 120^\circ$ ($180^\circ - \sphericalangle C$)

23	$\sphericalangle AIB = 110°$, $\sphericalangle BIC = 130°$, $\sphericalangle AIC = 120°$
24	$DE = 3$, $BD = 5$
25	$BC = 2DE = 2BD = AB$ – שווה שוקיים ($AB = BC$)
26	AF הוא תיכון של $\triangle ADE$, ובהומותטיה מ-A פי 2 – תיכון של ABC
27	$2\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$
28	5
29	במשולש שו"ש התיכון לבסיס הוא גם גובה, ו-G עליו
30	3 ; 18
31	$r = 2$
32	$1 : 2$
33	$135°$

4.6 דמיון משולשים ושטחים

משפטי דמיון: ז.ז, צ.ז.צ, צ.צ.צ. יחס הדמיון k הוא גם יחס ההיקפים, הגבהים והתיכונים – ויחס השטחים הוא k^2. משולשים עם גובה משותף – יחס השטחים כיחס הבסיסים.

צפו לפני שמתחילים:

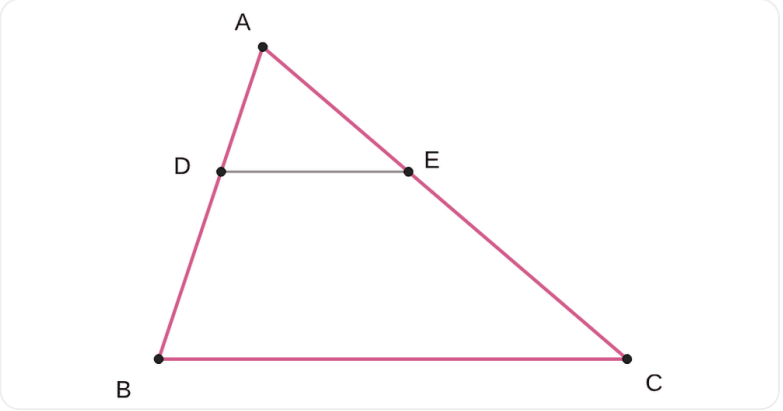
משפט דמיון ז.ז
YouTube · 7:52

משפט דמיון צ.ז.צ
YouTube · 5:27

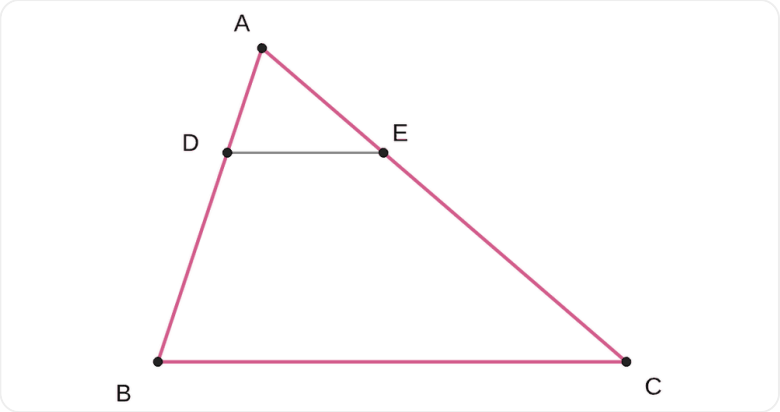
יחס גבהים במשולשים דומים
YouTube · 6:37

כל משפטי השטחים בגיאומטריה
YouTube · 8:56

1 במשולש ABC, $DE \parallel BC$ (D על AB, E על AC). נתון: $AD = 4$, $DB = 6$, $DE = 5$. מצאו את BC.



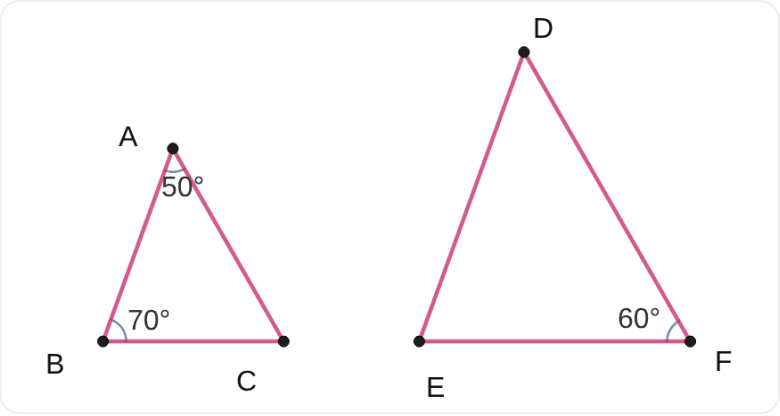
2 במשולש ABC, $DE \parallel BC$, $AD = 3$, $AB = 9$, $AE = 4$. מצאו את EC.



3 שני משולשים דומים ביחס $3 : 5$. היקף הקטן 24. מצאו את היקף הגדול.

4 שני משולשים דומים, יחס השטחים $9 : 16$. מהו יחס הדמיון? אם צלע במשולש הקטן היא 6, מהי הצלע המתאימה בגדול?

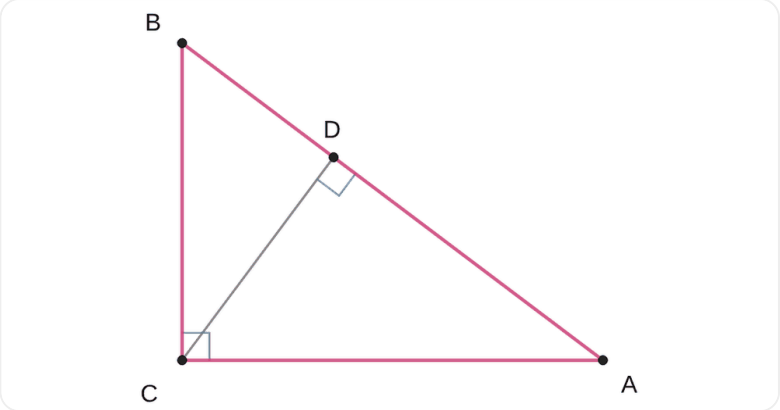
5 במשולשים ABC ו-DEF: $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 50°$, $\sphericalangle B = 70°$, $\sphericalangle F = 60°$. האם המשולשים דומים? לפי איזה משפט?



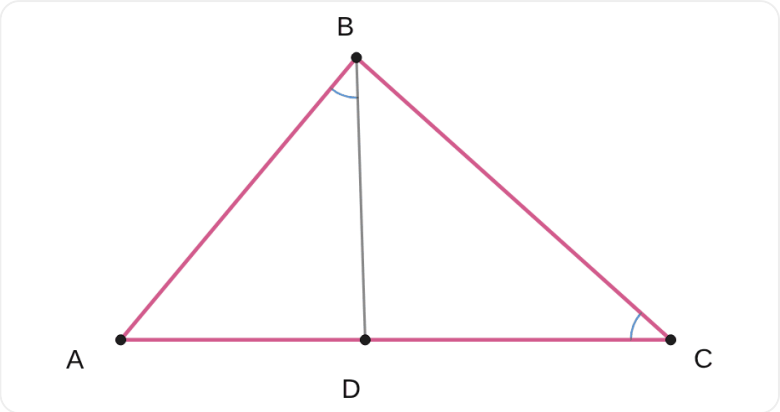
6 צלעות משולש אחד: 4, 6, 8, וצלעות משולש שני: 6, 9, 12. האם הם דומים? מה יחס הדמיון?

7 במשולשים ABC ו-DEF: $AB = 6$, $AC = 8$, $\sphericalangle A = 40°$, $DE = 9$, $DF = 12$, $\sphericalangle D = 40°$. האם הם דומים? לפי איזה משפט? אם $BC = 5$, מצאו את EF.

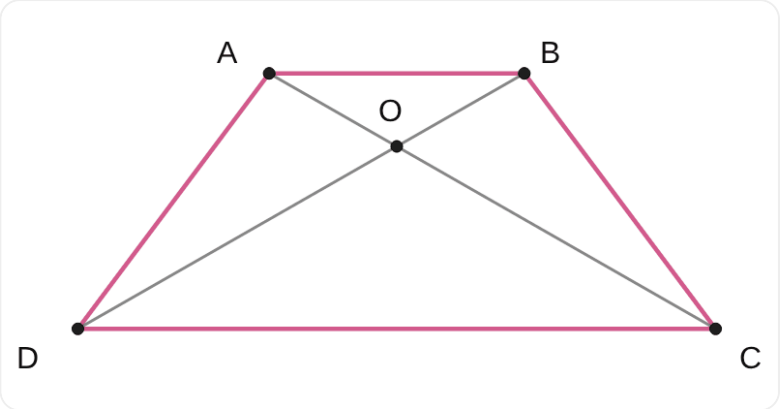
8 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90°$), CD גובה ליתר. הוכיחו ש-$\triangle ACD \sim \triangle ABC$, ובעזרת הדמיון הוכיחו ש-$AC^2 = AD \cdot AB$. אם $AD = 6.4$ ו-$AB = 10$, מצאו את AC.



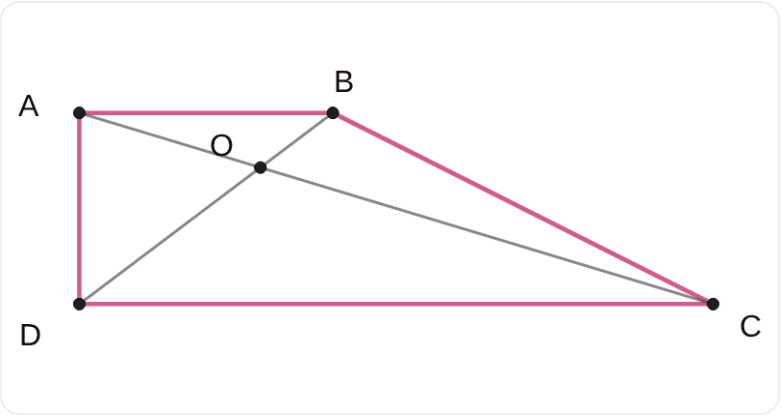
9 במשולש ABC הנקודה D על AC כך ש-$\sphericalangle ABD = \sphericalangle C$. הוכיחו ש-$\triangle ABD \sim \triangle ACB$. אם $AD = 4$ ו-$AC = 9$, מצאו את AB.



10 בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$) האלכסונים נחתכים בנקודה O. נתון $AB = 4$, $DC = 10$, $AO = 3$. מצאו את OC.

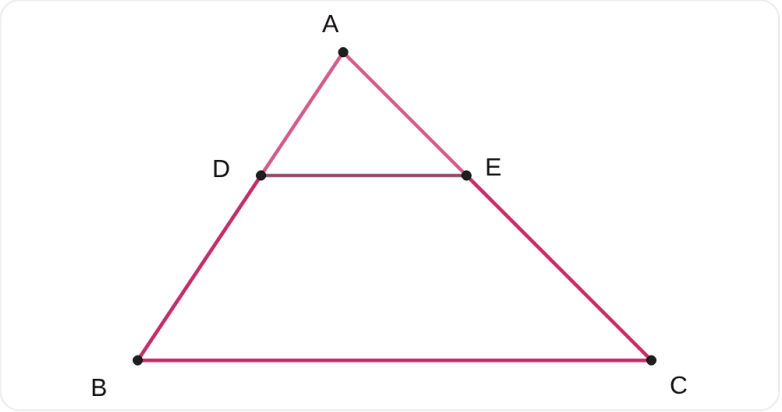


11 בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$, $AB = 4$, $DC = 10$) האלכסונים נחתכים ב-O. שטח $\triangle AOB$ הוא 8. מצאו את שטח $\triangle COD$ ואת שטח $\triangle AOD$.



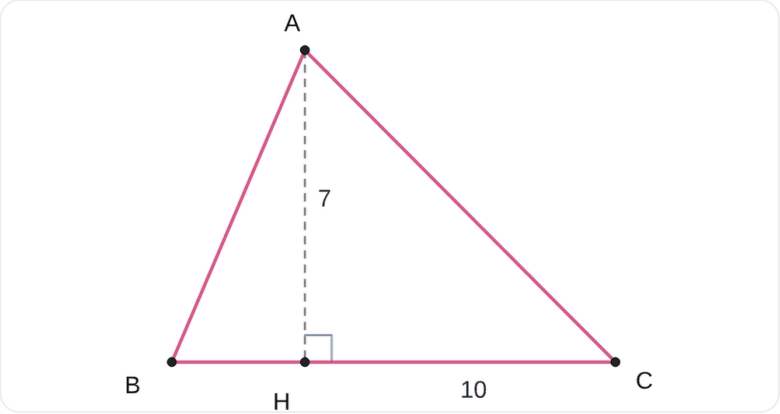
12 עמוד שגובהו 2 מטר מטיל צל באורך 3 מטר. באותו רגע עץ מטיל צל באורך 12 מטר. מה גובה העץ?

13 במשולש ABC שטחו 50, $DE \parallel BC$ ו-$AD : DB = 2 : 3$. מצאו את שטח $\triangle ADE$ ואת שטח הטרפז $DBCE$.



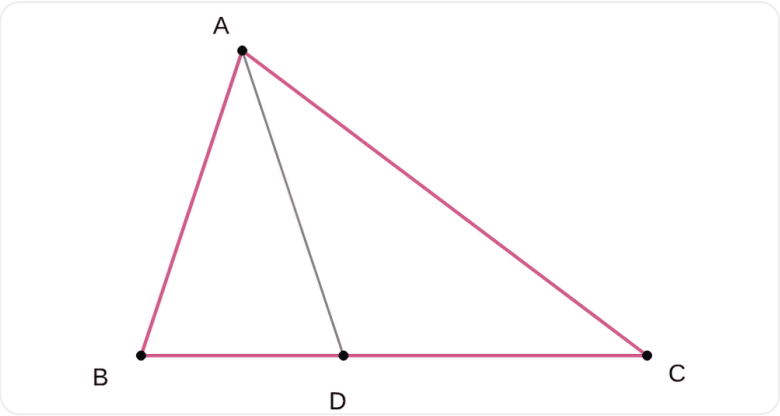
14 יחס הדמיון בין שני משולשים הוא k. מה היחס בין הגבהים המתאימים? בין התיכונים? בין השטחים?

15 שטח משולש שבסיסו 10 וגובהו לבסיס 7?



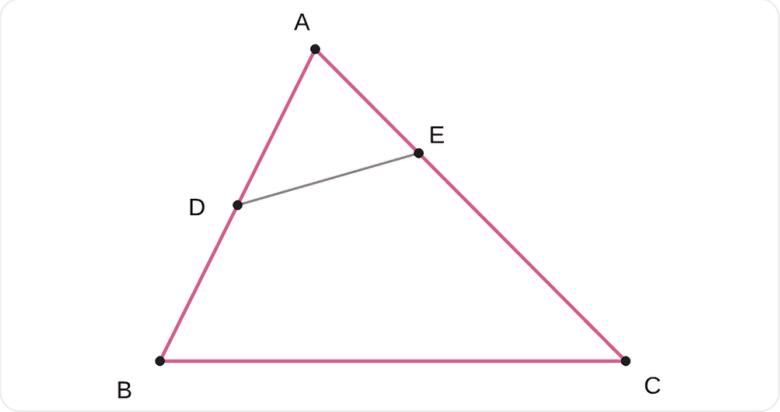
16 שני משולשים בעלי אותו גובה; הבסיסים 6 ו-9. מה יחס השטחים?

17 במשולש ABC הנקודה D על BC כך ש-$BD=4$, $DC=6$. שטח $\triangle ABD=12$. מצאו את שטח $\triangle ADC$ ואת שטח $\triangle ABC$.

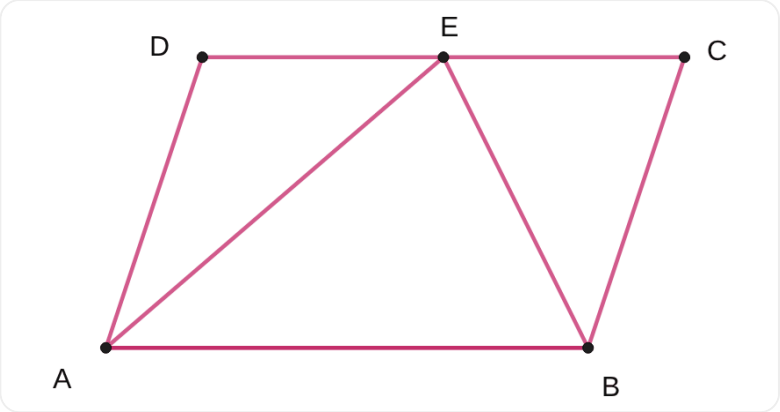


18 תיכון במשולש מחלק אותו לשני משולשים. מה היחס בין שטחיהם? הסבירו.

19 במשולש ABC, D אמצע AB ו-E על AC כך ש-$AE=\frac{1}{3}AC$. מה היחס בין שטח $\triangle ADE$ לשטח $\triangle ABC$?



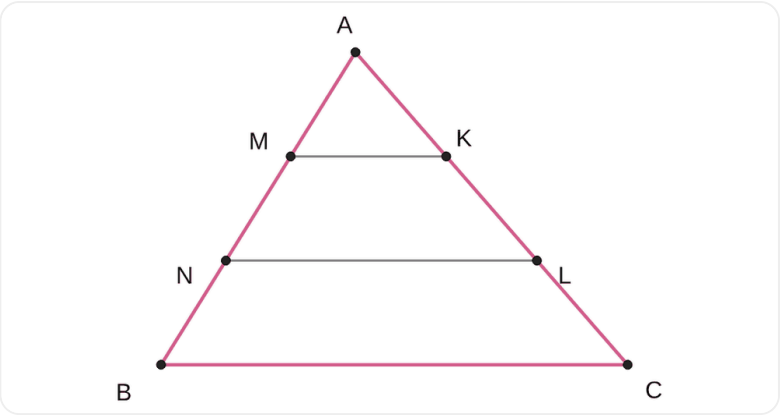
20 במקבילית $ABCD$ שטחה 60, E נקודה כלשהי על DC. מצאו את שטח $\triangle ABE$.



21 משולש שצלעותיו 6, 8, 10. מצאו את שטחו ואת הגובה לצלע הארוכה.

22 משולש שצלעותיו 5, 5, 8. מצאו את שטחו ואת שלושת גבהיו.

23 במשולש ABC, הנקודות M ו-N על AB כך ש-$AM = MN = NB$. דרך M ו-N מעבירים מקבילים ל-BC. לאילו שלושה חלקים מתחלק שטח המשולש (ביחס)?

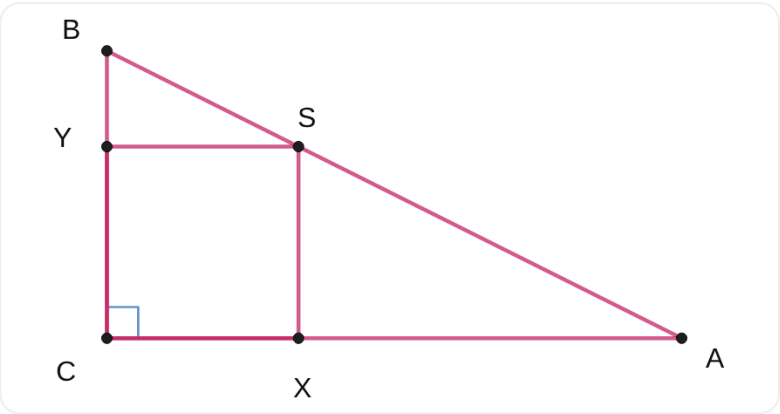


24 במשולש ABC: $\sphericalangle C = 90°$, $AC = 6$, $BC = 8$. על הניצב AC בונים משולש ישר זווית ACD ($\sphericalangle ACD = 90°$) כך ש-$\triangle ACB \sim \triangle DCA$, כלומר $\frac{CD}{CA} = \frac{CA}{CB}$. מצאו את CD ואת AD.

25 במשולש ABC, $AB = 12$, $AC = 18$, ו-D על AC כך ש-$AD = 8$. הוכיחו ש-$\triangle ABD \sim \triangle ACB$ ומצאו את היחס $CB : BD$.

26 ריבוע חסום במשולש ישר זווית שניצביו 3 ו-6, כך שזווית הריבוע בזווית הישרה. מצאו את צלע הריבוע.

27 בציור ריבוע $CXSY$ חסום במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90°$, $AC = 6$, $BC = 3$), והקודקוד S על היתר. הוכיחו בעזרת דמיון ש-$SX = 2$.



28 שני משולשים שווי צלעות; צלע האחד 4 וצלע השני 6. מה יחס השטחים?

29 במשולש ABC, AM תיכון ו-G מפגש התיכונים. מה החלק של שטח $\triangle GBC$ משטח $\triangle ABC$?

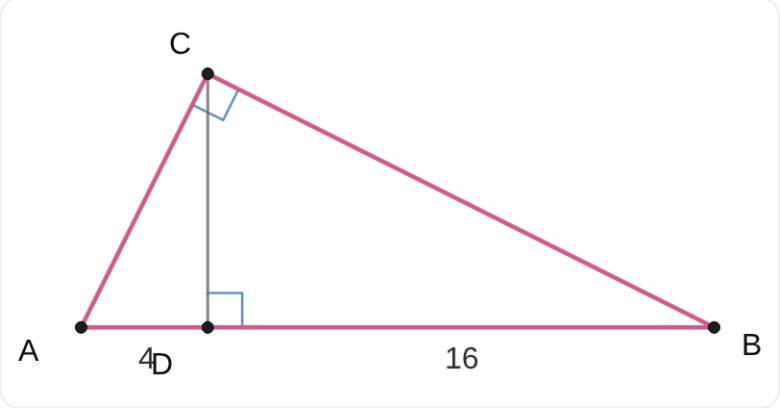
30 במשולש ABC, $DE \parallel BC$ ושטח $\triangle ADE$ שווה לשטח הטרפז $DBCE$. מצאו את היחס $AD : AB$.

31 במשולש ABC הנקודות D על AB ו-E על AC כך ש-$\sphericalangle ADE = \sphericalangle C$ (מקבילות אנטי). אם $AD = 3$, $AE = 4$, $AB = 8$, מצאו את AC.

32 מלבן $ABCD$, $AB = 12$, $BC = 5$. E על AB כך ש-$DE \perp AC$. מצאו את AE.

33 משולש ABC דומה למשולש $A'B'C'$ ביחס $3 : 2$, ושטח $A'B'C'$ גדול ב-20 משטח ABC. מצאו את שני השטחים.

34 במשולש ישר זווית הגובה ליתר מחלק את היתר לקטעים 4 ו-16. מצאו את הגובה, את הניצבים ואת שטח המשולש.



✔ תשובות סופיות – נושא 4.6

1	$BC = 12.5$ ($\triangle ADE \sim \triangle ABC$, יחס $2:5$)
2	$EC = 8$
3	40
4	$3:4$; 8
5	כן – ז.ז ($\sphericalangle E = 70^\circ$)
6	כן – צ.צ.צ ; $2:3$
7	כן – צ.ז.צ ; $EF = 7.5$
8	ז.ז (זווית A משותפת וזווית ישרה) ; $AC = 8$
9	$AB^2 = AD \cdot AC = 36$; $AB = 6$
10	$OC = 7.5$ ($\triangle AOB \sim \triangle COD$)
11	$S_{COD} = 50$; $S_{AOD} = 20$
12	8 מטר
13	8 ; 42
14	k ; k ; k^2
15	35
16	$2:3$
17	18 ; 30 (אותו גובה מ-A)
18	$1:1$ – בסיסים שווים וגובה משותף
19	$\frac{1}{6}$ (מכפלת היחסים $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$)
20	30
21	24 ; 4.8
22	שטח 12 ; לבסיס 3, לשוקיים 4.8
23	$1:3:5$

24	$AD=7.5$; $CD=4.5$
25	$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{2}{3}$ (צ.ז.צ) ; $2:3$
26	2 ($s=\frac{ab}{a+b}$)
27	$\triangle AXS\sim\triangle ACB$: $\frac{SX}{3}=\frac{6-SX}{6}$; $SX=2$
28	$4:9$
29	$\frac{1}{3}$
30	$1:\sqrt{2}$
31	$AC=6$ ($\triangle ADE\sim\triangle ACB$: $AD\cdot AB=AE\cdot AC$)
32	$AE=\frac{25}{12}$
33	16 ו-36
34	גובה 8 ; ניצבים $4\sqrt{5}$, $8\sqrt{5}$; שטח 80

פרק 4 סיכומון סוף פרק – גיאומטריה – משולשים, זוויות, שטחים והיקפים

זוויות

- זוויות צמודות – סכומן $180°$; זוויות קודקודיות – שוות.
- ישרים מקבילים: זוויות מתאימות ומתחלפות שוות, חד-צדדיות – סכומן $180°$.
- סכום זוויות במשולש $180°$; זווית חיצונית = סכום שתי הפנימיות שאינן צמודות לה.
- סכום זוויות במצולע: $180°(n-2)$.

חפיפת משולשים

- צ.ז.צ, ז.צ.ז, צ.צ.צ, צ.צ.ז (מול הצלע הגדולה מבין השתיים).
- במשולשים חופפים – צלעות וזוויות מתאימות שוות.

משולש שווה שוקיים

- זוויות הבסיס שוות (ולהפך – זוויות שוות ← צלעות שוות).
- התיכון לבסיס הוא גם גובה וגם חוצה זווית הראש.
- מול צלע גדולה – זווית גדולה.

משולש ישר זווית

- פיתגורס: $a^2+b^2=c^2$ (ולהפך – מתקיים ← ישר זווית).
- התיכון ליתר שווה למחצית היתר.
- מול זווית $30°$ – ניצב השווה למחצית היתר; יחס $1:\sqrt{3}:2$.

קטעי אמצעים ונקודות מפגש

- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
- מפגש התיכונים מחלק כל תיכון ביחס $1:2$ מהקודקוד.
- גבהים נפגשים בנקודה אחת; חוצי זווית – במרכז המעגל החסום.

דמיון ושטחים

- משפטי דמיון: ז.ז, צ.ז.צ, צ.צ.צ (ביחס).
- יחס היקפים = יחס הדמיון k; יחס שטחים = k^2.
- שטח משולש $=\frac{a\cdot h_a}{2}$; משולשים עם גובה משותף – יחס שטחים = יחס בסיסים.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- צ.צ.ז עם הזווית מול הצלע הקטנה – זה אינו משפט חפיפה.
- פיתגורס על משולש שאינו ישר זווית.
- יחס שטחים במשולשים דומים – לשכוח לרבע את יחס הדמיון.
- בהוכחה – לכתוב טענה בלי נימוק.

💡 **הטיפ של אילון:** סמנו על השרטוט כל נתון וכל מה שגיליתם – זוויות שוות בצבע אחד, צלעות שוות בקווקווים. ההוכחה מתחילה להופיע מעצמה.

פרק 5

גיאומטריה – מרובעים

מקבילית, מלבן, מעוין, ריבוע, טרפז ודלתון – תכונות, הוכחות וחישובים

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

5.1 מקבילית, מלבן, מעוין וריבוע — 34 תרגילים

5.2 טרפז (כולל קטע אמצעים בטרפז) ודלתון — 33 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

▶ מעוין – כל התכונות + 5 תרגילים
YouTube · 12:17

▶ תרגול ריבוע – אלכסונים, 45° ושטח
YouTube · 9:41

▶ טרפז – סיכום מלא למבחן
YouTube · 9:57

▶ דלתון בגיאומטריה – הסבר ותרגול
YouTube · 13:10

5.1 מקבילית, מלבן, מעוין וריבוע

מקבילית: צלעות נגדיות מקבילות ושוות, זוויות נגדיות שוות, האלכסונים חוצים זה את זה.
מלבן – גם אלכסונים שווים; מעוין – גם אלכסונים מאונכים וחוצי זוויות; ריבוע – כל התכונות יחד.

צפו לפני שמתחילים:

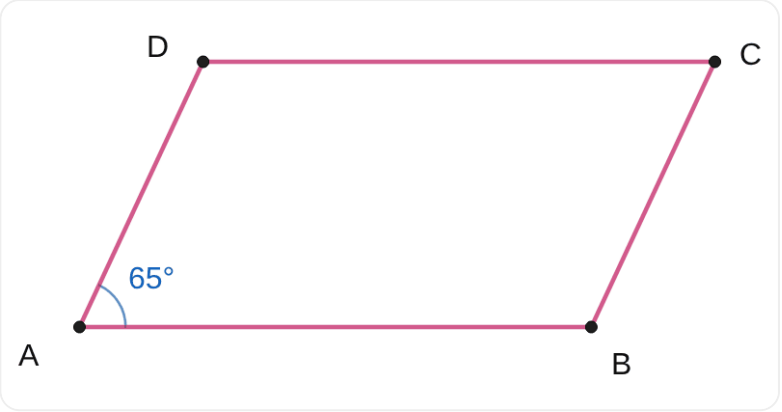
שטח מקבילית
YouTube · 1:51

מעוין – כל התכונות + 5 תרגילים
YouTube · 12:17

תרגול ריבוע – אלכסונים, 45° ושטח
YouTube · 9:41

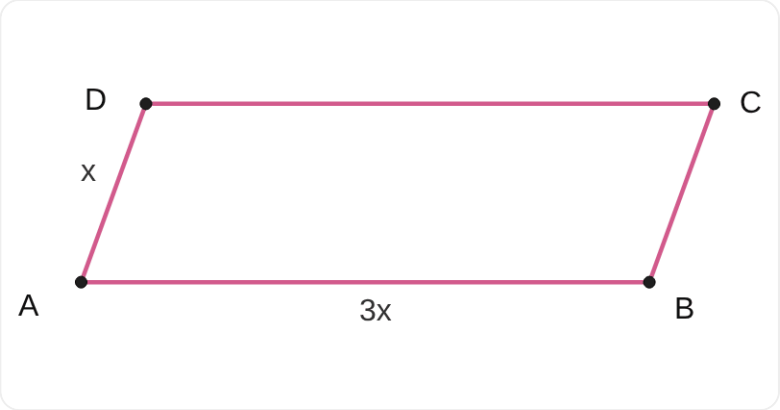
חישובי שטחים – משולש, ריבוע, מלבן, מקבילית, מעוין וטרפז
YouTube · 7:50

1 במקבילית $ABCD$ נתון $\sphericalangle A = 65^\circ$. מצאו את שאר זוויות המקבילית.

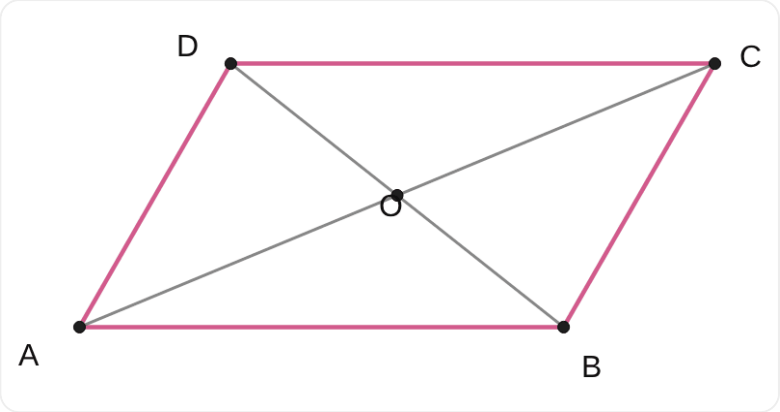


2 במקבילית שתי זוויות סמוכות מתייחסות כמו $7 : 2$. מצאו את זוויות המקבילית.

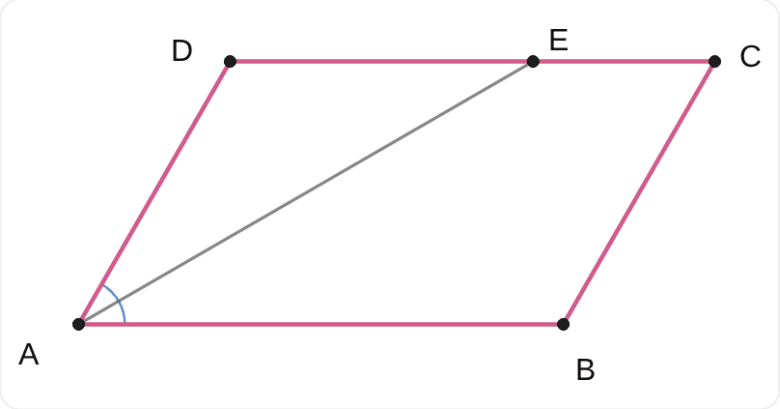
3 היקף מקבילית 40, וצלע אחת ארוכה פי 3 מהשנייה. מצאו את הצלעות.



4 במקבילית $ABCD$ האלכסונים נחתכים ב-O. נתון $AC=14$, $BD=10$, $AB=8$. מצאו את היקף $\triangle AOB$.



5 במקבילית $ABCD$ ($AB=8$, $AD=5$) חוצה הזווית $\sphericalangle A$ חותך את DC בנקודה E. מצאו את DE ואת EC.

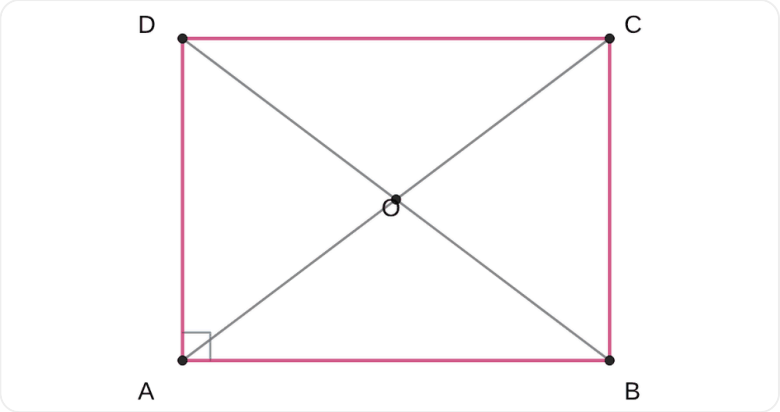


6 חוצי שתי זוויות סמוכות במקבילית נחתכים. מה הזווית ביניהם? הוכיחו.

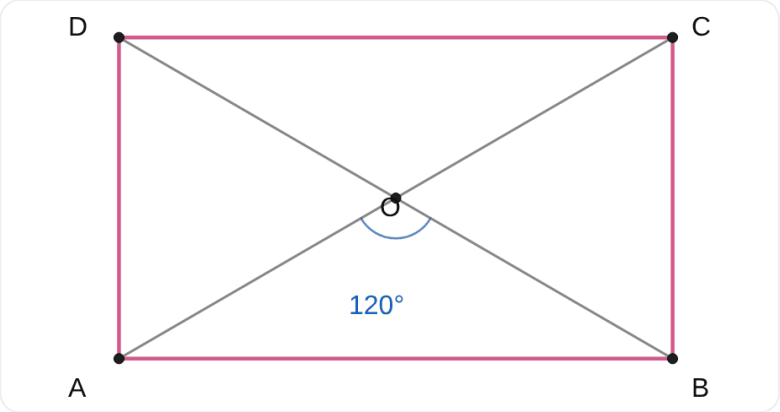
7 במרובע $ABCD$ האלכסונים חוצים זה את זה. הוכיחו ש-$ABCD$ מקבילית, ורשמו עוד שלוש דרכים להוכיח שמרובע הוא מקבילית.

8 במרובע $ABCD$: $AB \parallel DC$ ו-$AB = DC = 7$. האם $ABCD$ מקבילית? אם $AD = 4$, מה היקפו?

9 במלבן $ABCD$: $AB = 8$, $BC = 6$. מצאו את אורך האלכסון ואת הזווית שבין האלכסון לצלע הארוכה (בקירוב – או השאירו כביטוי $\tan$).



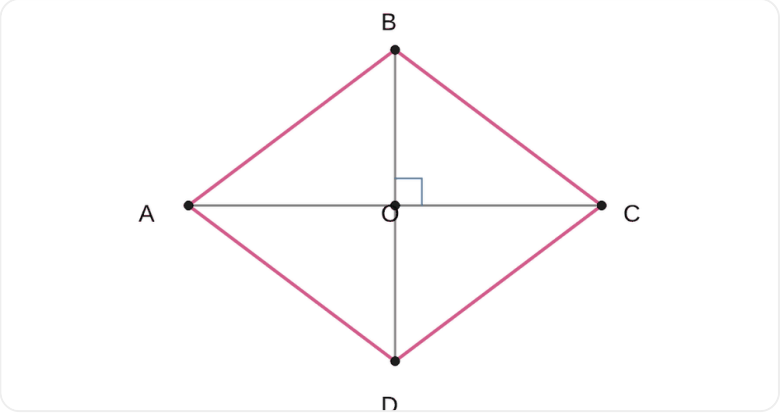
10 במלבן $ABCD$ האלכסונים נחתכים ב-O, ו-$\sphericalangle AOB = 120°$. אם $AC = 12$, מצאו את BC ואת AB.



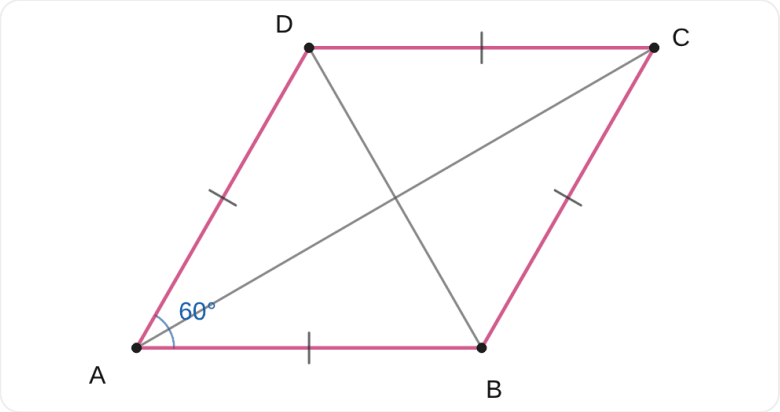
11 במלבן אחד הצלעות 5 והאלכסון 13. מצאו את השטח ואת ההיקף.

12 מקבילית שבה האלכסונים שווים – איזה מרובע היא? הוכיחו בעזרת חפיפה.

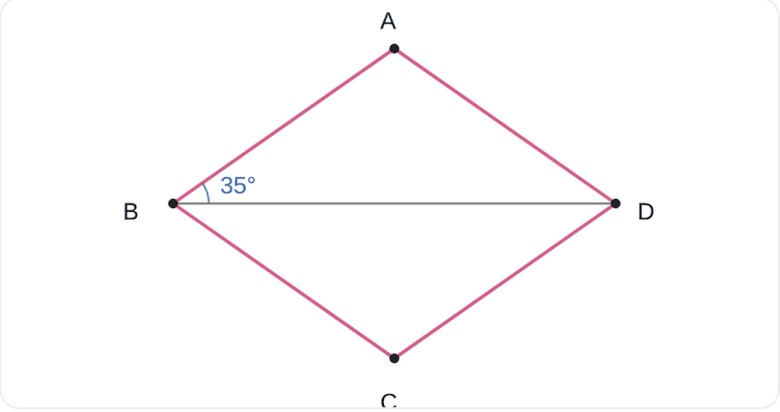
13 במעוין $ABCD$ האלכסונים $AC=8$ ו-$BD=6$. מצאו את צלע המעוין, את היקפו ואת שטחו.



14 במעוין זווית אחת 60° וצלעו 6. מצאו את אורכי האלכסונים ואת השטח.



15 במעוין $ABCD$, $\sphericalangle ABD=35^\circ$. מצאו את זוויות המעוין.



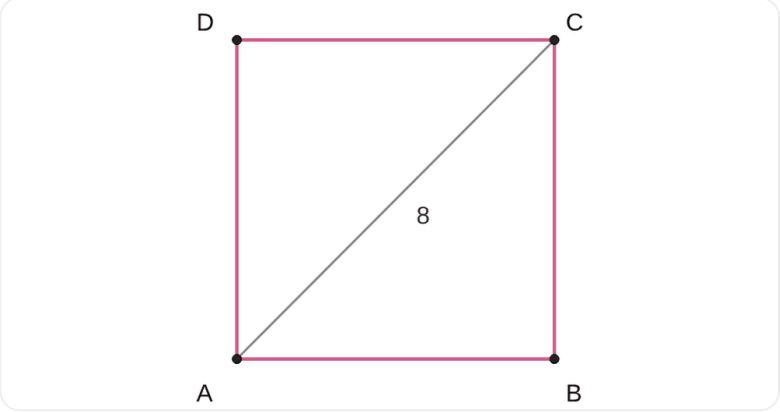
16 שטח מעוין 96 ואחד מאלכסוניו 16. מצאו את האלכסון השני ואת צלע המעוין.

17 מקבילית שבה אלכסון אחד חוצה זווית – מה סוג המרובע?

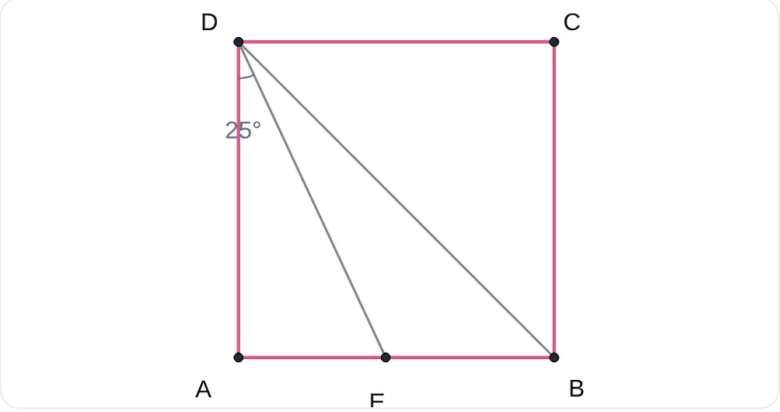
18 שטח מעוין שצלעו 10 הוא 80. מצאו את גובה המעוין.

19 הוכיחו: במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה. באיזו חפיפה משתמשים?

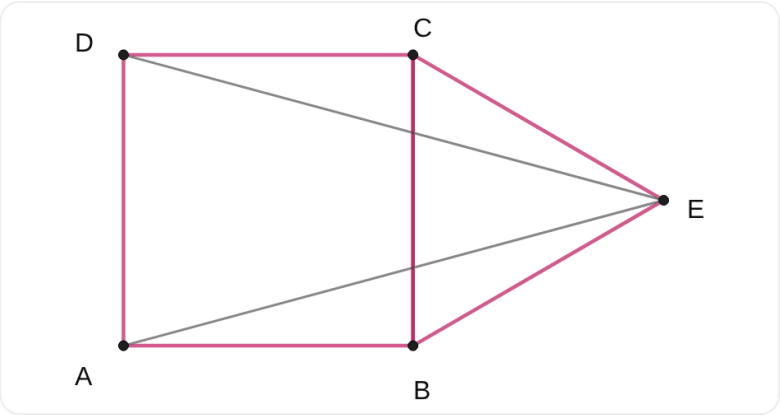
20 ריבוע שאלכסונו 8. מצאו את שטחו ואת צלעו.



21 $ABCD$ ריבוע, ו-E נקודה על AB כך ש-$\sphericalangle ADE = 25^\circ$. מצאו את $\sphericalangle DEB$ ואת $\sphericalangle BDE$.

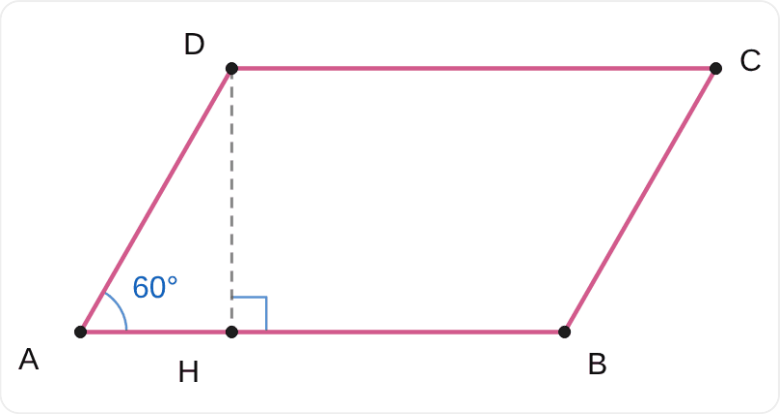


22 על הצלע BC של ריבוע $ABCD$ בונים כלפי חוץ משולש שווה צלעות BCE. מצאו את $\sphericalangle BAE$ ואת $\sphericalangle AED$.



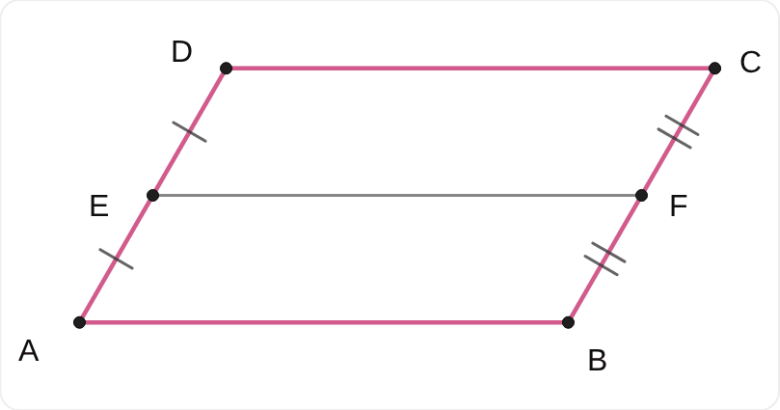
23 מלבן שבו האלכסונים מאונכים – איזה מרובע הוא? ומעוין שבו האלכסונים שווים?

24 במקבילית $ABCD$: $AB = 8$, $AD = 5$, $\sphericalangle A = 60°$. מצאו את גובה המקבילית לצלע AB ואת שטחה.

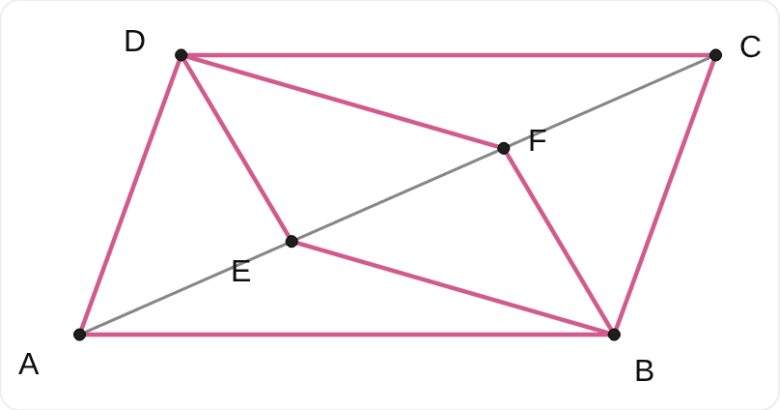


25 במקבילית שטחה 48 הצלעות 8 ו-12. מצאו את שני גבהי המקבילית.

26 במקבילית $ABCD$, E אמצע AD ו-F אמצע BC. הוכיחו ש-$ABFE$ מקבילית.



27 במקבילית $ABCD$ הנקודות E, F על האלכסון AC כך ש-$AE = CF$. הוכיחו ש-$BEDF$ מקבילית.

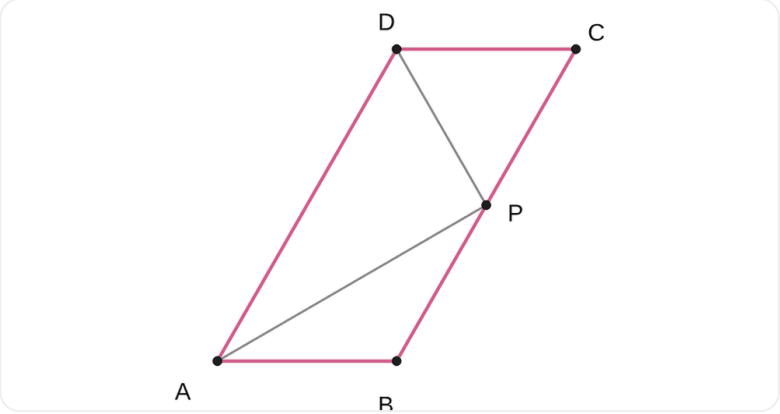


28 במלבן $ABCD$ הנקודה M אמצע AB. הוכיחו ש-$MD = MC$.

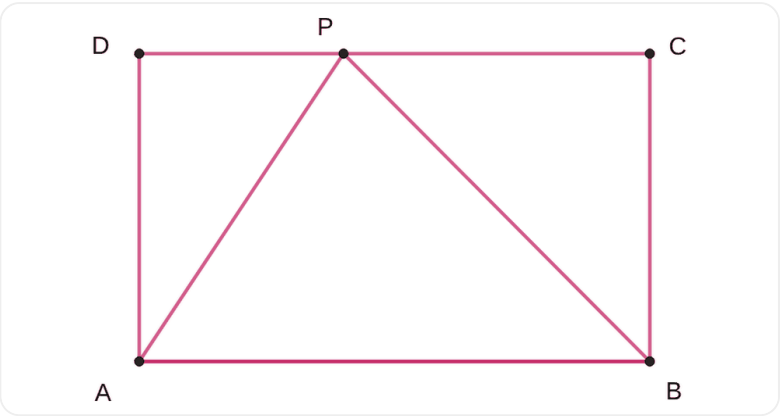
29 במקבילית $ABCD$ הזווית $\sphericalangle A$ גדולה ב-$40°$ מ-$\sphericalangle B$. מצאו את כל הזוויות.

30 במעוין $ABCD$ ($\sphericalangle A = 120°$) האלכסון הקצר הוא 7. מצאו את היקף המעוין.

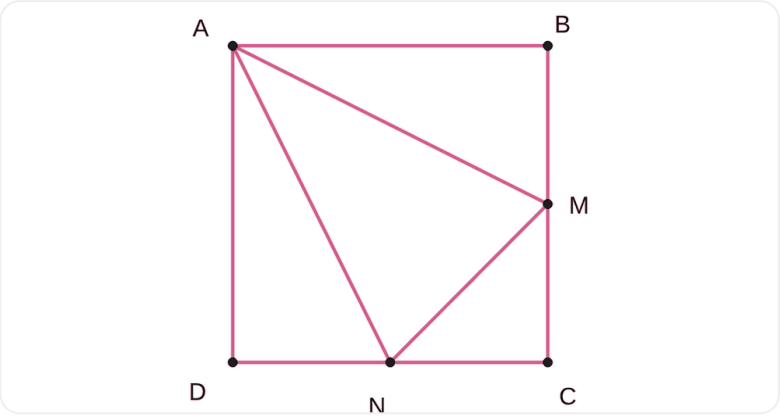
31 במקבילית $ABCD$ חוצי הזוויות $\sphericalangle A$ ו-$\sphericalangle D$ נפגשים בנקודה P שעל הצלע BC. הוכיחו ש-$AD = 2AB$. אם $AB = 5$, מצאו את היקף המקבילית.



32 $ABCD$ מלבן ($AB = 10$, $BC = 6$) ו-P על DC. מהו שטח $\triangle ABP$? האם הוא תלוי במיקום P?



33 בריבוע $ABCD$ שצלעו 4, M אמצע BC ו-N אמצע CD. מצאו את שטח $\triangle AMN$.



34 סדרו מהכללי לפרטי: ריבוע, מרובע, מקבילית, מעוין. איזו תכונה מוסיפים בכל שלב?

✔ תשובות סופיות – נושא 5.1

1	$\sphericalangle B=\sphericalangle D=115^\circ$, $\sphericalangle C=65^\circ$
2	40° ו- 140°
3	5 ו- 15
4	$7+5+8=20$
5	$DE=5$ (משולש ADE שווה שוקיים), $EC=3$
6	90° – חצי מסכום זוויות חד-צדדיות
7	שני זוגות צלעות מקבילות ; שני זוגות צלעות שוות ; זוג צלעות מקבילות ושוות ; זוויות נגדיות שוות
8	כן ; 22
9	אלכסון 10 ; $\tan\alpha=\frac{3}{4}$ ($\alpha\approx 36.9^\circ$)
10	$BC=6$, $AB=6\sqrt{3}$
11	שטח 60 ; היקף 34
12	מלבן: $\triangle ABD\cong\triangle BAC$ (צ.צ.צ) ולכן $\sphericalangle A=\sphericalangle B=90^\circ$
13	צלע 5 ; היקף 20 ; שטח 24
14	6 ו- $6\sqrt{3}$; שטח $18\sqrt{3}$
15	$\sphericalangle B=\sphericalangle D=70^\circ$, $\sphericalangle A=\sphericalangle C=110^\circ$
16	12 ; צלע 10
17	מעוין
18	8
19	$\triangle AOB\cong\triangle COB$ (צ.צ.צ) – הזוויות ב- O צמודות ושוות
20	שטח 32 ; צלע $4\sqrt{2}$
21	$\sphericalangle DEB=115^\circ$, $\sphericalangle BDE=20^\circ$
22	$\sphericalangle BAE=15^\circ$, $\sphericalangle AED=30^\circ$

23 ריבוע ; ריבוע

24 גובה $\frac{5\sqrt{3}}{2}$; שטח $20\sqrt{3}$

25 6 (לצלע 8) ו-4 (לצלע 12)

26 $AE \parallel BF$ ו-$AE = BF$

27 האלכסונים EF ו-BD חוצים זה את זה ב-O

28 $\triangle AMD \cong \triangle BMC$ (צ.ז.צ)

29 $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 110^\circ$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 70^\circ$

30 28 (האלכסון הקצר יוצר משולשים שווי צלעות)

31 $\triangle ABP$ ו-$\triangle DCP$ שווי שוקיים ולכן $BC = 2AB$; היקף 30

32 30 – לא תלוי (בסיס 10, גובה 6)

33 6

34 מרובע ← מקבילית (שני זוגות מקבילות) ← מעוין (צלעות סמוכות שוות) ← ריבוע (זווית ישרה)

5.2 טרפז (כולל קטע אמצעים בטרפז) ודלתון

בטרפז: קטע האמצעים מקביל לבסיסים ושווה לחצי סכומם. בטרפז שווה שוקיים – זוויות הבסיס שוות והאלכסונים שווים. בדלתון – האלכסון הראשי חוצה זוויות, מאונך לאלכסון המשני וחוצה אותו.

צפו לפני שמתחילים:

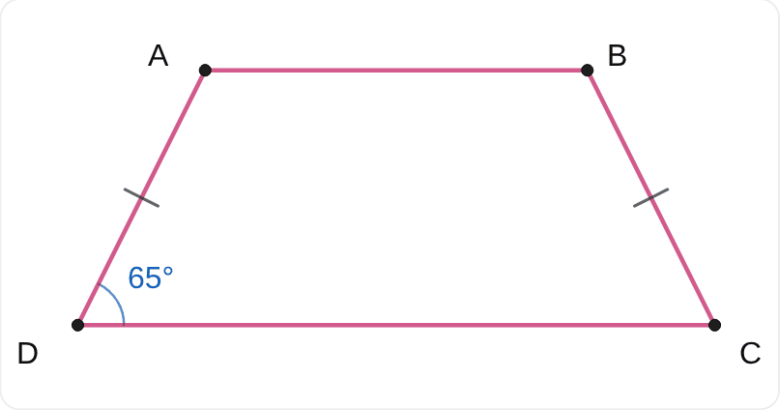
טרפז – סיכום מלא למבחן
YouTube · 9:57

קטע אמצעים במשולש ובטרפז
YouTube · 7:29

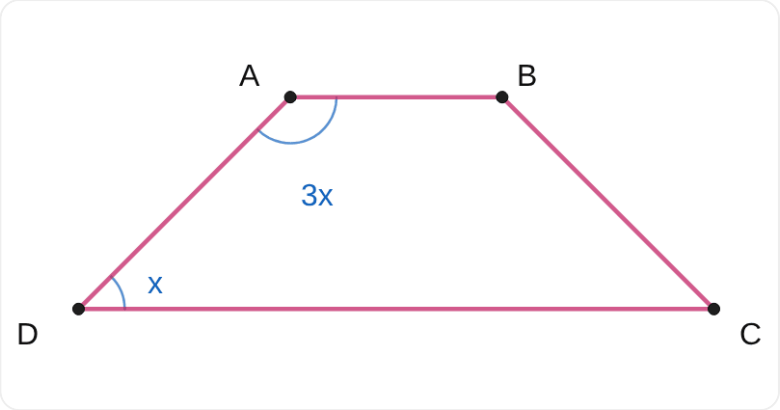
חישוב שטח טרפז והוכחה
YouTube · 3:25

דלתון – הסבר מלא וכל התכונות
YouTube · 7:33

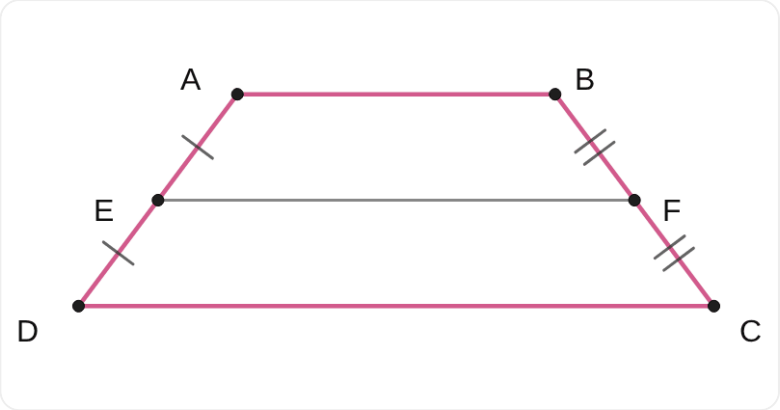
1 בטרפז שווה שוקיים $ABCD$ ($AB \parallel DC$) נתון $\sphericalangle D = 65^\circ$. מצאו את שאר זוויות הטרפז.



2 בטרפז $ABCD$ $(AB \parallel DC)$ $\sphericalangle A = 3\sphericalangle D$. מצאו את $\sphericalangle A$ ואת $\sphericalangle D$.

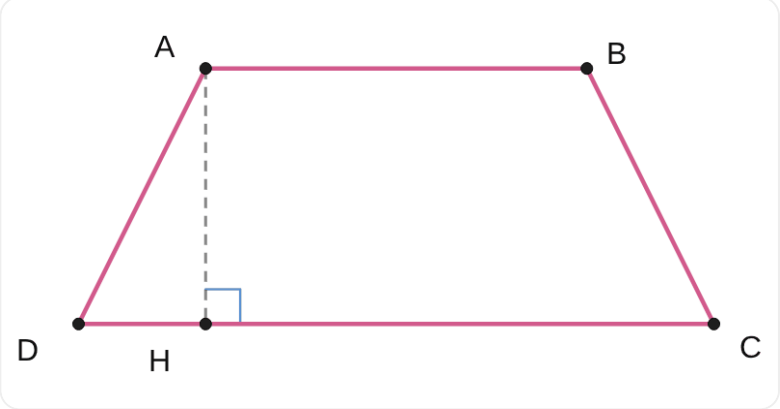


3 בטרפז $ABCD$ הבסיסים $AB = 6$ ו-$DC = 12$. EF קטע האמצעים. מצאו את EF.

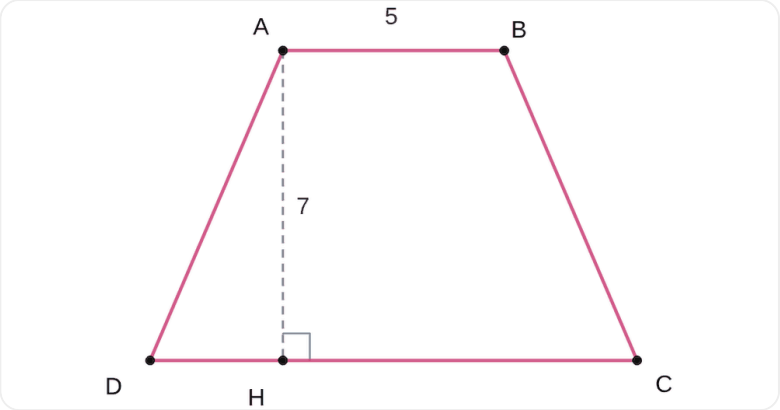


4 בטרפז קטע האמצעים 11 והבסיס הגדול גדול פי 1.75 מהקטן. מצאו את הבסיסים.

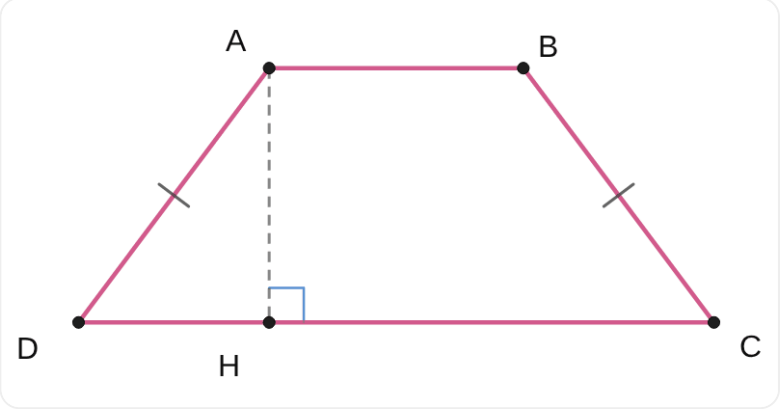
5 בטרפז שווה שוקיים הבסיסים 6 ו-10 והגובה 4. מצאו את אורך השוק ואת היקף הטרפז.



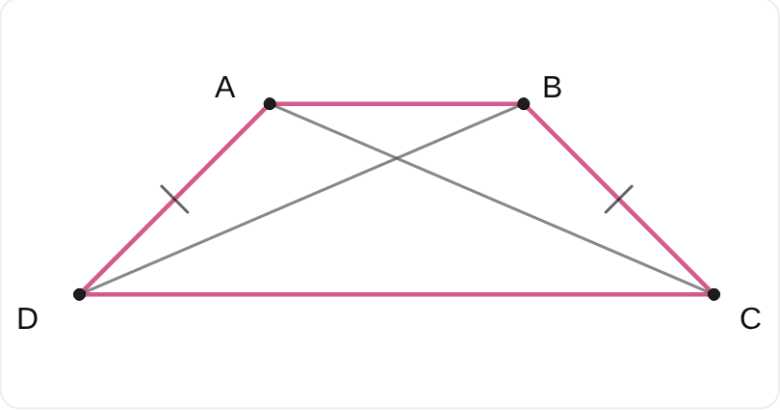
6 שטח טרפז 56, הגובה 7 ובסיס אחד 5. מצאו את הבסיס השני.



7 בטרפז שווה שוקיים הבסיסים 8 ו-20, השוק 10. מצאו את הגובה ואת השטח.

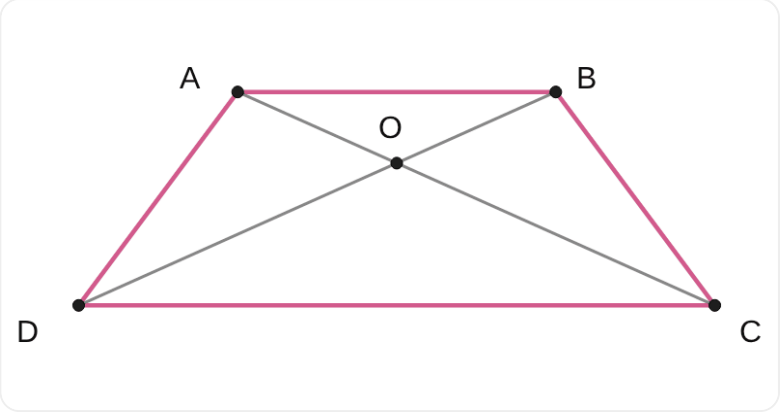


8 בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים. הוכיחו בעזרת חפיפה. אם אלכסון אחד 9 – מה השני?

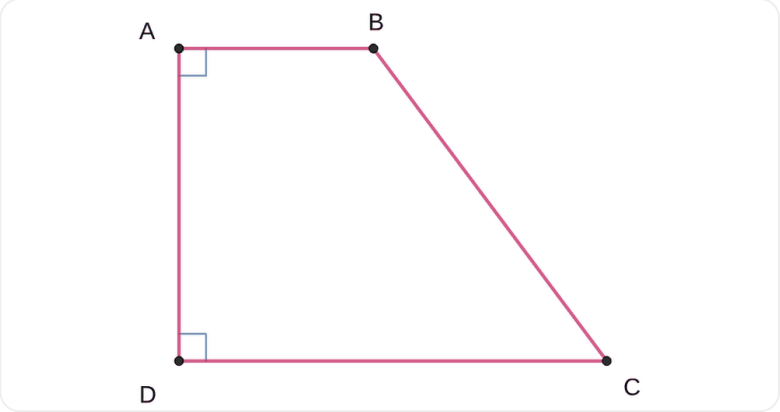


9 בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$) האלכסון AC חוצה את $\sphericalangle C$. הוכיחו ש-$AB = BC$. אם $AB = 7$ ו-$DC = 12$, $AD = 5$ – מצאו את היקף הטרפז.

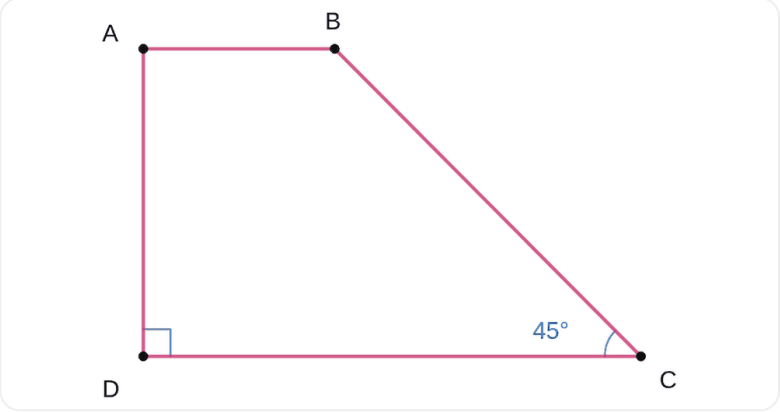
10 בטרפז $ABCD$ ($AB=6$, $DC=12$) האלכסונים נחתכים ב-O. אם $AC=15$, מצאו את AO ואת OC.



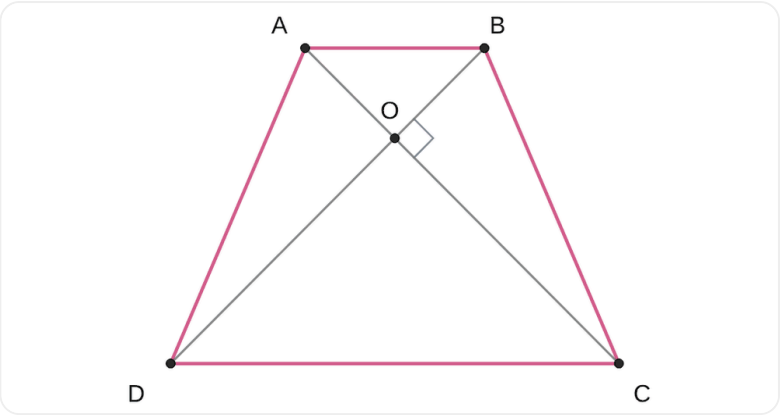
11 טרפז ישר זווית: הבסיסים 5 ו-11, והשוק הניצבת 8. מצאו את השוק השנייה ואת השטח.



12 בטרפז ישר זווית $ABCD$ ($\sphericalangle D=90°$, $AB\parallel DC$) נתון $\sphericalangle C=45°$, $AB=5$, $AD=8$. מצאו את DC ואת BC.



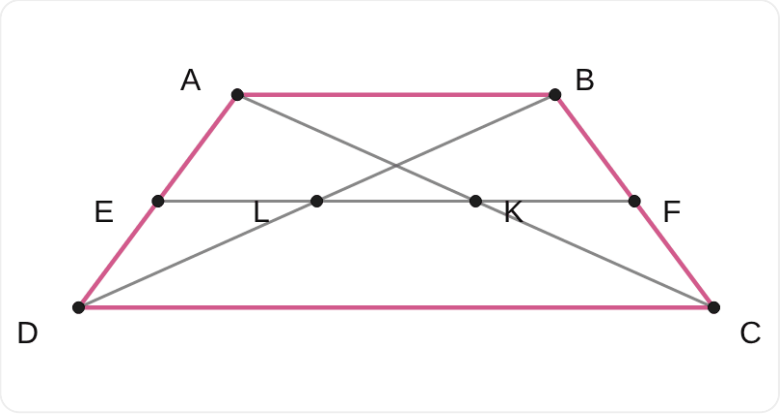
13 בטרפז שווה שוקיים האלכסונים מאונכים זה לזה, והבסיסים 4 ו-10. מצאו את גובה הטרפז ואת שטחו.



14 בטרפז שווה שוקיים זווית הבסיס $60°$, השוק 6 והבסיס הקטן 5. מצאו את הבסיס הגדול ואת השטח.

15 בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$) חוצי הזוויות $\sphericalangle A$ ו-$\sphericalangle D$ נחתכים בנקודה P. מצאו את $\sphericalangle APD$.

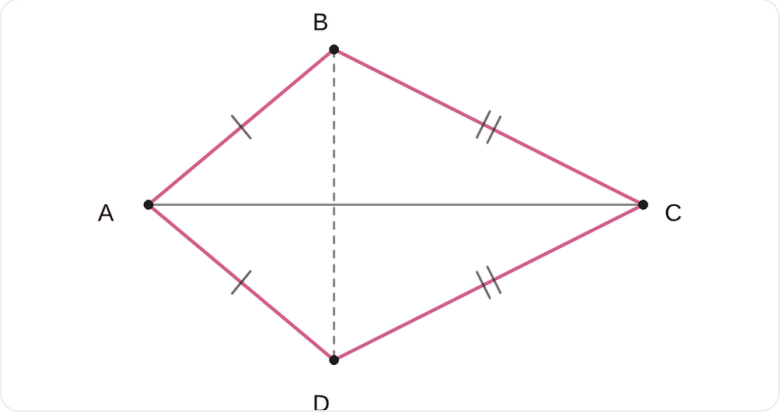
16 בטרפז $ABCD$ ($AB = 6$, $DC = 12$) קטע האמצעים EF חותך את האלכסונים ב-K וב-L. מצאו את EK, KL ו-LF.



17 הוכיחו: ישר החוצה שוק אחת של טרפז ומקביל לבסיסים חוצה גם את השוק השנייה.

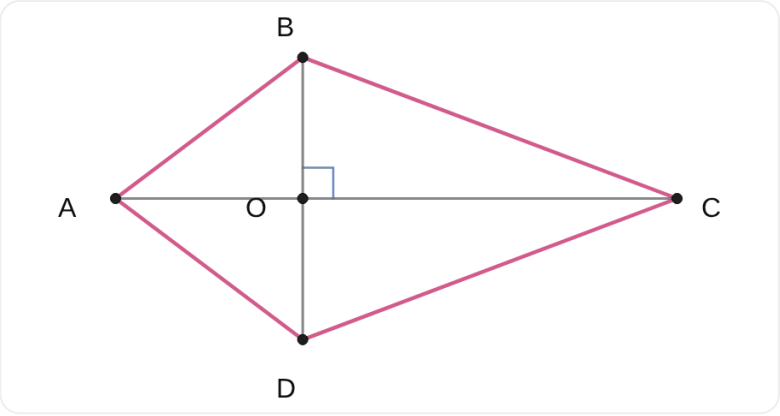
18 במרובע $ABCD$: $AB \parallel DC$ ו-$\sphericalangle D = \sphericalangle C$. הוכיחו שהוא טרפז שווה שוקיים (או מלבן).

19 בדלתון $ABCD$ ($AB=AD$, $CB=CD$) נתון $\sphericalangle BAD=70^\circ$ ו- $\sphericalangle BCD=50^\circ$. מצאו את $\sphericalangle ABC$.



20 בדלתון האלכסונים 6 ו- 10. מה שטח הדלתון?

21 בדלתון $ABCD$ ($AB=AD=5$, $CB=CD$) האלכסון הראשי $AC=12$ והאלכסון המשני $BD=6$. מצאו את CB.



22 הוכיחו: האלכסון הראשי בדלתון חוצה את הזוויות שבקצותיו ומאונך לאלכסון המשני וחוצה אותו.

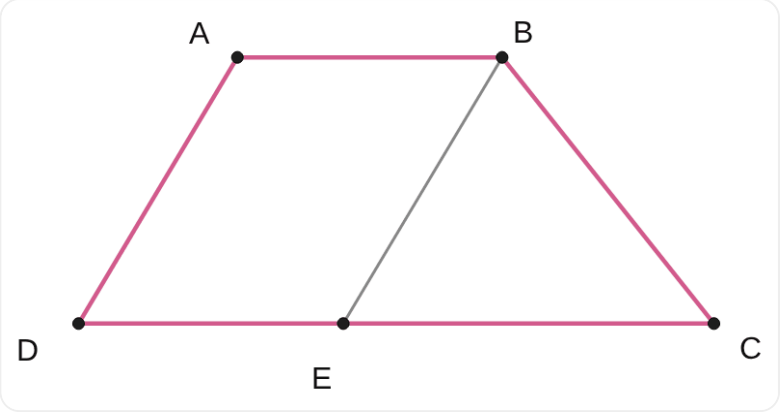
23 דלתון שבו כל ארבע הצלעות שוות – מה הוא? ודלתון שבו שתי זוויות ישרות נגדיות?

24 בדלתון $ABCD$ ($AB=AD$, $CB=CD$) $\sphericalangle B=\sphericalangle D=90^\circ$, $AB=6$, $BC=8$. מצאו את האלכסון AC ואת האלכסון BD.

25 בדלתון זוויות הצלעות השוות 100° כל אחת, וזווית ראש אחת 90°. מצאו את הזווית הרביעית.

26 במרובע $ABCD$ האלכסון AC הוא אנך אמצעי ל-BD. הוכיחו ש-$ABCD$ דלתון.

27 בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$, $AB < DC$) מעבירים דרך B מקביל ל-AD החותך את DC ב-E. אם $AB = 5$, $DC = 12$, $AD = 6$, $BC = 7$ – מהו היקף $\triangle BEC$?



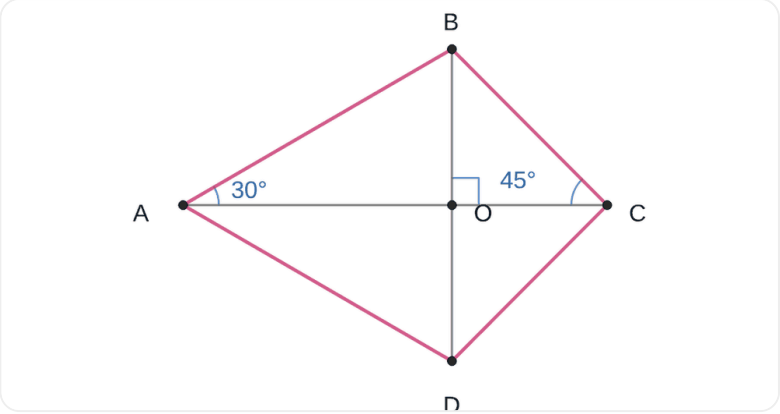
28 בטרפז הבסיסים a ו-b והגובה h. הביעו את השטח בעזרת קטע האמצעים m.

29 בטרפז שווה שוקיים $ABCD$ ($AB \parallel DC$) $AB = AD = BC$, ו-$\sphericalangle D = 60°$.
מצאו את היחס $DC : AB$.

30 בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$) נתון $AB = 4$, $DC = 9$. האלכסונים נחתכים ב-O.
מה היחס בין שטח $\triangle AOB$ לשטח $\triangle COD$?

31 בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$) M אמצע AD. הוכיחו ששטח $\triangle MBC$ הוא חצי משטח הטרפז.

32 בדלתון $ABCD$ ($AB = AD$, $CB = CD$) נתון $\sphericalangle BAC = 30°$, $\sphericalangle BCA = 45°$, $BD = 4$. מצאו את AC.



33 בטרפז שווה שוקיים האלכסון חוצה את זווית הבסיס הגדול, הבסיס הקטן 5 והשוק 5. אם זווית הבסיס $60°$, מה הבסיס הגדול?

✔ תשובות סופיות – נושא 5.2

1. $\sphericalangle A=\sphericalangle B=115^\circ$, $\sphericalangle C=65^\circ$
2. $\sphericalangle A=135^\circ$, $\sphericalangle D=45^\circ$
3. $EF=9$
4. 8 ו-14
5. שוק $2\sqrt{5}$; היקף $16+4\sqrt{5}$
6. 11
7. גובה 8 ; שטח 112
8. $\triangle ADC\cong\triangle BCD$ (צ.ז.צ) ; 9
9. $\sphericalangle BAC=\sphericalangle ACD=\sphericalangle ACB$ ולכן $AB=BC$; היקף 31
10. $AO=5$, $OC=10$ (יחס $1:2$)
11. 10 ; 64
12. $DC=13$, $BC=8\sqrt{2}$
13. גובה 7 (חצי סכום הבסיסים) ; שטח 49
14. 11 ; $24\sqrt{3}$
15. 90°
16. $EK=6$, $KL=3$, $LF=6$
17. משפט קטע אמצעים במשולש פעמיים (דרך אלכסון)
18. מעבירים גבהים ומקבלים משולשים חופפים – $AD=BC$
19. $\sphericalangle ABC=120^\circ$
20. 30
21. $CB=\sqrt{73}$
22. $\triangle ABC\cong\triangle ADC$ (צ.צ.צ) ואז במשולש שו"ש ABD חוצה זווית הראש הוא גם גובה ותיכון

23	מעוין ; דלתון שאפשר לחסום במעגל (האלכסון הראשי – קוטר)
24	$BD = 9.6$; $AC = 10$
25	$70°$
26	כל נקודה על האנך האמצעי שווה מרחק מקצות הקטע: $CB = CD$,$AB = AD$
27	$EC = 7$, $BE = 6$,$BC = 7$; היקף 20
28	$S = m \cdot h$
29	$1 : 2$
30	$16 : 81$
31	$S_{MBC} = \frac{1}{2} m \cdot h$ כאשר m קטע האמצעים
32	$AC = 2 + 2\sqrt{3}$
33	10

פרק 5 סיכומון סוף פרק – גיאומטריה – מרובעים

מקבילית

- צלעות נגדיות מקבילות ושוות; זוויות נגדיות שוות; זוויות סמוכות – 180°.
- האלכסונים חוצים זה את זה.
- מספיק להוכיח אחד: זוג צלעות נגדיות מקבילות ושוות, או אלכסונים חוצים.

מלבן

- מקבילית עם זווית ישרה.
- האלכסונים שווים (וחוצים זה את זה).

מעוין

- מקבילית עם שתי צלעות סמוכות שוות.
- האלכסונים מאונכים וחוצים את הזוויות.
- שטח: $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

ריבוע

- גם מלבן וגם מעוין – אלכסונים שווים, מאונכים וחוצים זוויות (45°).
- אלכסון: $a\sqrt{2}$; שטח: $a^2 = \frac{d^2}{2}$.

טרפז

- זוג צלעות מקבילות (בסיסים); זוויות ליד שוק – סכומן 180°.
- קטע אמצעים: מקביל לבסיסים ושווה $\frac{a+b}{2}$.
- שווה שוקיים: זוויות בסיס שוות ואלכסונים שווים.
- שטח: $\frac{(a+b)h}{2}$.

דלתון

- שני זוגות צלעות סמוכות שוות.
- האלכסון הראשי חוצה את האלכסון השני, מאונך לו וחוצה זוויות ראש.
- שטח: $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- להניח שאלכסוני מקבילית שווים – זה נכון רק במלבן.
- בדלתון – רק האלכסון הראשי חוצה את השני, לא להפך.
- קטע אמצעים בטרפז – לשכוח לחלק ב-2.

💡 **הטיפ של אילון:** זכרו את "עץ המרובעים": כל ריבוע הוא מעוין ומלבן, וכל מעוין ומלבן הם מקבילית. כך יודעים בדיוק אילו תכונות מותר להשתמש בהן.

פרק 6

גיאומטריה – פרופורציות

משפט תאלס, משפט חוצה הזווית ודמיון – ואיך יודעים באיזה משפט להשתמש

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

6.1 משפט תאלס, משפט חוצה הזווית ופרופורציות בדמיון

34 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



משפט תאלס ומשפט חוצה זווית

YouTube · 17:29



יחס ופרופורציה

YouTube · 9:26



תאלס, חוצה זווית או דמיון – איך מזהים?

YouTube · 5:35

6.1 משפט תאלס, משפט חוצה הזווית ופרופורציות בדמיון

תאלס: ישרים מקבילים חותכים על שוקי זווית קטעים פרופורציוניים (וגם המשפט ההפוך).
חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמולו ביחס הצלעות הכולאות: $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.
כשמחפשים את הקטע המקביל עצמו – עוברים לדמיון.

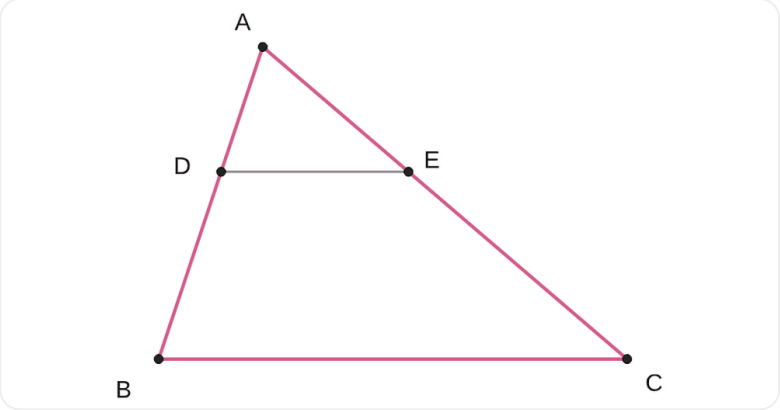
צפו לפני שמתחילים:

משפט תאלס ומשפט חוצה זווית
YouTube · 17:29

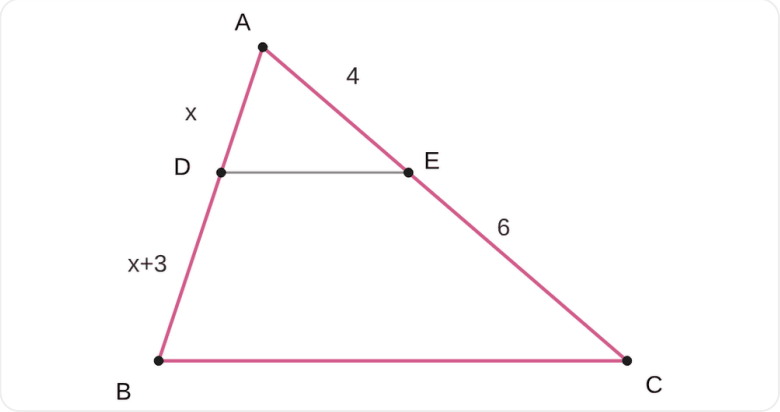
תאלס, חוצה זווית או דמיון – איך מזהים?
YouTube · 5:35

משפט דמיון ז.ז
YouTube · 7:52

1 במשולש ABC, $DE \parallel BC$ (D על AB, E על AC). נתון: $AD=4$, $DB=6$, $AE=5$. מצאו את EC.

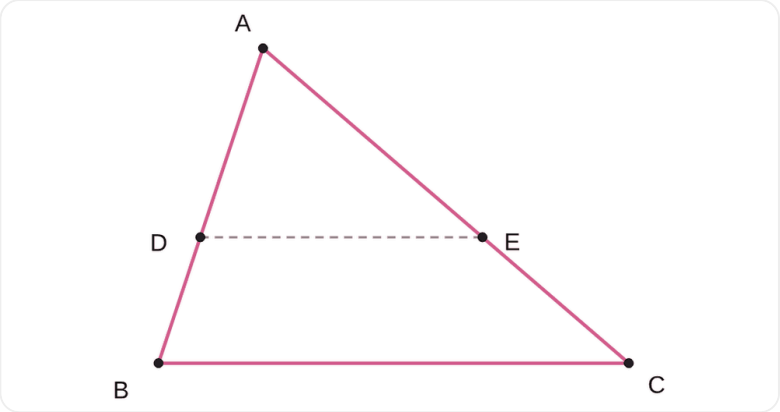


2 במשולש ABC, $DE \parallel BC$, $AD = x$, $DB = x + 3$, $AE = 4$, $EC = 6$.
מצאו את x.



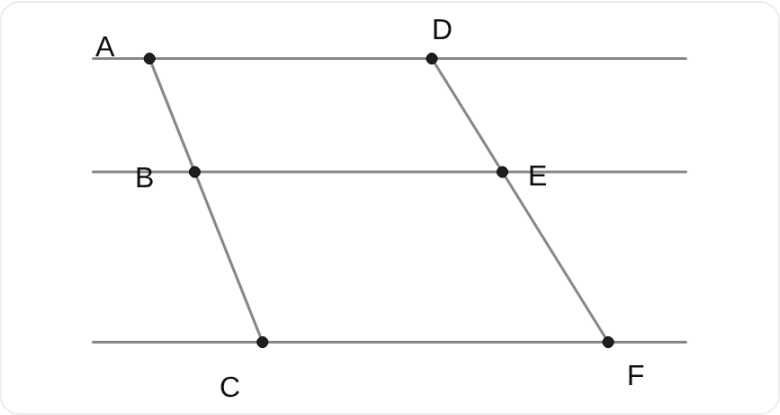
3 במשולש ABC, $DE \parallel BC$, $AD = 3$, $AB = 12$, $AC = 16$. מצאו את AE ואת EC.

4 במשולש ABC הנקודות D על AB ו-E על AC, ו-$AD = 6$, $DB = 4$, $AE = 9$, $EC = 6$. האם $DE \parallel BC$? נמקו.

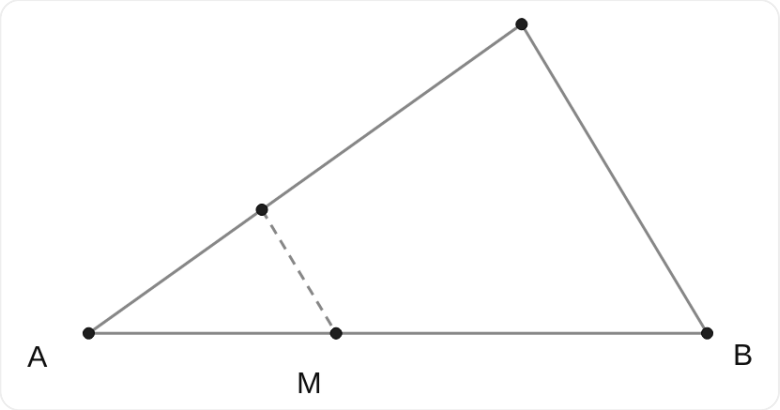


5 במשולש ABC: $AD = 5$, $DB = 3$, $AE = 7$, $EC = 4$. האם $DE \parallel BC$?

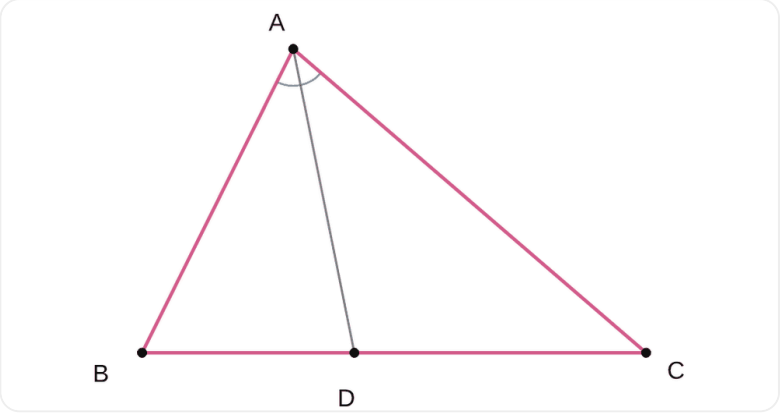
6 שלושה ישרים מקבילים חותכים שני ישרים: על האחד נוצרו הקטעים $AB = 4$, $BC = 6$, ועל השני $DE = 5$. מצאו את EF.



7 חלקו (בבנייה בעזרת תאלס) קטע באורך 10 ביחס $3 : 2$. מה אורכי שני החלקים?



8 במשולש ABC AD חוצה את $\sphericalangle A$. נתון: $AB = 6$, $AC = 9$, $BC = 10$. מצאו את BD ואת DC.

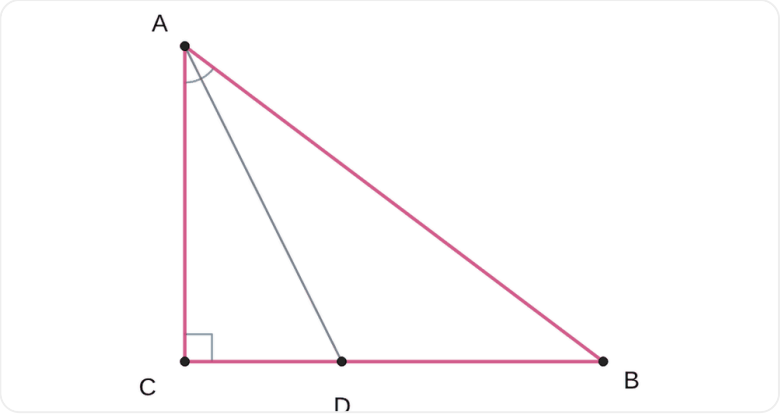


9 במשולש ABC, AD חוצה זווית, $BD = 3$, $DC = 5$, $AB = 6$. מצאו את AC.

10 במשולש ABC, $AB=8$, $AC=12$, ו-AD חוצה זווית. מה היחס $DC:BD$?
אם $BC=15$, מצאו את BD.

11 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB=AC$) AD חוצה זווית הראש. מה היחס $DC:BD$ לפי משפט חוצה הזווית? איזה משפט אחר מאשר זאת?

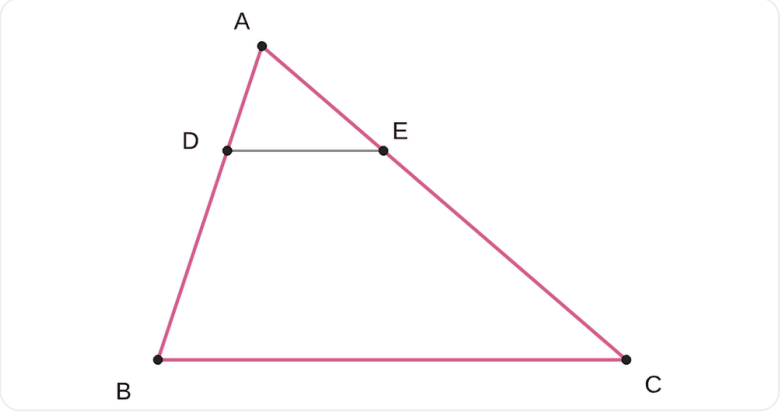
12 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C=90°$): $AC=6$, $BC=8$, ו-AD חוצה את $\sphericalangle A$ (D על BC). מצאו את CD ואת DB.



13 במשולש ABC BD חוצה את $\sphericalangle B$ (D על AC). $AB=10$, $BC=15$,
$AC=20$. מצאו את AD.

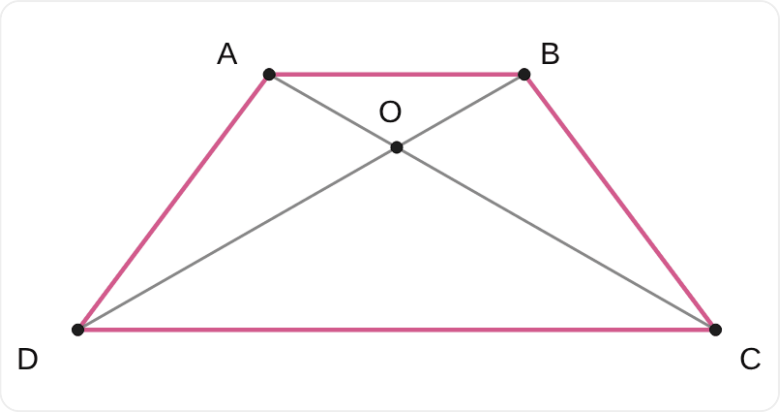
14 במשולש ABC AD חוצה זווית, $BD=x$, $DC=x+2$, $AB=6$, $AC=8$.
מצאו את x ואת BC.

15 במשולש ABC, $DE\parallel BC$ ו-$AD:DB=1:2$. נתון $BC=12$. מצאו את DE (שימו לב – כאן צריך דמיון, לא תאלס בלבד).



16 במשולש ABC, $DE \parallel BC$, $AD = 2$, $DB = 3$, $DE = 4$. מצאו את BC ואת היחס $AE : EC$.

17 בטרפז $ABCD$ ($DC \parallel AB$) האלכסונים נחתכים ב-O. $AO = 4$, $OC = 10$, $BO = 6$. מצאו את OD.

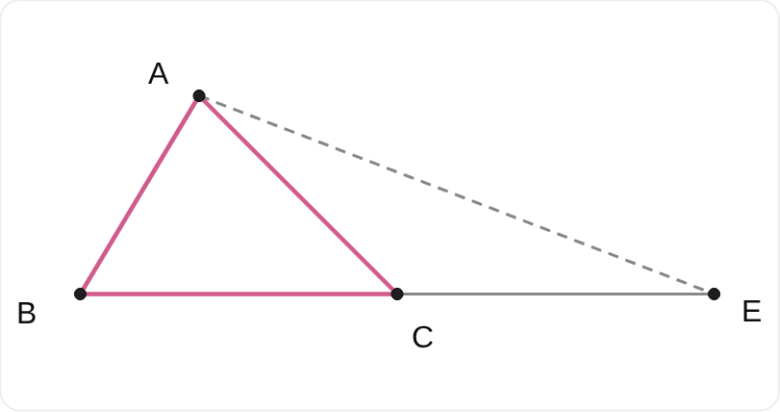


18 בטרפז $ABCD$ ($DC \parallel AB$) ישר המקביל לבסיסים חותך את השוק AD בנקודה E ואת השוק BC בנקודה F. $AE = 2$, $ED = 6$, $BC = 12$. מצאו את BF.

19 במשולש ABC, D אמצע AB. דרך D מעבירים מקביל ל-BC החותך את AC ב-E, ודרך E מקביל ל-AB החותך את BC ב-F. אם $BC = 14$, מצאו את BF ואת FC.

20 במשולש ABC הנקודה D על AB כך ש-$AD : DB = 3 : 1$, ו-$DE \parallel BC$. אם שטח $\triangle ABC$ הוא 48, מצאו את שטח $\triangle ADE$.

21 במשולש ABC: $AB = 9$, $AC = 6$, $BC = 10$. חוצה הזווית החיצונית ב-A חותך את המשך BC בנקודה E. מצאו את CE (משפט חוצה זווית חיצונית: $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$).



22 ניווט: בכל מקרה – תאלס, חוצה זווית או דמיון? (א) $DE \parallel BC$ ומחפשים יחס על הצלעות; (ב) $DE \parallel BC$ ומחפשים את DE; (ג) קרן חוצה זווית ומחפשים קטעים על הצלע הנגדית.

23 במשולש ABC, AD חוצה זווית ו-$DE \parallel AB$ (E על AC). הוכיחו ש-$\triangle ADE$ שווה שוקיים. אם $AB = 6$, $AC = 12$ – מצאו את AE.

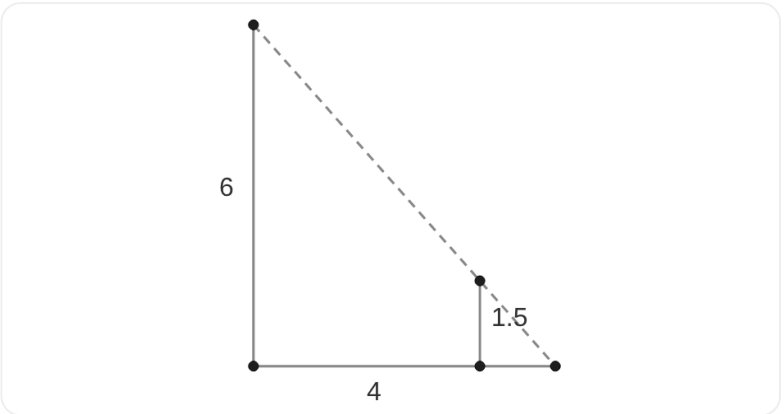
24 שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי שני ישרים הנפגשים בנקודה O (צורת "שעון חול"). על ישר אחד $OA = 3$, $OB = 5$ (A, B בצדדים שונים של O), ועל השני $OC = 4$. מצאו את OD.

25 במשולש ABC, $DE \parallel BC$ ו-$FG \parallel BC$ (D, F על AB). $AD = DF = FB$. אם $BC = 18$, מצאו את DE ואת FG.

26 במשולש ABC, AM תיכון ו-AD חוצה זווית. $AB = 5$, $AC = 7$, $BC = 12$. מצאו את DM.

27 במשולש ABC, BE חוצה את $\sphericalangle B$ ו-CF חוצה את $\sphericalangle C$. $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 7$. מצאו את AE ואת AF.

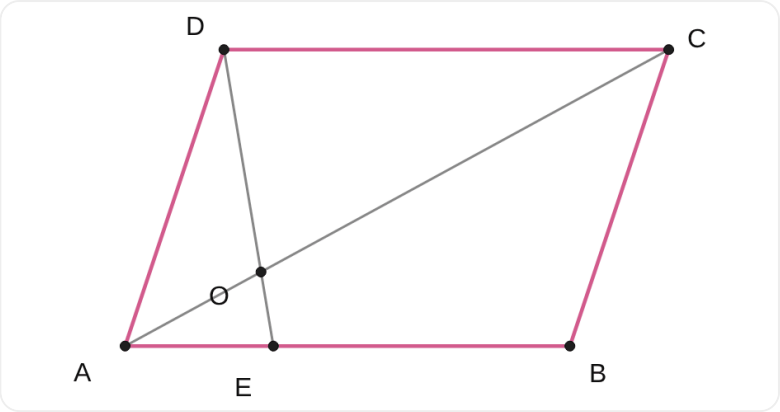
28 קרן אור: עמוד בגובה 1.5 מטר עומד במרחק 4 מטר ממנורה בגובה 6 מטר. מה אורך הצל של העמוד?



29 במשולש ABC, D על BC כך ש-$BD : DC = 1 : 3$, ו-E על AD כך ש-$AE : ED = 2 : 1$. מעבירים דרך E מקביל ל-BC החותך את AB ב-F. מצאו את $AF : FB$.

30 במשולש ישר זווית ושווה שוקיים ABC ($\sphericalangle C = 90°$, $AC = BC = 1$) חוצה AD את $\sphericalangle A$. מצאו את CD.

31 במקבילית $ABCD$, E על AB כך ש-$AE : EB = 1 : 2$. הקטע DE חותך את האלכסון AC ב-O. מצאו את היחס $AO : OC$.



32 בטרפז $ABCD$ ($AB = 4$, $DC = 10$, $AB \parallel DC$), דרך נקודת חיתוך האלכסונים O מעבירים ישר מקביל לבסיסים. מה אורך הקטע שלו בתוך הטרפז?

33 במשולש ABC ($AB = 12$, $AC = 18$) חוצה AD את $\sphericalangle A$ ו-$DE \parallel AC$ (E על AB). מצאו את DE.

34 במשולש ABC, D על AB ו-E על AC, $DE \parallel BC$, והיקף $\triangle ADE$ הוא 15 בעוד היקף $\triangle ABC$ הוא 25. אם $DB = 4$, מצאו את AB.

✔ תשובות סופיות – נושא 6.1

1. $EC = 7.5$ (משפט תאלס)
2. $x = 6$
3. $AE = 4$, $EC = 12$
4. כן – $\frac{6}{4} = \frac{9}{6}$ (המשפט ההפוך לתאלס)
5. לא – $\frac{5}{3} \neq \frac{7}{4}$
6. $EF = 7.5$
7. 4 ו-6
8. $BD = 4$, $DC = 6$ (משפט חוצה הזווית)
9. $AC = 10$
10. $BD = 6$; $2:3$
11. במשולש שו"ש חוצה זווית הראש הוא תיכון ; $1:1$
12. $CD = 3$, $DB = 5$
13. $AD = 8$
14. $x = 6$; $BC = 14$
15. $DE = 4$
16. $BC = 10$; $2:3$
17. $OD = 15$
18. $BF = 3$
19. $BF = 7$, $FC = 7$
20. 27
21. $CE = 20$
22. (א) תאלס ; (ב) דמיון ; (ג) חוצה זווית
23. $\sphericalangle EDA = \sphericalangle DAB = \sphericalangle DAE$; $AE = DE = 4$

24 $OD = \frac{20}{3}$

25 $FG = 12$,$DE = 6$

26 $DM = 1$; $BM = 6$,$BD = 5$

27 $AF = \frac{48}{15} = 3.2$,$AE = \frac{48}{13}$

28 $\frac{4}{3}$ מטר

29 $2:1$

30 $CD = \sqrt{2} - 1$

31 $1:3$

32 $\frac{40}{7}$ (הממוצע ההרמוני: $\frac{2ab}{a+b}$)

33 $DE = 7.2$

34 $AB = 10$

פרק 6 סיכומון סוף פרק – גיאומטריה – פרופורציות

משפט תאלס

- ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית – קטעים מתאימים פרופורציוניים.
- $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ כאשר $DE \parallel BC$.
- משפט תאלס ההפוך: קטעים פרופורציוניים ← הישרים מקבילים.

המשפט המורחב

- $DE \parallel BC$: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$.
- היחס עם הצלע המקבילה – רק "מהקודקוד לכל הצלע".

משפט חוצה הזווית

- חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמולו ביחס הצלעות הכולאות: $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.
- גם המשפט ההפוך נכון.

פרופורציות בדמיון

- משולשים דומים: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k$.
- ישר זווית עם גובה ליתר: $h^2=p\cdot q$, $a^2=p\cdot c$.

איך ניגשים?

- מזהים מקבילים ← תאלס; חוצה זווית ← משפט חוצה הזווית.
- מסמנים את הנעלם x ובונים משוואה מהפרופורציה.
- מצליבים: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- להשתמש ב-$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{DB}$ – שגוי! עם DE חייבים $\frac{AD}{AB}$.
- חוצה זווית – להתאים לצלע הלא נכונה (כל קטע "שייך" לצלע הסמוכה לו).
- להפעיל תאלס בלי לוודא שהישרים מקבילים.

💡 **הטיפ של אילון:** כתבו את הפרופורציה במילים לפני שמציבים מספרים – "קטע קטן חלקי קטע גדול" באותו סדר בשני הצדדים, וכך לא מתבלבלים.

פרק 7

גיאומטריה – מעגלים

מיתרים, זוויות, משיקים ומצולעים חסומים וחוסמים – כל משפטי המעגל לבגרות

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

7.1	אנך ממרכז המעגל, מיתרים ומרחקים	36 תרגילים
7.2	זוויות במעגל – היקפיות, מרכזיות ונשענות על קוטר	35 תרגילים
7.3	משיקים למעגל	35 תרגילים
7.4	מצולעים חסומים וחוסמים, שני מעגלים, קשת וגזרה	35 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

▶ גיאומטריה – כל משפטי המשיק וניווט
YouTube · 6:23

▶ גיאומטריה – תרגול וטיפים לבגרות 5 יחידות
YouTube · 17:32

▶ גיאומטריה – מצבים ללא משפט
YouTube · 9:45

▶ חישוב היקף מעגל ושטח עיגול
YouTube · 3:26

🎛️ המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

זווית מרכזית וזווית היקפית



גררו את הנקודות על המעגל וראו שהזווית המרכזית תמיד פי 2 מהזווית ההיקפית – כולל זווית הנשענת על קוטר.

7.1 אנך ממרכז המעגל, מיתרים ומרחקים

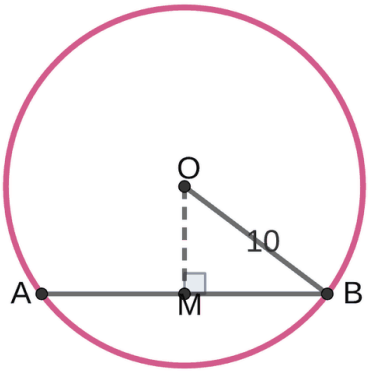
תזכורת: האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, ולכן $R^2 = d^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$ (d – מרחק המיתר מהמרכז, c – אורך המיתר). מיתרים שווים נמצאים במרחקים שווים מהמרכז, ומיתר ארוך יותר קרוב יותר למרכז.

צפו לפני שמתחילים:

כל החומר בגיאומטריה – מהחטיבה ועד הבגרות
YouTube · 9:03

גיאומטריה – תרגול וטיפים לבגרות 5 יחידות
YouTube · 17:32

1 במעגל שמרכזו O ורדיוסו 10 ס"מ העבירו מיתר AB שאורכו 16 ס"מ. OM הוא האנך מהמרכז למיתר. מצאו את המרחק של המיתר ממרכז המעגל.



2 במעגל שרדיוסו 13 ס"מ, מרחק המיתר AB ממרכז המעגל הוא 5 ס"מ. מצאו את אורך המיתר.

3 אורך מיתר במעגל הוא 24 ס"מ, ומרחקו ממרכז המעגל 9 ס"מ. מצאו את רדיוס המעגל.

4 במעגל שרדיוסו 17 ס"מ העבירו מיתר AB שאורכו 30 ס"מ. מצאו את שטח המשולש AOB.

5 במעגל שרדיוסו 25 ס"מ העבירו שני מיתרים מקבילים שאורכם 48 ס"מ ו-14 ס"מ, **באותו צד** של המרכז. מצאו את המרחק בין המיתרים.

6 אותם נתונים כמו בתרגיל הקודם, אבל המיתרים נמצאים **משני צדי** המרכז. מה המרחק בין המיתרים עכשיו?

7 במעגל שרדיוסו 10 נתונים שני מיתרים שווים $AB = CD$. מרחק המיתר AB מהמרכז הוא 6. מצאו את מרחק המיתר CD מהמרכז ואת אורכו. איזה משפט שימש אתכם?

8 במעגל שמרכזו O: $OM \perp AB$ ו-$ON \perp CD$, וידוע ש-$OM = ON$. הוכיחו ש-$AB = CD$.

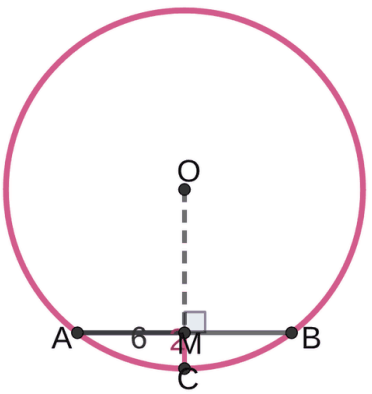
9 במעגל אחד העבירו מיתר באורך 10 ומיתר באורך 14. איזה מהם קרוב יותר למרכז המעגל? נמקו.

10 M היא אמצע המיתר AB. ידוע ש-$OM = 3$ ו-$AM = 4$. מצאו את קוטר המעגל.

11 במעגל שרדיוסו 8 העבירו מיתר שאורכו שווה לרדיוס. מצאו את מרחק המיתר מהמרכז. איזה משולש נוצר בין המיתר לשני הרדיוסים?

12 מרחק מיתר ממרכז מעגל שרדיוסו 12 שווה למחצית הרדיוס. מצאו את אורך המיתר.

13 המיתר AB אורכו 12. האנך האמצעי למיתר חותך את המיתר ב-M ואת הקשת הקטנה ב-C, כך ש-$MC = 2$. מצאו את רדיוס המעגל.



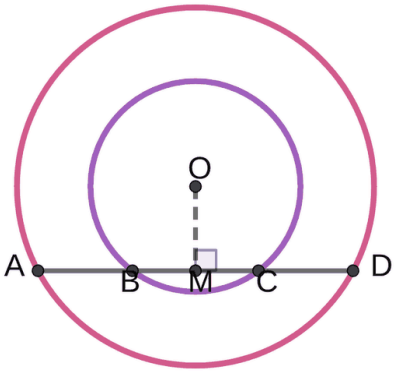
14 במעגל שרדיוסו 13 העבירו מיתר שאורכו 24. האנך האמצעי למיתר חותך את המעגל בשתי נקודות. מצאו את המרחק של כל אחת מהן מהמיתר.

15 קשת של גשר בנויה כחלק ממעגל. רוחב הגשר (המיתר) 16 מ', וגובה הקשת מעל אמצע המיתר 4 מ'. מצאו את רדיוס המעגל.

16 הקוטר AB מאונך למיתר CD ונחתך איתו בנקודה E. ידוע ש-$AE=2$ ו-$EB=8$. מצאו את אורך המיתר CD.

17 הקוטר AB מאונך למיתר CD ב-E. ידוע ש-$CD=12$ ו-$AE=4$ (הנקודה E בין A למרכז). מצאו את רדיוס המעגל.

18 שני מעגלים בעלי מרכז משותף O, ברדיוסים 17 ו-10. ישר שמרחקו מ-O הוא 8 חותך את המעגל הגדול ב-A ו-D ואת הקטן ב-B ו-C (לפי הסדר A,B,C,D). מצאו את AB.



19 הנקודה P נמצאת בתוך מעגל שרדיוסו 10, במרחק 6 מהמרכז. מצאו את אורך המיתר הקצר ביותר ואת אורך המיתר הארוך ביותר שעוברים דרך P.

20 באותו מעגל ($R=10$, $OP=6$): כמה מיתרים שאורכם מספר שלם עוברים דרך הנקודה P?

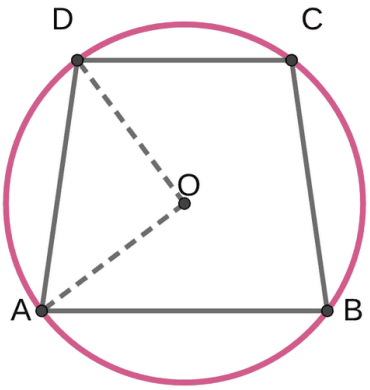
21 במעגל שמרכזו O ורדיוסו 6, הזווית המרכזית $\angle AOB=120^\circ$. מצאו את מרחק המיתר AB מהמרכז ואת אורכו.

22 במעגל שמרכזו O, $\angle AOB = 90°$ ו-$AB = 8\sqrt{2}$. מצאו את הרדיוס ואת מרחק המיתר מהמרכז.

23 שני מיתרים מקבילים שאורכם 16 ו-12 נמצאים משני צדי המרכז, והמרחק ביניהם 14. מצאו את רדיוס המעגל.

24 שני מיתרים מקבילים שאורכם 30 ו-24 נמצאים באותו צד של המרכז, והמרחק ביניהם 9. מצאו את רדיוס המעגל. מה מיוחד במיתר הארוך?

25 הטרפז $ABCD$ חסום במעגל שרדיוסו 10. בסיסי הטרפז $AB = 16$ ו-$CD = 12$, והמרכז נמצא בין הבסיסים. מצאו את גובה הטרפז ואת שטחו.



26 אותו טרפז ($R = 10$, $AB = 16$, $CD = 12$), אבל הבסיסים באותו צד של המרכז. מצאו את גובה הטרפז ואת שטחו.

27 הוכיחו: האנך האמצעי של כל מיתר במעגל עובר דרך מרכז המעגל.

28 נתון מעגל שהמרכז שלו לא מסומן. הסבירו איך מוצאים את המרכז בעזרת שני מיתרים לא מקבילים.

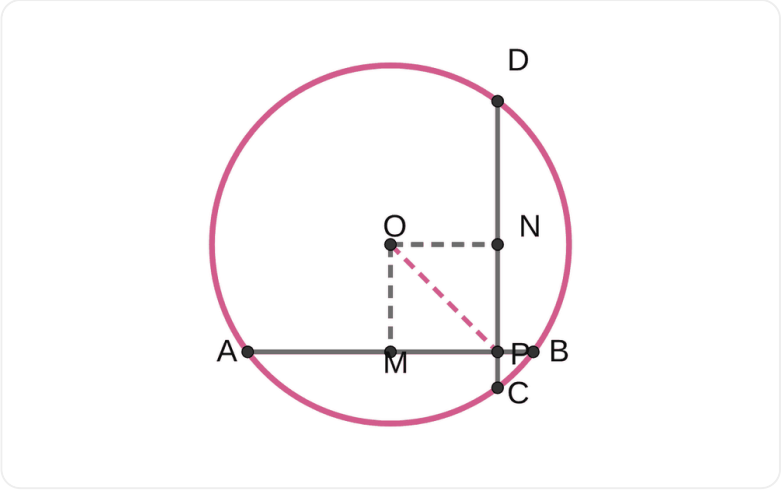
29 מרחק המיתר $AB = 10$ מהמרכז הוא 12. במעגל העבירו מיתר $CD \parallel AB$ שמרחקו מהמרכז 5. מצאו את אורך CD.

30 במעגל שרדיוסו 10, מחצית אורך המיתר גדולה ב-2 ממרחקו מהמרכז. מצאו את אורך המיתר.

31 במעגל שרדיוסו 20, מרחק מיתר מהמרכז שווה ל-$\frac{3}{4}$ ממחצית אורכו. מצאו את אורך המיתר.

32 במעגל שרדיוסו 5 העבירו מיתר $AB=6$. מצאו את ההיקף ואת השטח של המשולש AOB.

33 במעגל שרדיוסו 10 שני מיתרים שווים $AB=CD=16$ נחתכים בנקודה P ומאונכים זה לזה. מצאו את המרחק OP.



34 AB קוטר במעגל שרדיוסו 10. המיתר $CD=16$ מאונך לקוטר ב-E, ו-E בין A למרכז O. מצאו את AE, את AC ואת שטח המשולש ACD.

35 מיתר נמצא במרחק 8 ממרכז מעגל שקוטרו 34. מצאו את אורך המיתר ואת המרחקים מהמיתר לשתי נקודות הקצה של הקוטר המאונך לו.

36 במעגל שרדיוסו 13 העבירו מיתר $AB=24$. הנקודה C על המיתר כך ש-$AC=7$. מצאו את המרחק OC.

✔ תשובות סופיות – נושא 7.1

1. $OM = 6$ ס"מ
2. $AB = 24$ ס"מ
3. $R = 15$ ס"מ
4. $S_{AOB} = 120$ סמ"ר (גובה $OM = 8$)
5. 17 ס"מ ($24 - 7$)
6. 31 ס"מ ($24 + 7$)
7. מרחק 6, $CD = 16$; מיתרים שווים – מרחקים שווים מהמרכז
8. מיתרים שמרחקם מהמרכז שווה – שווים (חפיפת משולשים ישרי זווית OMB, ONC לפי יתר וניצב)
9. המיתר שאורכו 14 – במעגל, מיתר ארוך יותר קרוב יותר למרכז
10. קוטר $= 10$
11. $4\sqrt{3}$; משולש שווה צלעות
12. $12\sqrt{3}$
13. $R = 10$
14. 8 ו-18
15. $R = 10$ מ'
16. $CD = 8$ (רדיוס 5, $OE = 3$, $CE = 4$)
17. $R = 6.5$
18. $AB = CD = 9$
19. הקצר: 16 (מאונך ל-OP) ; הארוך: 20 (קוטר)
20. 8 מיתרים (באורך 16 ו-20 – אחד מכל אחד; באורכים 17, 18, 19 – שניים מכל אחד)
21. $OM = 3$; $AB = 6\sqrt{3}$
22. $R = 8$; $4\sqrt{2}$

23 $R = 10$ (המרחקים מהמרכז: 6 ו-8)

24 $R = 15$; המיתר שאורכו 30 הוא קוטר

25 גובה 14 ; שטח 196

26 גובה 2 ; שטח 28

27 המרכז נמצא במרחק שווה מקצות המיתר ($OA = OB$), ולכן הוא על האנך האמצעי

28 מעבירים את האנכים האמצעיים לשני המיתרים – נקודת החיתוך שלהם היא המרכז

29 $CD = 24$ ($R = 13$)

30 16 (מרחק 6)

31 32 (מרחק 12)

32 היקף 16 ; שטח 12

33 $OP = 6\sqrt{2}$ (המרובע $OMPN$ ריבוע בצלע 6)

34 $AE = 4$; $AC = 4\sqrt{5}$; $S_{ACD} = 32$

35 מיתר 30 ; 9 ו-25

36 $OC = 5\sqrt{2}$ ($OM = 5$,$CM = 5$)

7.2 זוויות במעגל – היקפיות, מרכזיות ונשענות על קוטר

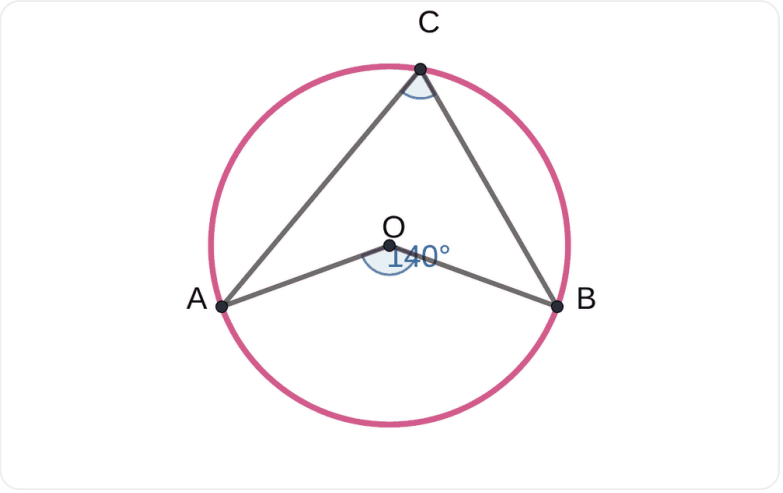
זווית מרכזית שווה לפעמיים הזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת. זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת (או על מיתרים שווים) שוות. זווית היקפית הנשענת על קוטר – ישרה. במרובע חסום סכום זוויות נגדיות 180°.

צפו לפני שמתחילים:

גיאומטריה – מצבים ללא משפט
YouTube · 9:45

כל הזוויות – מקבילים, 180° ו-360°
YouTube · 10:02

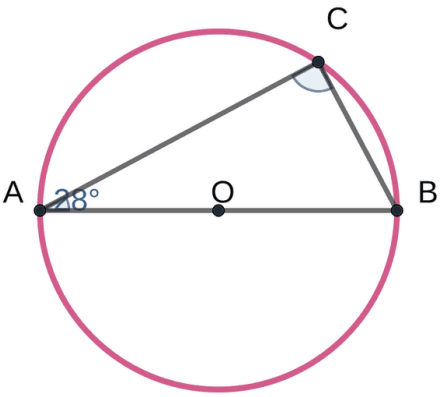
1 בציור, O מרכז המעגל ו-$\angle AOB = 140^\circ$. מצאו את הזווית ההיקפית $\angle ACB$.



2 הזווית ההיקפית $\angle ADB = 35^\circ$ נשענת על הקשת AB. מצאו את הזווית המרכזית $\angle AOB$ הנשענת על אותה קשת.

3 הנקודות C ו-D נמצאות על המעגל באותו צד של המיתר AB, ו-$\angle ACB = 55^\circ$. מצאו את $\angle ADB$. נמקו.

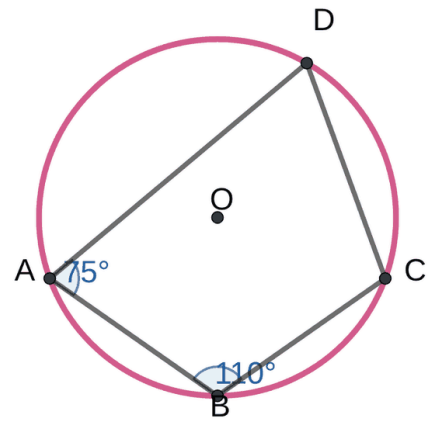
4 AB קוטר במעגל, ו-C נקודה על המעגל. ידוע ש-$\angle CAB = 28°$. מצאו את $\angle ABC$.



5 AB קוטר במעגל שרדיוסו 6.5, ו-C נקודה על המעגל כך ש-$AC = 5$. מצאו את BC ואת שטח המשולש ABC.

6 במעגל שמרכזו O, $\angle AOB = 100°$. הנקודה C נמצאת על הקשת הקטנה AB. מצאו את $\angle ACB$.

7 המרובע $ABCD$ חסום במעגל, ו-$\angle A = 75°$, $\angle B = 110°$. מצאו את $\angle C$ ואת $\angle D$.



8 במרובע $ABCD$ החסום במעגל: $\angle A = 2x + 10°$ ו-$\angle C = 3x - 30°$. מצאו את x ואת הזוויות $\angle A$, $\angle C$.

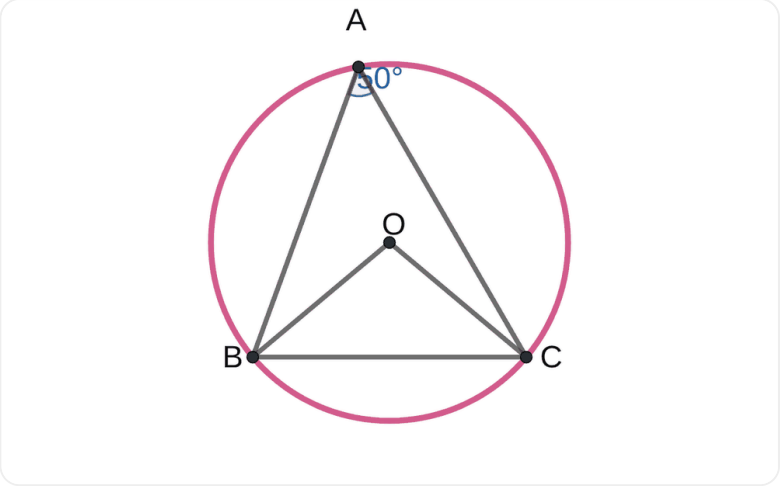
9 המרובע $ABCD$ חסום במעגל. המשך הצלע AB מעבר ל-B יוצר זווית חיצונית של $85°$. מצאו את $\angle D$.

10 הוכיחו: מקבילית החסומה במעגל היא מלבן.

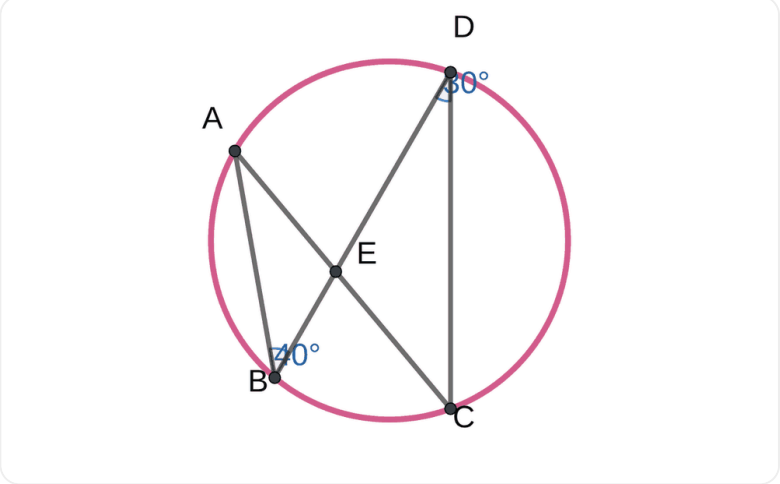
11 הוכיחו: טרפז החסום במעגל הוא טרפז שווה שוקיים.

12 במעגל שמרכזו O, המשולש AOB שווה צלעות. מצאו את הזווית ההיקפית הנשענת על הקשת הקטנה AB, ואת זו הנשענת על הקשת הגדולה.

13 המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O, ו-$\angle BAC = 50°$. מצאו את $\angle OBC$.



14 המיתרים AC ו-BD נחתכים בנקודה E בתוך המעגל. ידוע ש-$\angle ABD = 40°$ ו-$\angle BDC = 30°$. מצאו את $\angle AEB$.



15 במעגל, הקשתות AB, BC ו-CA (שאינן חופפות) מתייחסות כ-$4:3:2$. מצאו את זוויות המשולש ABC.

16 במעגל, $AB=CD$ (שני מיתרים שווים). ידוע ש-$\angle AOB=64^\circ$. מצאו את $\angle COD$ ואת הזווית ההיקפית הנשענת על הקשת CD.

17 $ABCD$ מרובע חסום במעגל שבו $AB=BC$, ו-$\angle ADB=25^\circ$. מצאו את $\angle BDC$ ואת $\angle ADC$.

18 AB קוטר במעגל שמרכזו O. C על המעגל כך ש-$\angle AOC=70^\circ$. מצאו את זוויות המשולש ABC.

19 המשולש ABC ישר זווית ($\angle C=90^\circ$) וניצביו 6 ו-8. מצאו את רדיוס המעגל החוסם את המשולש. היכן נמצא מרכזו?

20 המשולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R, ו-$AB=2R$. מה גודל $\angle ACB$? הסבירו.

21 המרובע $ABCD$ חסום במעגל. האלכסון AC הוא קוטר. ידוע ש-$\angle BAC=35^\circ$ ו-$\angle DAC=20^\circ$. מצאו את זוויות המרובע.

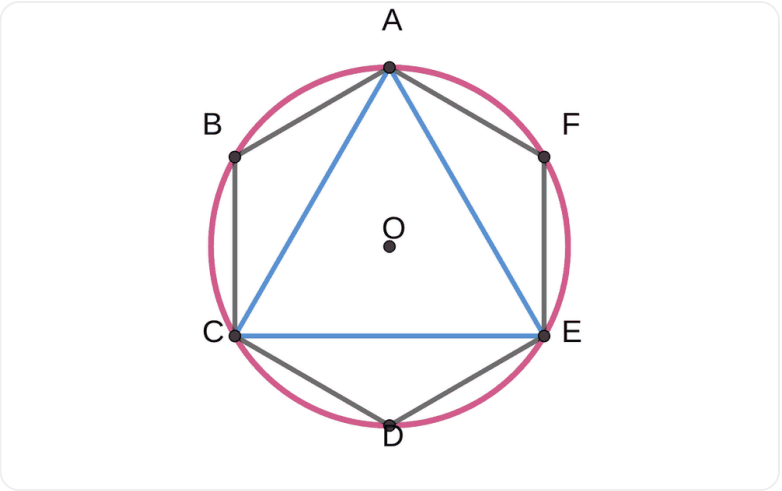
22 במעגל שמרכזו O, $\angle OAB=24^\circ$. מצאו את הזווית ההיקפית $\angle ACB$, כאשר C על הקשת הגדולה AB.

23 בציור, $\angle ACB=x$ ו-$\angle AOB=3x-40^\circ$, כאשר שתיהן נשענות על הקשת AB. מצאו את x.

24 המשולש ABC חסום במעגל, ו-$\angle ABC=\angle ACB=70^\circ$. הנקודה D על הקשת BC שאינה מכילה את A. מצאו את $\angle BDC$.

25 במעגל, AB קוטר ו-CD מיתר המקביל לו. ידוע ש-$\angle CAB=30^\circ$ (כאשר C קרובה ל-B). מצאו את $\angle ACD$.

26 המשושה המשוכלל $ABCDEF$ חסום במעגל. מצאו את $\angle ACE$, את $\angle ADB$ ואת $\angle AOB$.



27 AB קוטר במעגל. C ו-D על המעגל משני צדי AB, ו-$\angle CAB = 40°$, $\angle DBA = 25°$. מצאו את $\angle CDB$ ואת $\angle ACD$.

28 המרובע $ABCD$ חסום במעגל, $\angle ABD = 30°$, $\angle DBC = 50°$, $\angle BDC = 60°$. מצאו את כל זוויות המרובע.

29 במעגל שרדיוסו 10, הזווית ההיקפית $\angle ACB = 30°$. מצאו את אורך המיתר AB.

30 במעגל שרדיוסו 8, הזווית ההיקפית $\angle ACB = 45°$. מצאו את אורך המיתר AB.

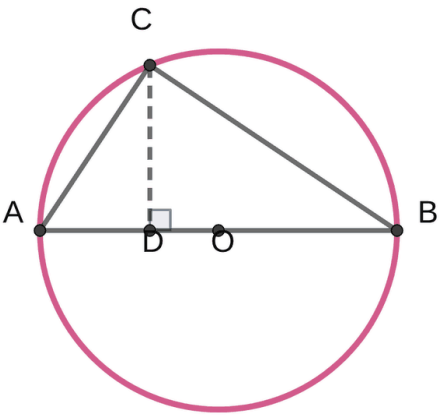
31 $ABCD$ מרובע חסום במעגל, ו-$AD \parallel BC$, $\angle B = 65°$. מצאו את $\angle C$ ואת $\angle A$.

32 הנקודות A, B, C, D על מעגל לפי הסדר,
ו-$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 50°$. מצאו את $\angle ACD$ ואת $\angle ADC$, כאשר $\angle ACD$ נשענת על הקשת AD הגדולה שאינה מכילה את B.

33 הוכיחו: אם במרובע זוג זוויות נגדיות משלימות ל-$180°$, אז ניתן לחסום אותו במעגל.
בעזרת זה קבעו: האם אפשר לחסום במעגל דלתון שבו $\angle A = \angle C = 90°$?

34 המשולש ABC חסום במעגל, AD קוטר. ידוע ש-$\angle ABC = 62°$. מצאו את $\angle CAD$.

35 AB קוטר במעגל, C על המעגל, ו-$CD \perp AB$ (D על הקוטר). ידוע ש-$AD = 4$ ו-$DB = 9$. מצאו את CD, AC ו-BC.



✔ תשובות סופיות – נושא 7.2

1. $\angle ACB = 70^\circ$
2. $\angle AOB = 70^\circ$
3. $\angle ADB = 55^\circ$ – זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת שוות
4. $\angle ABC = 62^\circ$ ($\angle ACB = 90^\circ$ כי)
5. $BC = 12$; $S = 30$
6. $\angle ACB = 130^\circ$ (נשענת על הקשת הגדולה, 260°)
7. $\angle C = 105^\circ$; $\angle D = 70^\circ$
8. $x = 40^\circ$; $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 90^\circ$
9. $\angle D = 85^\circ$ – זווית חיצונית למרובע חסום שווה לזווית הפנימית שמולה
10. במקבילית זוויות נגדיות שוות, ובמרובע חסום הן משלימות ל-180° – לכן כל אחת 90°
11. זוויות סמוכות לשוק משלימות (מקבילים), וזוויות נגדיות משלימות (מרובע חסום) – לכן זוויות הבסיס שוות
12. 30° ו-150°
13. $\angle OBC = 40^\circ$ ($\angle BOC = 100^\circ$, משולש שווה שוקיים)
14. $\angle AEB = 110^\circ$ (במשולש ECD: $\angle ECD = 40^\circ$, $\angle EDC = 30^\circ$; זוויות קודקודיות)
15. 40°, 60°, 80° (הקשתות: $80^\circ, 120^\circ, 160^\circ$)
16. $\angle COD = 64^\circ$; 32° – מיתרים שווים, קשתות שוות וזוויות שוות
17. $\angle BDC = 25^\circ$; $\angle ADC = 50^\circ$
18. $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 35^\circ$, $\angle A = 55^\circ$
19. $R = 5$; באמצע היתר
20. 90° – AB קוטר, וזווית היקפית הנשענת על קוטר ישרה
21. $\angle A = 55^\circ$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 125^\circ$, $\angle D = 90^\circ$
22. $\angle ACB = 66^\circ$ ($\angle AOB = 132^\circ$)

23	$x = 40^\circ$ ($3x - 40 = 2x$)
24	$\angle BDC = 140^\circ$ ($\angle A = 40^\circ$)
25	$\angle ACD = 30^\circ$ (זוויות מתחלפות)
26	$\angle ACE = 60^\circ$; $\angle ADB = 30^\circ$; $\angle AOB = 60^\circ$
27	$\angle CDB = 40^\circ$; $\angle ACD = \angle ABD = 25^\circ$
28	$\angle A = 110^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, $\angle C = 70^\circ$, $\angle D = 100^\circ$
29	$AB = 10$ (המשולש AOB שווה צלעות)
30	$AB = 8\sqrt{2}$ ($\angle AOB = 90^\circ$)
31	$\angle C = 65^\circ$; $\angle A = 115^\circ$ (טרפז שווה שוקיים)
32	$\angle ACD = 105^\circ$; $\angle ADC = 50^\circ$
33	כן – זוויות נגדיות $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$
34	$\angle CAD = 28^\circ$ ($\angle ADC = 62^\circ$, $\angle ACD = 90^\circ$)
35	$CD = 6$; $AC = 2\sqrt{13}$; $BC = 3\sqrt{13}$

7.3 משיקים למעגל

משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה. שני משיקים מאותה נקודה שווים, והקטע מהמרכז לנקודה חוצה את הזווית ביניהם. הזווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מהצד השני. במרובע החוסם מעגל: סכומי צלעות נגדיות שווים.

צפו לפני שמתחילים:

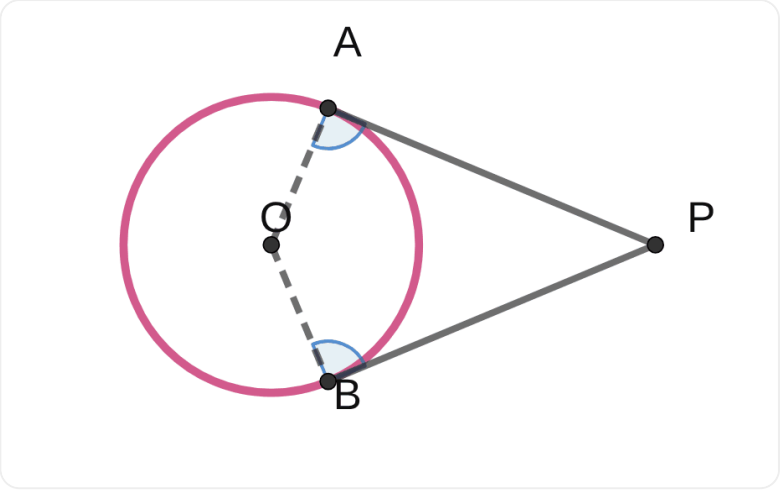


גיאומטריה – כל משפטי המשיק וניווט
YouTube · 6:23



כל משפטי השטחים בגיאומטריה – הסבר וסיכום
YouTube · 8:56

1 מהנקודה P העבירו משיק למעגל שמרכזו O ורדיוסו 5. נקודת ההשקה היא A, ו-$OP=13$. מצאו את אורך המשיק PA.



2 אורך משיק מנקודה P למעגל הוא 15, והמרחק של P ממרכז המעגל הוא 17. מצאו את רדיוס המעגל.

3 מהנקודה P העבירו שני משיקים למעגל, PA ו-PB. ידוע ש-$PA=3x+1$ ו-$PB=5x-7$. מצאו את x ואת אורך המשיק.

4 מהנקודה P העבירו שני משיקים PA, PB למעגל שמרכזו O, ו-$\angle APB=50^\circ$. מצאו את $\angle AOB$.

5 באותו מצב, $\angle APB=50^\circ$. מצאו את $\angle PAB$ ואת $\angle OAB$.

6 מהנקודה P העבירו שני משיקים למעגל שרדיוסו 6, והזווית ביניהם 60°. מצאו את המרחק OP ואת אורך המשיקים.

7 מהנקודה P העבירו שני משיקים PA, PB למעגל, והזווית ביניהם 90°. רדיוס המעגל 4. מה סוג המרובע $OAPB$, ומה המרחק OP?

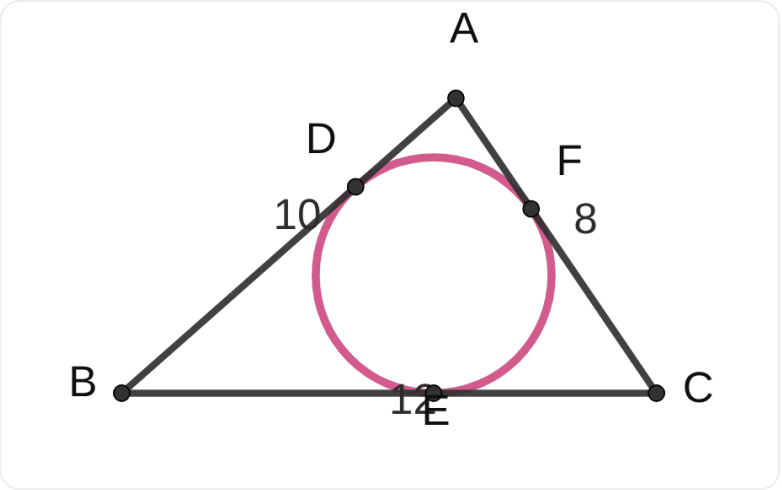
8 הוכיחו: הקטע OP (מהמרכז לנקודה שממנה יוצאים שני משיקים) חוצה את הזווית בין המשיקים.

9 מהנקודה P העבירו שני משיקים PA, PB למעגל שמרכזו O, ו-OP חותך את AB ב-M. ידוע ש-$OA = 6$ ו-$OP = 10$. מצאו את AB.

10 PA משיק למעגל ב-A, ו-AB מיתר. הזווית בין המשיק למיתר היא $\angle PAB = 70^\circ$. מצאו את הזווית ההיקפית $\angle ACB$ (C על הקשת שמול הזווית).

11 PA משיק למעגל שמרכזו O ב-A, ו-$\angle AOB = 110^\circ$. מצאו את הזווית בין המשיק PA למיתר AB (החדה).

12 משולש ABC חוסם מעגל (המעגל חסום במשולש). נקודות ההשקה מחלקות את הצלעות. ידוע: $AB = 10$, $BC = 12$, $AC = 8$. מצאו את אורכי קטעי המשיקים מכל קודקוד.



13 מעגל חסום במשולש ABC, ונוגע בצלע AB בנקודה D. ידוע ש-$AD = 4$, $DB = 6$ ו-$AC = 9$. מצאו את BC ואת היקף המשולש.

14 מעגל חסום במשולש ישר זווית שניצביו 6 ו-8. מצאו את רדיוס המעגל החסום.

15 מעגל חסום במשולש ישר זווית, ונקודת ההשקה מחלקת את היתר לקטעים 3 ו-10. מצאו את רדיוס המעגל ואת הניצבים.

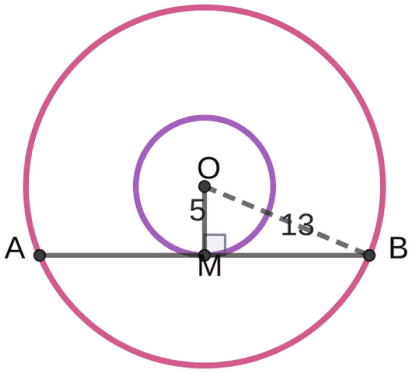
16 המרובע $ABCD$ חוסם מעגל. ידוע ש-$AB=7$, $BC=9$, $CD=8$. מצאו את AD.

17 טרפז שווה שוקיים חוסם מעגל. בסיסיו 4 ו-16. מצאו את אורך השוק ואת גובה הטרפז ואת רדיוס המעגל.

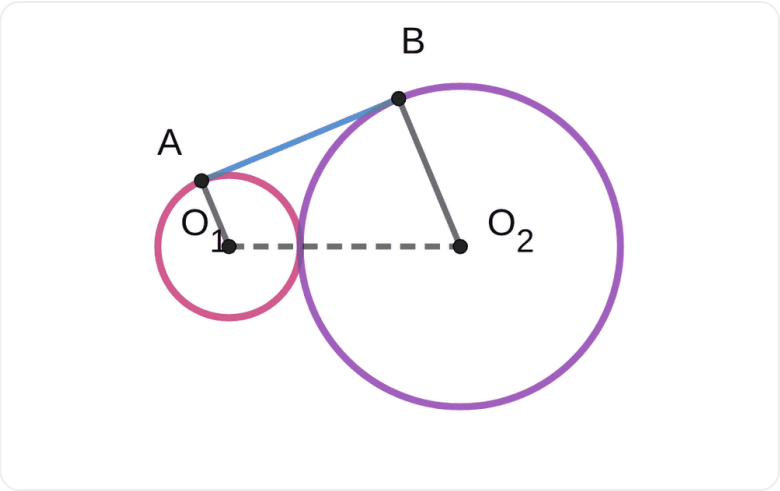
18 מעוין שצלעו 10 וזווית חדה שלו 30° חוסם מעגל. מצאו את רדיוס המעגל.

19 AB קוטר במעגל ו-BC משיק למעגל ב-B. AC חותך את המעגל ב-D. ידוע ש-$AB=6$ ו-$BC=8$. מצאו את AC ואת BD.

20 שני מעגלים בעלי מרכז משותף, ברדיוסים 5 ו-13. מיתר של המעגל הגדול משיק למעגל הקטן. מצאו את אורך המיתר.



21 שני מעגלים משיקים מבחוץ, ברדיוסים 4 ו-9. מצאו את המרחק בין המרכזים ואת אורך המשיק המשותף החיצוני (בין נקודות ההשקה).



22 שני מעגלים ברדיוסים 3 ו-5, והמרחק בין מרכזיהם 17. מצאו את אורך המשיק המשותף הפנימי (שחוצה את קטע המרכזים).

23 שני מעגלים ברדיוסים 2 ו-7, והמרחק בין מרכזיהם 13. מצאו את אורך המשיק המשותף החיצוני.

24 מהנקודה P העבירו משיקים PA ו-PB למעגל. ישר נוסף משיק למעגל בנקודה C שעל הקשת הקטנה AB, וחותך את PA ב-D ואת PB ב-E. ידוע ש-$PA=12$. מצאו את היקף המשולש PDE.

25 PA משיק למעגל שרדיוסו 8 ב-A, ו-$OP=17$. OP חותך את המעגל ב-C. מצאו את PC ואת אורך המשיק.

26 משולש שווה צלעות שצלעו 12 חוסם מעגל. מצאו את רדיוס המעגל החסום ואת אורך הקטע מכל קודקוד לנקודת ההשקה.

27 PA ו-PB משיקים למעגל, ו-$\angle APB=40^\circ$. C נקודה על הקשת הגדולה AB. מצאו את $\angle ACB$.

28 PA משיק למעגל ב-A, ו-PBC חותך שעובר דרך המרכז (B ו-C על המעגל, B קרובה ל-P). ידוע ש-$\angle APC=30^\circ$. מצאו את $\angle PAB$ ואת $\angle ACP$.

29 מעגל חסום במשולש ABC, ו-$\angle A=60^\circ$. I מרכז המעגל. מצאו את $\angle BIC$.

30 מרכז המעגל החסום במשולש הוא נקודת המפגש של... ומרכז המעגל החוסם הוא נקודת המפגש של...? השלימו, וקבעו היכן נמצא מרכז המעגל החוסם במשולש קהה זווית.

31 משולש ABC שהיקפו 36 חוסם מעגל שרדיוסו 3. מצאו את שטח המשולש.

32 משולש ישר זווית שיתרו 13 חוסם מעגל שרדיוסו 2. מצאו את סכום הניצבים ואת היקף המשולש.

33 מהנקודה P העבירו שני משיקים למעגל שרדיוסו 9, ואורך כל משיק 12. מצאו את שטח המרובע $OAPB$ ואת אורך המיתר AB.

34 שני מעגלים משיקים מבפנים, ברדיוסים 10 ו-4. מצאו את המרחק בין מרכזיהם. היכן נמצאת נקודת ההשקה ביחס לשני המרכזים?

35 ישר ℓ משיק למעגל שרדיוסו 5. מרכז המעגל במרחק 13 מהנקודה P שעל ℓ. מהו המרחק מ-P לנקודת ההשקה?

✔ תשובות סופיות – נושא 7.3

1. $PA = 12$
2. $R = 8$
3. $PA = 13$; $x = 4$
4. $\angle AOB = 130°$ (במרובע $OAPB$ שתי זוויות ישרות)
5. $\angle PAB = 65°$; $\angle OAB = 25°$
6. $OP = 12$; $PA = 6\sqrt{3}$
7. ריבוע ; $OP = 4\sqrt{2}$
8. חפיפת המשולשים OAP ו-OBP (יתר וניצב: OP משותף, $OA = OB$)
9. $AB = 9.6$ ($AM = \frac{6\cdot 8}{10} = 4.8$)
10. $\angle ACB = 70°$ – הזווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מהצד השני
11. $55°$
12. מ-A: 3 ; מ-B: 7 ; מ-C: 5
13. $BC = 11$; היקף 30
14. $r = 2$ ($r = \frac{6+8-10}{2}$)
15. $r = 2$; ניצבים 5 ו-12
16. $AD = 6$ (במרובע חוסם $AB + CD = BC + AD$)
17. שוק 10 ; גובה 8 ; $r = 4$
18. $r = 2.5$ (גובה המעוין 5)
19. $AC = 10$; $BD = 4.8$
20. 24
21. מרחק 13 ; משיק משותף 12 ($\sqrt{13^2 - 5^2}$)
22. 15 ($\sqrt{17^2 - 8^2}$)

23 12 ($\sqrt{13^2-5^2}$)

24 24 ($EC=EB$,$DC=DA$)

25 $PA=15$; $PC=9$

26 $r=2\sqrt{3}$; 6

27 $\angle ACB=70°$ ($\angle AOB=140°$)

28 $\angle PAB=30°$; $\angle ACP=30°$

29 $\angle BIC=120°$ ($90°+\frac{60°}{2}$)

30 חוצי הזוויות ; האנכים האמצעיים ; מחוץ למשולש

31 $S=54$ ($S=r\cdot p$,p – מחצית ההיקף)

32 סכום הניצבים 17 ; היקף 30

33 שטח 108 ; $AB=14.4$

34 6 ; על הישר שעובר דרך שני המרכזים

35 12

7.4 מצולעים חסומים וחוסמים, שני מעגלים, קשת וגזרה

מרכז המעגל החוסם – מפגש האנכים האמצעיים; מרכז המעגל החסום – מפגש חוצי הזוויות. במשולש ישר זווית $R=\frac{c}{2}$. שטח משולש $S=r\cdot p$. אורך קשת $\frac{\alpha}{360^\circ}\cdot 2\pi R$, שטח גזרה $\frac{\alpha}{360^\circ}\cdot \pi R^2$.

צפו לפני שמתחילים:

חישוב היקף מעגל ושטח עיגול
YouTube · 3:26

חישובי שטחים בגאומטריה
YouTube · 7:50

1. משולש שווה צלעות שצלעו 6 חסום במעגל. מצאו את רדיוס המעגל החוסם.
2. ריבוע שצלעו 8 חסום במעגל. מצאו את רדיוס המעגל ואת שטח העיגול.
3. ריבוע חוסם מעגל שרדיוסו 5. מצאו את שטח הריבוע ואת השטח שבין הריבוע לעיגול.
4. משושה משוכלל שצלעו 4 חסום במעגל. מצאו את רדיוס המעגל ואת שטח המשושה.
5. מלבן שצלעותיו 5 ו-12 חסום במעגל. מצאו את רדיוס המעגל.
6. משולש ישר זווית ששטחו 24 ואחד מניצביו 6 חסום במעגל. מצאו את רדיוס המעגל.
7. משולש שווה שוקיים ($AB=AC=10$, $BC=12$) חסום במעגל. מצאו את רדיוס המעגל החוסם.
8. באותו משולש ($AB=AC=10$, $BC=12$) מצאו את רדיוס המעגל החסום.
9. משולש שצלעותיו 13, 14, 15 ושטחו 84. מצאו את רדיוס המעגל החסום בו.
10. היקף משולש 40, ורדיוס המעגל החסום בו 3. מצאו את שטח המשולש.
11. מרובע $ABCD$ חסום במעגל וגם חוסם מעגל. ידוע ש-$AB=5$, $BC=7$, $CD=9$. מצאו את AD.

12 האם ניתן לחסום במעגל מעוין שאינו ריבוע? ואם ניתן לחסום מעגל בתוכו? נמקו.

13 האם ניתן לחסום מעגל במלבן שאינו ריבוע? נמקו בעזרת תנאי המרובע החוסם.

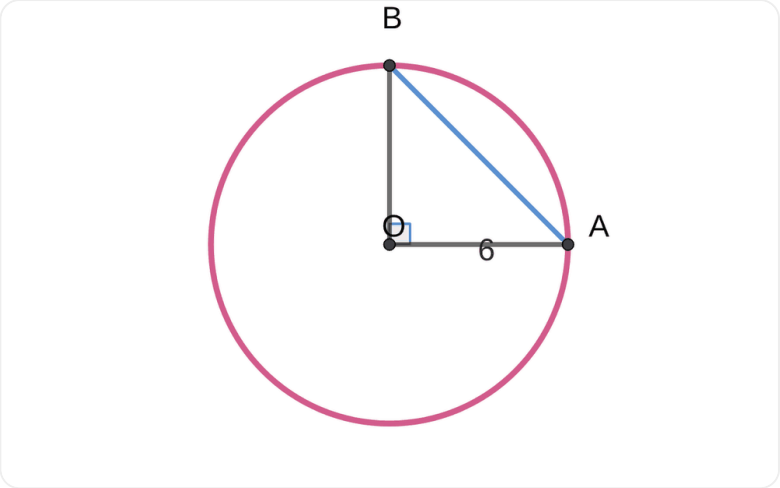
14 מצאו את אורך הקשת של גזרה שזוויתה 60° במעגל שרדיוסו 9.

15 מצאו את שטח הגזרה שזוויתה 120° במעגל שרדיוסו 6.

16 שטח גזרה במעגל שרדיוסו 10 הוא 25π. מצאו את זווית הגזרה.

17 אורך קשת הוא 4π, וזווית הגזרה 80°. מצאו את רדיוס המעגל.

18 מצאו את שטח הקטע המעגלי (בין המיתר לקשת) כאשר $R=6$ והזווית המרכזית 90°.

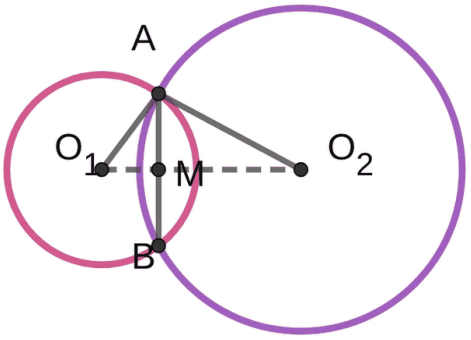


19 מצאו את שטח הקטע המעגלי הקטן כאשר $R=4$ והזווית המרכזית 60°.

20 היקף גזרה (שני רדיוסים וקשת) במעגל שרדיוסו 5 הוא $10+5\pi$. מצאו את זווית הגזרה.

21 שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. הוכיחו שקטע המרכזים O_1O_2 הוא האנך האמצעי של המיתר המשותף AB.

22 שני מעגלים ברדיוסים 10 ו-17 נחתכים, והמיתר המשותף שלהם אורכו 16. מצאו את המרחק בין המרכזים (כשהמרכזים משני צדי המיתר).

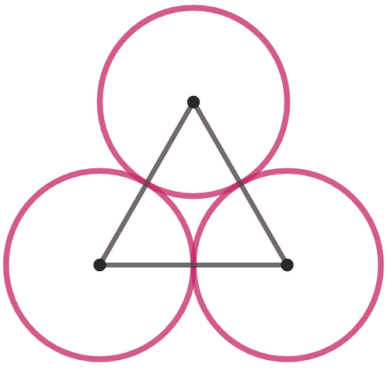


23 אותם מעגלים ($R=10$, $R=17$), מיתר משותף 16, אבל המרכזים באותו צד של המיתר. מה המרחק בין המרכזים?

24 שני מעגלים ברדיוסים 3 ו-8. מה המצב ההדדי שלהם אם המרחק בין המרכזים הוא:
(א) 11 (ב) 5 (ג) 7 (ד) 2 (ה) 14?

25 שלושה מעגלים משיקים זה לזה מבחוץ, ברדיוסים 2, 3 ו-4. מצאו את היקף המשולש שקודקודיו מרכזי המעגלים.

26 שלושה מעגלים זהים ברדיוס 3 משיקים זה לזה מבחוץ. מצאו את השטח הכלוא ביניהם.



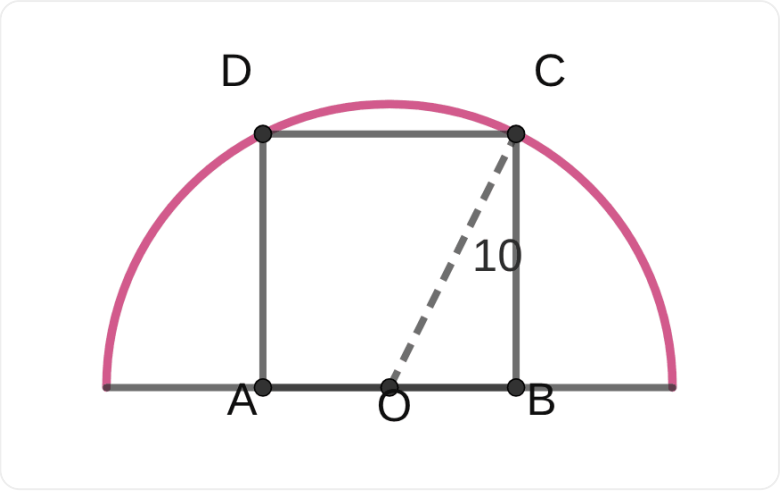
27 משולש שווה צלעות חסום במעגל שרדיוסו 6. מצאו את צלע המשולש ואת השטח שבין העיגול למשולש.

28 יחס בין רדיוס המעגל החוסם לרדיוס המעגל החסום במשולש שווה צלעות הוא...?
הוכיחו בעזרת מפגש התיכונים.

29 ריבוע חסום במעגל, ועוד ריבוע חוסם אותו מעגל. מה היחס בין שטחי הריבועים?

30 משושה משוכלל חוסם מעגל שרדיוסו $3\sqrt{3}$. מצאו את צלע המשושה.

31 בתוך חצי עיגול שרדיוסו 10 חסום ריבוע, כך שצלע אחת שלו על הקוטר. מצאו את צלע הריבוע.



32 שעון: מחוג הדקות אורכו 12 ס"מ. איזה מרחק עובר קצה המחוג ב-20 דקות? ואיזה שטח הוא "מטאטא"?

33 פיצה עגולה שקוטרה 30 ס"מ נחתכה ל-8 משולשים שווים. מה שטח כל משולש ומה אורך הקשת של כל משולש?

34 משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R. הוכיחו ש-$\frac{BC}{\sin A}=2R$ במקרה ש-BC קוטר. (הכנה למשפט הסינוסים)

35 משולש ישר זווית חסום במעגל שרדיוסו R וחוסם מעגל שרדיוסו r. הניצבים 9 ו-12.
מצאו את R, r, ואת המרחק בין מרכזי המעגלים.

✔ תשובות סופיות – נושא 7.4

1. $R=2\sqrt{3}$ ($\frac{a}{\sqrt{3}}$)
2. $R=4\sqrt{2}$; 32π
3. 100 ; $100-25\pi\approx 21.46$
4. $R=4$; $24\sqrt{3}$
5. $R=6.5$
6. $R=5$
7. $R=6.25$ ($R^2=6^2+(8-R)^2$)
8. $r=3$ ($S=48$,$p=16$)
9. $r=4$
10. 60
11. $AD=7$
12. לא – זוויות נגדיות שוות ואינן משלימות ; כן – סכומי צלעות נגדיות שווים
13. לא – $a+a\neq b+b$ כאשר $a\neq b$
14. $3\pi\approx 9.42$
15. $12\pi\approx 37.7$
16. 90°
17. $R=9$
18. $9\pi-18\approx 10.27$
19. $\frac{8\pi}{3}-4\sqrt{3}\approx 1.45$
20. 180° (חצי עיגול)
21. $O_1A=O_1B$ ו-$O_2A=O_2B$ – שני המרכזים על האנך האמצעי של AB
22. 21 ($6+15$)
23. 9 ($15-6$)

24 (א) משיקים מבחוץ (ב) משיקים מבפנים (ג) נחתכים (ד) אחד בתוך השני ללא נקודה משותפת (ה) זרים מבחוץ

25 18 (צלעות 5, 6, 7)

26 $9\sqrt{3}-\frac{9\pi}{2}\approx 1.45$

27 צלע $6\sqrt{3}$; $36\pi-27\sqrt{3}\approx 66.33$

28 $R:r=2:1$ (מפגש התיכונים מחלק כל תיכון ביחס $2:1$)

29 $1:2$

30 6 (הרדיוס החסום הוא גובה במשולש שווה צלעות)

31 $4\sqrt{5}$ ($x^2+\frac{x^2}{4}=100$)

32 $8\pi\approx 25.13$ ס"מ ; $48\pi\approx 150.8$ סמ"ר

33 $\frac{225\pi}{8}\approx 88.36$ סמ"ר ; $\frac{15\pi}{4}\approx 11.78$ ס"מ

34 כאשר BC קוטר: $\angle A=90^\circ$, $\sin A=1$, ו-$BC=2R$

35 $R=7.5$; $r=3$; $\sqrt{11.25}=\frac{3\sqrt{5}}{2}\approx 3.35$

פרק 7 סיכומון סוף פרק – גיאומטריה – מעגלים

מיתרים ואנך מהמרכז

- אנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר (ולהפך).
- $R^2 = d^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$ – פיתגורס במשולש רדיוס-מרחק-חצי מיתר.
- מיתרים שווים ← שווים מרחקיהם מהמרכז; מיתר קרוב יותר – ארוך יותר.

זוויות במעגל

- זווית מרכזית שווה לקשת; זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.
- זוויות היקפיות על אותה קשת – שוות.
- זווית היקפית הנשענת על קוטר – 90°.

משיקים

- המשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.
- שני משיקים מנקודה – שווים, והקטע למרכז חוצה את הזווית ביניהם.
- זווית בין משיק למיתר = זווית היקפית על אותה קשת.

מרובע חסום וחוסם

- חסום במעגל ⇔ סכום זוויות נגדיות 180°.
- חוסם מעגל ⇔ סכומי צלעות נגדיות שווים.
- משולש: מרכז המעגל החוסם – מפגש אנכים אמצעיים; החסום – מפגש חוצי זוויות.

שני מעגלים

- קו המרכזים עובר בנקודת ההשקה.
- מיתר משותף מאונך לקו המרכזים ונחצה על ידו.

קשת וגזרה

- אורך קשת: $2\pi R \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$.
- שטח גזרה: $\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- להשוות זווית היקפית לזווית מרכזית – ההיקפית היא **מחצית**.
- לשכוח לחבר רדיוס לנקודת ההשקה כדי לקבל זווית ישרה.
- מרובע חסום – לחבר זוויות סמוכות במקום נגדיות.
- באנך למיתר – להציב את כל המיתר במקום מחציתו.

💡 **הטיפ של אילון:** במעגל, הצעד הראשון כמעט תמיד הוא להעביר רדיוסים – לנקודות ההשקה ולקצות המיתרים. משם נולדים משולשים שווי שוקיים וזוויות ישרות.

פרק 8

גיאומטריה – סיכום

שאלות משולבות ברמת בגרות שמחברות את כל פרקי הגיאומטריה

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

8.1 שאלות משולבות בגיאומטריה – משולשים, מרובעים, מעגלים, דמיון ושטחים

40 תרגילים

סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

כל החומר בגיאומטריה – מהחטיבה ועד הבגרות
YouTube · 9:03

גיאומטריה – תרגול וטיפים לבגרות 5 יחידות
YouTube · 17:32

איך עושים טענה ונימוק בגיאומטריה?
YouTube · 11:03

כל משפטי משולש ישר זווית
YouTube · 10:16

8.1 שאלות משולבות בגיאומטריה – משולשים, מרובעים, מעגלים, דמיון ושטחים

בכל שאלה חפשו קודם את "הכלי" המתאים: פיתגורס ומשפטי משולש ישר זווית, קטע אמצעים ומפגש תיכונים, דמיון ופרופורציות (יחס שטחים = ריבוע יחס הדמיון), תכונות המרובעים, ומשפטי המעגל.

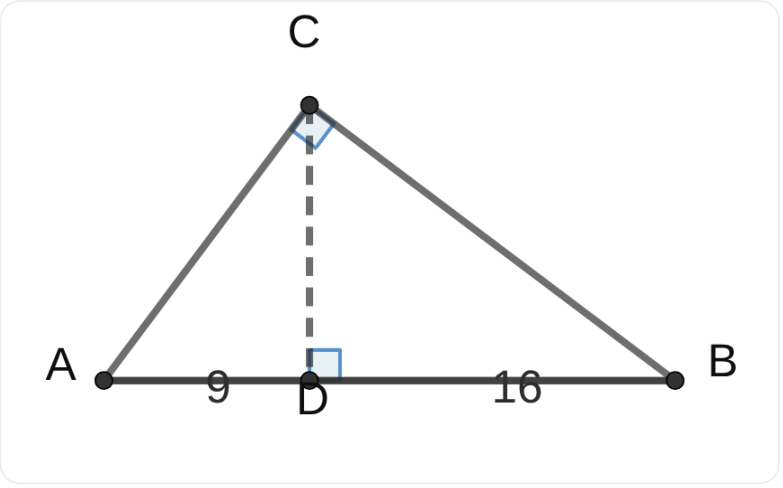
צפו לפני שמתחילים:

כל משפטי השטחים בגיאומטריה – הסבר וסיכום
YouTube · 8:56

איך מזהים באיזה משפט להשתמש? תאלס, חוצה זווית או דמיון
YouTube · 5:35

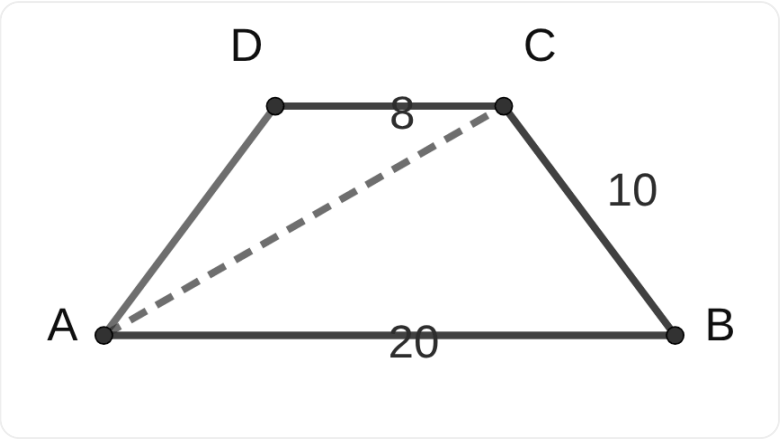
גיאומטריה – מצבים ללא משפט
YouTube · 9:45

1 במשולש ישר זווית ABC ($\angle ACB = 90°$) הגובה CD ליתר מחלק אותו לקטעים $AD = 9$ ו-$DB = 16$. מצאו את CD, את הניצבים ואת שטח המשולש.



2 במקבילית $ABCD$: $AB = 10$, $AD = 6$ ו-$\angle A = 60°$. מצאו את גובה המקבילית לצלע AB, את שטחה ואת האלכסון BD.

3 בטרפז שווה שוקיים $ABCD$ ($AB \parallel CD$): $AB = 20$, $CD = 8$ והשוק 10.
מצאו את גובה הטרפז, את שטחו ואת אורך האלכסון.



4 במשולש ABC, D ו-E הן אמצעי הצלעות AB ו-AC, ו-$DE = 7$. שטח המשולש ABC הוא 48. מצאו את BC ואת שטח הטרפז $DECB$.

5 G נקודת מפגש התיכונים במשולש ABC, והתיכון $AM = 18$. מצאו את AG ואת GM. איזה חלק משטח המשולש ABC הוא שטח המשולש GBC?

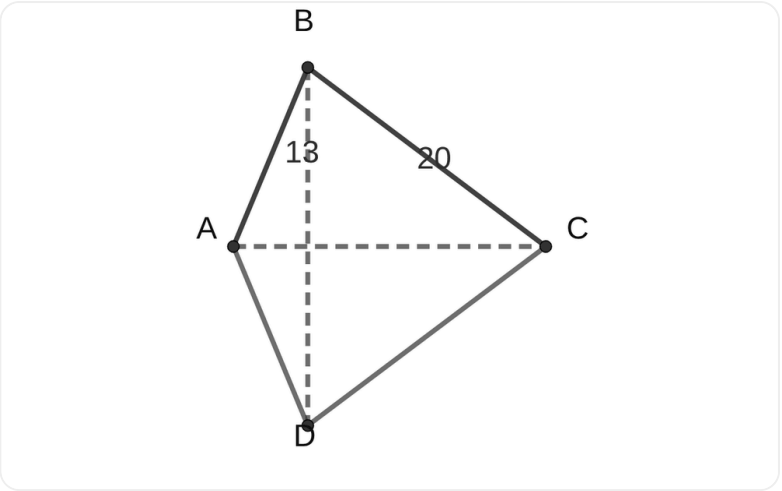
6 במשולש ABC, $DE \parallel BC$ (D על AB, E על AC). ידוע: $AD = 4$,
$DB = 6$, $DE = 5$. מצאו את BC ואת יחס השטחים $S_{ABC} : S_{ADE}$.

7 במשולש ABC: $AB = 12$, $AC = 8$, $BC = 15$. AD חוצה את הזווית A. מצאו
את BD ואת DC.

8 שלושה ישרים מקבילים חותכים שני ישרים. על הראשון נוצרו קטעים באורך 4 ו-6, ועל
השני הקטע המתאים ל-4 הוא 10. מצאו את הקטע השני.

9 אלכסוני מעוין הם 12 ו-16. מצאו את צלע המעוין, את שטחו ואת גובהו.

10 בדלתון $ABCD$: $AB=AD=13$, $CB=CD=20$, והאלכסון $BD=24$.
מצאו את האלכסון AC ואת שטח הדלתון.



11 מלבן שצלעותיו 6 ו-8 חסום במעגל. מצאו את שטח העיגול ואת השטח שבתוך העיגול ומחוץ למלבן.

12 בריבוע $ABCD$ שצלעו 10, הנקודה E היא אמצע BC. מצאו את שטח המשולש AED ואת אורך AE.

13 במשולש שווה שוקיים $AB=AC=13$, $BC=10$. מצאו את הגובה לבסיס, את השטח, ואת רדיוס המעגל החסום במשולש.

14 במשולש ישר זווית ABC ($\angle C=90^\circ$) התיכון ליתר $CM=6.5$ ו-$AC=5$.
מצאו את BC ואת היקף המשולש.

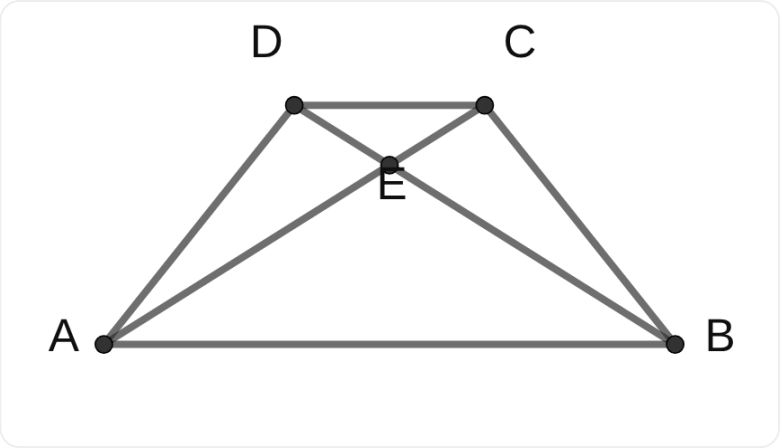
15 במשולש ABC: $\angle C=90^\circ$, $\angle A=30^\circ$, $AB=14$. מצאו את BC, את AC ואת התיכון ליתר.

16 אלכסוני המקבילית $ABCD$ נחתכים ב-O, ושטח המשולש AOB הוא 9. מצאו את שטח המקבילית. נמקו.

17 במשולש ABC שטחו 40, הנקודה D על BC כך ש-$BD:DC=2:3$. מצאו את שטחי המשולשים ABD ו-ADC.

18 משולש שצלעותיו 3, 4, 5 דומה למשולש ששטחו 54. מצאו את צלעות המשולש הגדול.

19 בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$) האלכסונים נחתכים ב-E. ידוע ש-$AB = 12$, $CD = 4$ ושטח המשולש CDE הוא 5. מצאו את שטחי המשולשים ABE, BCE, ADE ואת שטח הטרפז.



20 AB קוטר במעגל ($AB = 10$), ו-C על המעגל כך ש-$AC = 6$. CH גובה במשולש ABC. מצאו את BC, CH ו-AH.

21 משולש שווה צלעות שצלעו 6 חוסם מעגל. מצאו את שטח העיגול.

22 במרובע $ABCD$: $AB \parallel CD$ ו-$AD = BC$, אך AD ו-BC אינן מקבילות. ידוע ש-$\angle A = 70°$. מצאו את שאר הזוויות.

23 אמצעי הצלעות של מרובע כלשהו יוצרים מקבילית. אלכסוני המרובע המקורי הם 10 ו-14. מצאו את היקף המקבילית.

24 במלבן $ABCD$: $AB = 8$, $BC = 6$. הנקודה E על DC. הראו ששטח המשולש ABE אינו תלוי במיקום של E, ומצאו אותו.

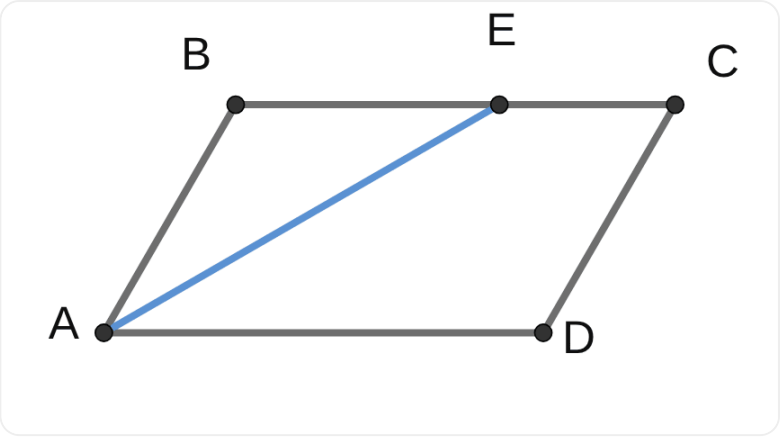
25 במשולש ישר זווית שניצביו 5 ו-12, מצאו את הגובה ליתר, את רדיוס המעגל החוסם ואת רדיוס המעגל החסום.

26 במשולש ABC ששטחו 36, M אמצע BC ו-N אמצע AC. התיכונים AM ו-BN נחתכים ב-G. מצאו את שטח המרובע $GMCN$.

27 דלתון $ABCD$ ($AB = AD$, $CB = CD$) חסום במעגל, ו-$AB = 6$, $BC = 8$. מצאו את רדיוס המעגל ואת האלכסון BD.

28 ריבוע חסום במעגל שרדיוסו 5. מצאו את צלע הריבוע, את שטחו ואת השטח שבין העיגול לריבוע.

29 במקבילית $ABCD$ ($AB=6$, $AD=10$) חוצה הזווית A חותך את הצלע BC בנקודה E. מצאו את BE ואת EC. מה סוג המשולש ABE?



30 במעוין $ABCD$ שצלעו 8, $\angle A=60^\circ$. מצאו את שני האלכסונים ואת שטח המעוין.

31 בסיסי טרפז 6 ו-14. מצאו את אורך קטע האמצעים, ואת אורך הקטע המקביל לבסיסים העובר דרך נקודת חיתוך האלכסונים.

32 במשולש שווה שוקיים $AB=AC$, $\angle A=40^\circ$. BD חוצה את $\angle B$ (D על AC). מצאו את $\angle BDC$.

33 במשולש ABC, $DE \parallel BC$ ו-$AD:DB=1:2$. שטח הטרפז $DBCE$ הוא 40. מצאו את שטח המשולש ABC.

34 מהנקודה P יוצאים שני משיקים למעגל שרדיוסו 6, והזווית ביניהם 60°. מצאו את שטח המשולש PAB (A, B נקודות ההשקה).

35 בטרפז ישר זווית $ABCD$ ($\angle A=\angle D=90^\circ$, $AB \parallel CD$): $AB=15$, $CD=9$, $AD=8$. מצאו את השוק BC, את שטח הטרפז ואת האלכסון AC.

36 מצאו את שטח המשושה המשוכלל שצלעו 2, ואת אורך האלכסון הארוך שלו.

37 הנקודה P נמצאת בתוך מלבן $ABCD$, ו-$PA=3$, $PB=4$, $PC=5$. מצאו את PD (רמז: הורידו אנכים מ-P לצלעות והשתמשו בפיתגורס).

38 במשולש ABC ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$), BD חוצה את הזווית הישרה. ידוע ש-$AB = 6$, $BC = 8$. מצאו את AD ואת DC.

39 משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O. $\angle BAC = 30^\circ$ ו-$BC = 7$. מצאו את רדיוס המעגל.

40 בריבוע $ABCD$ שצלעו 12, E על AB כך ש-$AE = 4$, ו-F על BC כך ש-$BF = 6$. מצאו את שטח המשולש DEF.

✔ תשובות סופיות – נושא 8.1

1. $CD = 12$; $AC = 15$, $BC = 20$; $S = 150$
2. $3\sqrt{3}$ גובה ; $S = 30\sqrt{3}$; $BD = 2\sqrt{19}$
3. 8 גובה ; $S = 112$; אלכסון $2\sqrt{65}$
4. $BC = 14$; 36
5. $AG = 12$, $GM = 6$; שליש
6. $BC = 12.5$; $4 : 25$
7. $BD = 9$, $DC = 6$
8. 15 (משפט תאלס)
9. 10 צלע ; $S = 96$; גובה 9.6
10. $AC = 21$; $S = 252$
11. 25π ; $25\pi - 48 \approx 30.54$
12. $AE = 5\sqrt{5}$; 50
13. 12 גובה ; $S = 60$; $r = \frac{10}{3}$
14. $BC = 12$; היקף 30
15. $BC = 7$; $AC = 7\sqrt{3}$; 7
16. 36 – האלכסונים מחלקים את המקבילית לארבעה משולשים שווי שטח
17. 16 ו-24
18. 9, 12, 15 (יחס דמיון 3)
19. $S_{ABE} = 45$, $S_{BCE} = S_{ADE} = 15$; שטח הטרפז 80
20. $BC = 8$; $CH = 4.8$; $AH = 3.6$
21. 3π ($r = \sqrt{3}$)
22. $\angle B = 70°$, $\angle C = \angle D = 110°$ (טרפז שווה שוקיים)
23. 24 (כל צלע היא קטע אמצעים)

24	24 (בסיס 8 וגובה 6 קבועים)
25	$\frac{60}{13}$; 6.5 ; 2
26	12
27	$R=5$ (AC קוטר) ; $BD=9.6$
28	$5\sqrt{2}$; 50 ; $25\pi-50\approx 28.54$
29	$BE=6$, $EC=4$; משולש שווה שוקיים
30	8 ו-$8\sqrt{3}$; $32\sqrt{3}$
31	קטע אמצעים 10 ; 8.4
32	$\angle BDC=75^\circ$
33	45 ($S_{ADE}=\frac{1}{9}S_{ABC}$)
34	$27\sqrt{3}$ (משולש שווה צלעות בצלע $6\sqrt{3}$)
35	$AC=\sqrt{145}$; $S=96$; $BC=10$
36	$6\sqrt{3}$; 4
37	$PD=3\sqrt{2}$ ($PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$)
38	$AD=\frac{30}{7}$, $DC=\frac{40}{7}$
39	$R=7$ ($\angle BOC=60^\circ$, משולש BOC שווה צלעות)
40	$S=60$ ($144-24-24-36$)

פרק 8 סיכומון סוף פרק – גיאומטריה – סיכום

סדר עבודה בשאלת גיאומטריה

- קוראים את כל הנתונים ומסמנים אותם על השרטוט.
- שואלים: מה צריך להוכיח, ואיזה משפט מסתיים בזה?
- עובדים "מהסוף להתחלה" – מה חסר לי כדי להפעיל את המשפט?

איך מוכיחים שווים?

- צלעות/זוויות שוות: חפיפה, שווה שוקיים, תכונות מרובע.
- מקבילים: זוויות מתחלפות/מתאימות, קטע אמצעים, תאלס הפוך.
- מאונכים: זווית היקפית על קוטר, משיק-רדיוס, אלכסוני מעוין.

יחסים ושטחים

- יחס קטעים: דמיון, תאלס, חוצה זווית, מפגש תיכונים $1:2$.
- יחס שטחים בדמיון: k^2; גובה משותף – יחס בסיסים.
- "תמיד מתקיים": תיכון מחלק משולש לשני משולשים שווי שטח.

זיהוי מרובעים

- מקבילית ← מלבן (זווית ישרה / אלכסונים שווים) ← ריבוע.
- מקבילית ← מעוין (צלעות סמוכות שוות / אלכסונים מאונכים).
- מרובע חסום במעגל: זוויות נגדיות משלימות.

כלים מהמעגל

- זוויות היקפיות על אותה קשת שוות; על קוטר – 90°.
- משיקים מנקודה שווים; משיק מאונך לרדיוס.

כשתקועים

- מעבירים קו עזר: רדיוס, אלכסון, גובה או קטע אמצעים.
- מסמנים זווית לא ידועה ב-α ומבטאים בעזרתה זוויות אחרות.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- להסתמך על מה ש"נראה" בשרטוט ולא על נתון או משפט.
- להשתמש במסקנה של סעיף קודם בלי לבדוק שהיא באמת הוכחה.
- לכתוב משולשים חופפים/דומים בסדר קודקודים לא מתאים.

💡 **הטיפ של אילון:** בשאלה משולבת כל סעיף הוא רמז לסעיף הבא. אם סעיף ב' נראה קשה – בדקו קודם איך אפשר להשתמש בתוצאה של סעיף א'.

פרק 9

טריגונומטריה

ממשולש ישר זווית, דרך משפטי הסינוסים והקוסינוסים, ועד זהויות ומשוואות

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

9.1	טריגונומטריה במשולש ישר זווית ובמרובעים	36 תרגילים
9.2	משפט הסינוסים, משפט הקוסינוסים ושטח משולש	36 תרגילים
9.3	זהויות בסיס, זווית כפולה ומעגל היחידה	36 תרגילים
9.4	משוואות טריגונומטריות	37 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

טריגונומטריה – סיכום וטיפים לבגרות 5 יחידות
YouTube · 17:09

מעגל היחידה בטריגונומטריה – ההיגיון והזהויות
YouTube · 15:17

משפט הסינוסים – הסבר מלא
YouTube · 13:12

משפט הקוסינוסים – הסבר מלא
YouTube · 9:21

🎛️ המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

מעגל היחידה

גררו את הנקודה על המעגל וראו בזמן אמת את $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ו-$\tan\alpha$, הרביע, הרדיאנים והזווית הסימטרית.

9.1 טריגונומטריה במשולש ישר זווית ובמרובעים

במשולש ישר זווית: $\sin\alpha$ = הניצב שמול הזווית חלקי היתר, $\cos\alpha$ = הניצב שליד הזווית חלקי היתר, $\tan\alpha$ = הניצב שמול חלקי הניצב שליד. במרובעים – מורידים גובה או אלכסון ומחפשים משולש ישר זווית. תשובות מקורבות – עד שתי ספרות אחרי הנקודה.

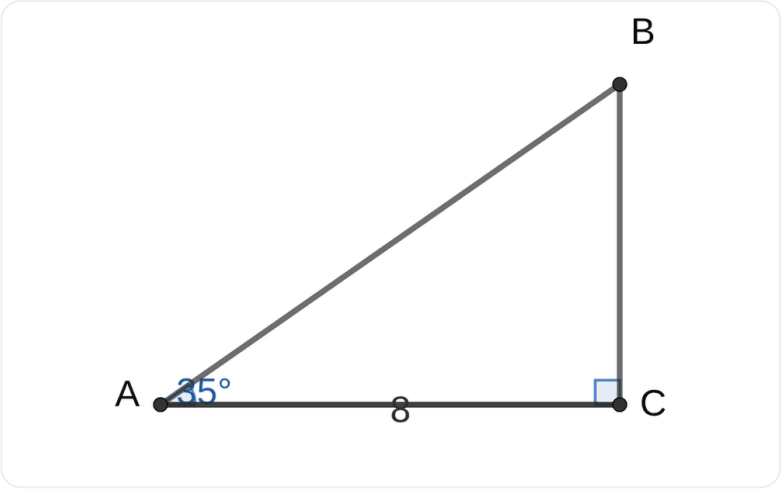
צפו לפני שמתחילים:

תרגול טריגונומטריה במשולש ישר זווית
YouTube · 7:39

סינוס קוסינוס טנגנס – ושיטה לזכור
YouTube · 10:16

מה צריך לדעת לטריגונומטריה במישור
YouTube · 3:52

1 במשולש ABC ישר הזווית ($\angle C = 90^\circ$), $AC = 8$ ו-$\angle A = 35^\circ$. מצאו את BC ואת AB.



2 במשולש ישר זווית ($\angle C = 90^\circ$), $BC = 5$ ו-$AB = 13$. מצאו את $\angle A$ ואת $\angle B$.

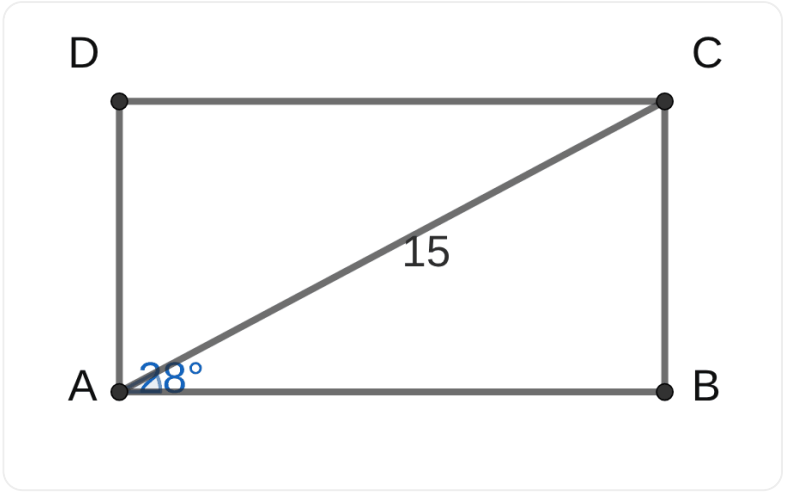
3 ניצבי משולש ישר זווית הם 7 ו-24. מצאו את היתר ואת הזוויות החדות.

4 יתר משולש ישר זווית הוא 20, ואחת הזוויות החדות 40°. מצאו את הניצבים.

5 במשולש שווה שוקיים $AB = AC = 10$ וזווית הבסיס $50°$. מצאו את הגובה לבסיס ואת אורך הבסיס.

6 במשולש שווה שוקיים הבסיס 12 וזווית הראש $80°$. מצאו את אורך השוק ואת הגובה לבסיס.

7 אלכסון מלבן הוא 15, והזווית בין האלכסון לצלע הארוכה $28°$. מצאו את צלעות המלבן ואת שטחו.

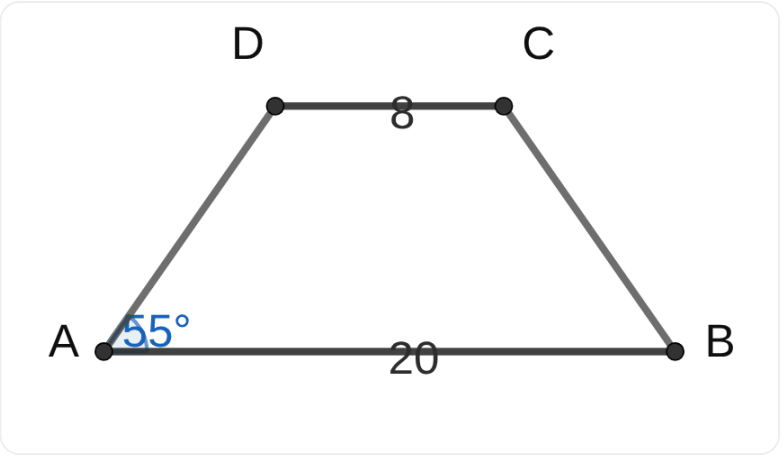


8 צלעות מלבן הן 6 ו-10. מצאו את הזווית החדה בין האלכסונים.

9 צלע מעוין 8 וזווית חדה שלו $70°$. מצאו את אורכי האלכסונים.

10 אלכסוני מעוין הם 10 ו-24. מצאו את זויות המעוין.

11 בסיסי טרפז שווה שוקיים הם 20 ו-8, וזווית הבסיס $55°$. מצאו את הגובה, את השוק ואת השטח.



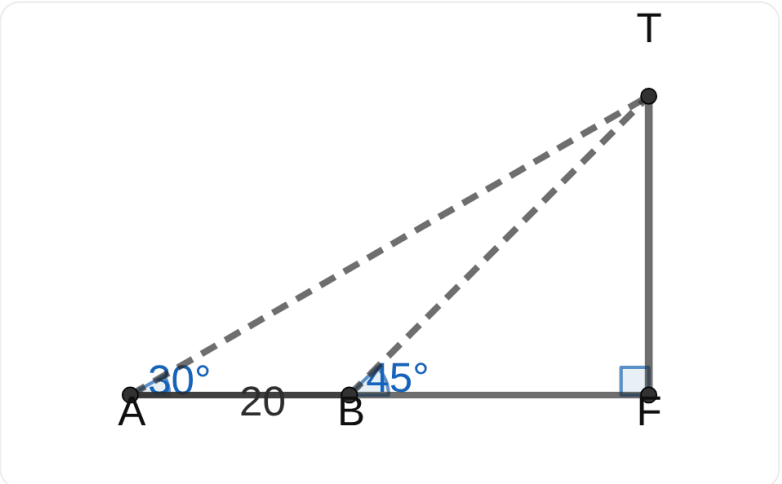
12 בטרפז ישר זווית $ABCD$ ($\angle A=\angle D=90°$): $AB=14$, $CD=8$, $AD=6$. מצאו את $\angle B$ ואת השוק BC.

13 בדלתון $ABCD$: $AB=AD=5$, $CB=CD=9$ ו-$\angle BAD=100°$. מצאו את האלכסון BD ואת $\angle BCD$.

14 סולם שאורכו 6 מ' נשען על קיר ויוצר זווית של $65°$ עם הרצפה. לאיזה גובה מגיע הסולם, ומה המרחק של בסיסו מהקיר?

15 ממרחק 30 מ' מבסיס בניין רואים את ראש הבניין בזווית הגבהה של $40°$. מה גובה הבניין?

16 שני צופים עומדים באותו צד של מגדל, במרחק 20 מ' זה מזה. זוויות ההגבהה לראש המגדל הן $30°$ ו-$45°$. מצאו את גובה המגדל.



17 במקבילית שצלעותיה 8 ו-12 והזווית ביניהן $60°$, מצאו את הגובה לצלע 12 ואת שטח המקבילית.

18 מחומש משוכלל שצלעו 10. מצאו את המרחק מהמרכז לצלע (אפותמה) ואת שטח המחומש.

19 במשולש ישר זווית ($\angle C = 90°$), $\angle A = 30°$ והגובה ליתר $CD = 6$. מצאו את AC, BC ו-AB.

20 במשולש ABC, AD גובה לצלע BC, $\angle B = 40°$, $\angle C = 65°$ ו-$AD = 8$. מצאו את BC.

21 במשולש ישר זווית, היתר 15 ו-$\sin\alpha = 0.6$ (α זווית חדה). מצאו את הניצבים בלי מחשבון.

22 α זווית חדה ו-$\tan\alpha = \frac{3}{4}$. מצאו את $\sin\alpha$ ואת $\cos\alpha$ בלי מחשבון.

23 בעזרת משולש ישר זווית שווה שוקיים בניצב 1 מצאו את $\sin 45°$, $\cos 45°$ ו-$\tan 45°$.

24 בעזרת משולש שווה צלעות שצלעו 2 מצאו את $\sin 60°$, $\cos 60°$, $\tan 30°$.

25 הוכיחו בעזרת משולש ישר זווית: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

26 עמוד שגובהו 5 מ' מטיל צל באורך 8 מ'. באיזו זווית פוגעות קרני השמש בקרקע?

27 רמפה באורך 12 מ' עולה לגובה 1.5 מ'. מה זווית השיפוע של הרמפה?

28 במלבן $ABCD$: $AB = 10$, $AD = 6$. הנקודה E על DC כך ש-$\angle DAE = 30°$. מצאו את DE, EC ואת $\angle EBC$.

29 במעוין, האלכסון הקצר שווה לצלע. מצאו את זוויות המעוין.

30 במעגל שרדיוסו 10 הזווית המרכזית $\angle AOB = 70°$. מצאו את אורך המיתר AB ואת מרחקו מהמרכז.

31 משושה משוכלל שצלעו 6. מצאו את המרחק ממרכזו לכל צלע.

32 מלבן שצלעותיו 5 ו-12. מצאו את הזווית בין האלכסון לצלע הארוכה ואת אורך האלכסון.

33 במשולש ישר זווית התיכון ליתר הוא 10, ואחת הזוויות החדות 25°. מצאו את הניצבים.

34 ידוע ש-$\cos\alpha = 0.25$ (α חדה). מצאו את α, ואת $\sin\alpha$ בדיוק.

35 במשולש שווה שוקיים השוקיים 13 והבסיס 10. מצאו את זוויות המשולש.

36 מטוס ממריא בזווית קבועה של 12°. איזה גובה ישיג אחרי שעבר 5 ק"מ באוויר (לאורך מסלולו)?

✔ תשובות סופיות – נושא 9.1

1. $AB \approx 9.77$; $BC \approx 5.60$
2. $\angle A \approx 22.62°$; $\angle B \approx 67.38°$
3. יתר 25 ; $16.26°$ ו- $73.74°$
4. 12.86 (מול $40°$) ו- 15.32
5. גובה ≈ 7.66 ; בסיס ≈ 12.86
6. שוק ≈ 9.33 ; גובה ≈ 7.15
7. 13.24 ו- 7.04 ; שטח ≈ 93.27
8. $\approx 61.93°$
9. 9.18 ו- 13.11
10. $45.24°$ ו- $134.76°$
11. גובה ≈ 8.57 ; שוק ≈ 10.46 ; שטח ≈ 119.96
12. $\angle B = 45°$; $BC = 6\sqrt{2} \approx 8.49$
13. $BD \approx 7.66$; $\angle BCD \approx 50.37°$
14. גובה ≈ 5.44 מ' ; מרחק ≈ 2.54 מ'
15. ≈ 25.17 מ'
16. $10(\sqrt{3}+1) \approx 27.32$ מ'
17. גובה $4\sqrt{3} \approx 6.93$; שטח $48\sqrt{3} \approx 83.14$
18. ≈ 6.88 ; שטח ≈ 172.05
19. $AC = 12$; $BC = 4\sqrt{3} \approx 6.93$; $AB = 8\sqrt{3} \approx 13.86$
20. $BD \approx 9.53$, $DC \approx 3.73$; $BC \approx 13.26$
21. 9 (מול α) ו- 12
22. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{4}{5}$
23. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1

24 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$

25 $\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=1$ (משפט פיתגורס)

26 $\approx 32.01^\circ$

27 $\approx 7.18^\circ$

28 $\angle EBC \approx 47.45^\circ$; $EC \approx 6.54$; $DE = 2\sqrt{3} \approx 3.46$

29 60° ו- 120°

30 $AB \approx 11.47$; ≈ 8.19

31 $3\sqrt{3} \approx 5.2$

32 13 ; $\approx 22.62^\circ$

33 8.45 ו- 18.13

34 $\alpha \approx 75.52^\circ$; $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

35 זוויות הבסיס $\approx 67.38^\circ$; זווית הראש $\approx 45.24^\circ$

36 ≈ 1.04 ק"מ

9.2 משפט הסינוסים, משפט הקוסינוסים ושטח משולש

משפט הסינוסים: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$. משפט הקוסינוסים:
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$. שטח: $S=\frac{1}{2}ab\sin C$. כשנתונות שתי צלעות וזווית שאינה ביניהן – בדקו אם יש שני משולשים.

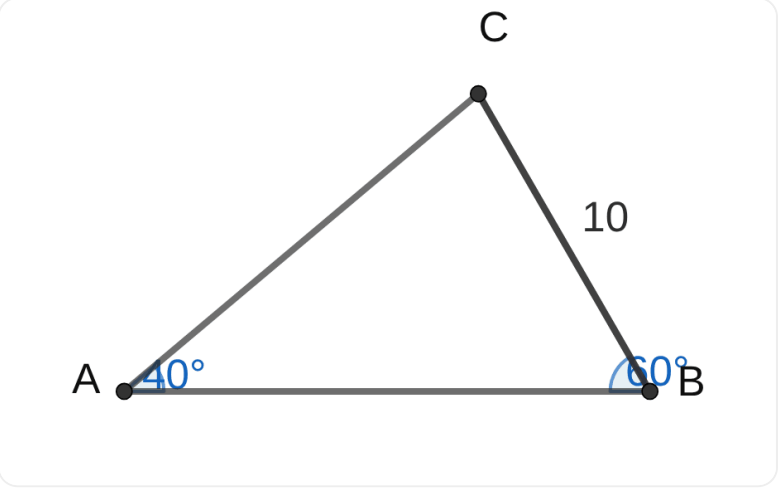
צפו לפני שמתחילים:

משפט הסינוסים – הסבר מלא ופתרון תרגילים
YouTube · 13:12

משפט הקוסינוסים – הסבר מלא ופתרון תרגילים
YouTube · 9:21

כל משפטי השטחים בטריגונומטריה לבגרות
YouTube · 3:20

1 במשולש ABC: $\angle A=40^\circ$, $\angle B=60^\circ$ ו-$a=BC=10$. מצאו את b ואת c.



2 במשולש ABC: $a=7$, $b=8$ ו-$\angle C=60^\circ$. מצאו את c.

3 צלעות משולש הן 5, 7, 8. מצאו את הזווית שמול הצלע 7 בלי מחשבון.

4 מצאו את שטח המשולש שבו שתי צלעות 6 ו-8 והזווית ביניהן 30°.

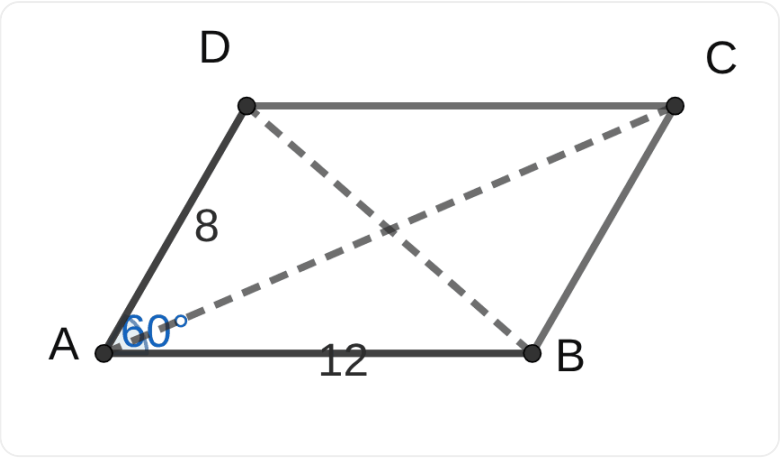
5 מצאו את שטח המשולש שצלעותיו 5, 7, 8 (היעזרו בתרגיל 3).

6 במשולש ABC: $a=10$ ו- $\angle A=30^\circ$. מצאו את רדיוס המעגל החוסם את המשולש.

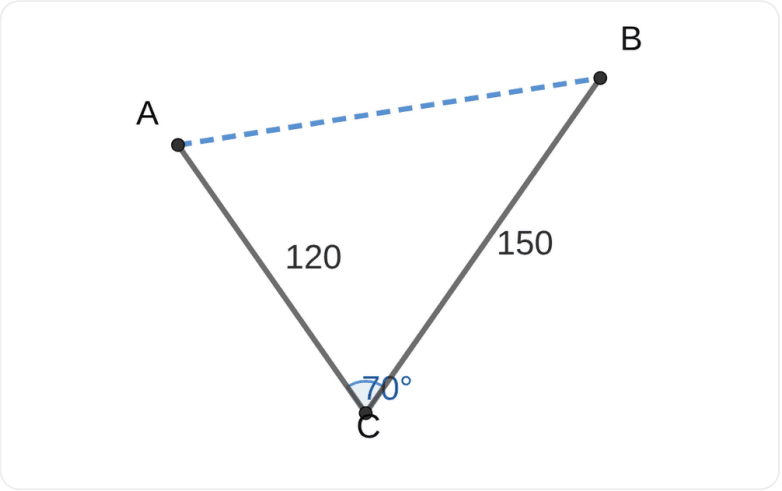
7 במשולש ABC: $a=6$, $b=8$, $\angle A=30^\circ$. כמה משולשים מתאימים לנתונים? מצאו את $\angle B$ בכל אחד.

8 במשולש ABC: $a=3$, $b=8$, $\angle A=30^\circ$. הראו שאין משולש כזה.

9 צלעות מקבילית 8 ו-12 והזווית ביניהן 60°. מצאו את אורכי האלכסונים.



10 כדי למדוד רוחב אגם, מודד עומד בנקודה C ומודד מרחקים לשתי נקודות בקצות האגם: $CA=120$ מ', $CB=150$ מ', והזווית ביניהם 70°. מה המרחק AB?



11 צלעות משולש הן 3, 5, 7. מצאו את הזווית הגדולה של המשולש.

12 שטח משולש 30, ושתיים מצלעותיו 10 ו-12. מצאו את הזווית שביניהן (שתי אפשרויות).

13 במשולש ABC רדיוס המעגל החוסם 5 ו-$\angle B = 50°$. מצאו את b.

14 במשולש ABC: $\angle A = 45°$, $\angle B = 75°$ ו-$c = 10$. מצאו את a ואת b.

15 במשולש ABC: $AB = 6$, $AC = 8$, $\angle A = 60°$. מצאו את BC ואת אורך התיכון מ-A.

16 אלכסוני מרובע הם 10 ו-14 והזווית ביניהם $40°$. מצאו את שטח המרובע.

17 מתומן משוכלל חסום במעגל שרדיוסו 4. מצאו את שטח המתומן.

18 שטח משולש 24, $b = 8$ ו-$\angle A = 30°$. מצאו את c.

19 ספינה שטה 20 ק"מ, פונה ושטה עוד 30 ק"מ, כך שהזווית בין שני קטעי המסלול היא $120°$. מה המרחק מנקודת ההתחלה?

20 זוויות משולש מתייחסות כ-$3 : 2 : 1$, והצלע הארוכה 10. מצאו את שאר הצלעות.

21 במרובע $ABCD$: $AB = 5$, $BC = 7$, $\angle B = 120°$, $CD = 6$, $DA = 8$. מצאו את האלכסון AC ואת $\angle D$.

22 במשולש שווה שוקיים השוקיים 10 וזווית הראש $40°$. מצאו את הבסיס בשתי דרכים (משפט הקוסינוסים, ופירוק לשני משולשים ישרי זווית).

23 הוכיחו: בכל משולש $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

24 צלעות משולש 13, 14, 15. מצאו בעזרת משפט הקוסינוסים את הזווית שמול 14, ואז את שטח המשולש.

25 במשולש ABC: $a = 12$, $\angle B = 35°$, $\angle C = 105°$. מצאו את b, c ואת רדיוס המעגל החוסם.

26 זוויות משולש $50°$, $60°$, $70°$, והצלע הארוכה 10. מצאו את הצלע הקצרה.

27 במשולש ABC: $b = 4$, $c = 9$, $\angle A = 100°$. מצאו את a ואת $\angle B$.

28 משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו 6, ו-$a=6$. מצאו את $\angle A$ (שתי אפשרויות).

29 במעגל שרדיוסו 8, זווית מרכזית 50°. מצאו את שטח המשולש שקודקודיו המרכז וקצות הקשת.

30 שני צופים A ו-B נמצאים במרחק 40 מ' זה מזה, באותו צד של עמוד. זוויות ההגבהה לראש העמוד הן 30° (מ-A, הרחוק) ו-50° (מ-B). מצאו את גובה העמוד.

31 אורכי צלעות משולש הם x, $x+1$, $x+2$, והזווית הגדולה היא 120°. מצאו את x.

32 אלכסוני מקבילית 10 ו-16 והזווית ביניהם 60°. מצאו את צלעות המקבילית.

33 במשולש ABC: $\angle A=30^\circ$, $\angle B=45^\circ$, $c=10$. מצאו את שטח המשולש.

34 צלעות משולש 7, 8, 13. מצאו את הזווית שמול הצלע 13.

35 במשולש ABC: $a=5$, $b=5\sqrt{3}$, $\angle A=30^\circ$. מצאו את $\angle B$ ואת c בשני המשולשים האפשריים.

36 צלעות משולש הן 7, 8 ו-10. האם המשולש חד זווית, ישר זווית או קהה זווית? נמקו בעזרת משפט הקוסינוסים.

✔ תשובות סופיות – נושא 9.2

1	$c \approx 15.32$; $b \approx 13.47$
2	$c = \sqrt{57} \approx 7.55$
3	$60°$ ($\cos = \frac{25+64-49}{80} = \frac{1}{2}$)
4	12
5	$10\sqrt{3} \approx 17.32$
6	$R = 10$
7	שני משולשים: $\angle B \approx 41.81°$ או $\angle B \approx 138.19°$
8	$\sin B = \frac{4}{3} > 1$ – אין פתרון
9	$4\sqrt{7} \approx 10.58$ ו-$4\sqrt{19} \approx 17.44$
10	≈ 156.80 מ'
11	$120°$
12	$30°$ או $150°$
13	$b \approx 7.66$
14	$b \approx 11.15$; $a \approx 8.16$
15	$BC = 2\sqrt{13} \approx 7.21$; תיכון $\sqrt{37} \approx 6.08$
16	≈ 45
17	$32\sqrt{2} \approx 45.25$
18	$c = 12$
19	$10\sqrt{19} \approx 43.59$ ק"מ
20	5 ו-$5\sqrt{3} \approx 8.66$
21	$AC = \sqrt{109} \approx 10.44$; $\angle D \approx 95.38°$
22	≈ 6.84

23 מעבירים קוטר מ-B; זווית היקפית שווה ל-A (או משלימה), ובמשולש ישר זווית $a = 2R\sin A$

24 $\approx 59.49°$; שטח 84

25 $b \approx 10.71$; $c \approx 18.03$; $R \approx 9.33$

26 ≈ 8.15

27 $a \approx 10.46$; $\angle B \approx 22.11°$

28 $30°$ או $150°$

29 ≈ 24.51

30 ≈ 44.80 מ'

31 $x = 1.5$ (צלעות 1.5, 2.5, 3.5)

32 7 ו-$\sqrt{129} \approx 11.36$

33 ≈ 18.30

34 $120°$

35 $\angle B = 60°$, $c = 10$; או $\angle B = 120°$, $c = 5$

36 חד זווית – הזווית מול הצלע 10 מקיימת $\cos = \frac{13}{112} > 0$ (כ-$83.33°$)

9.3 זהויות בסיס, זווית כפולה ומעגל היחידה

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\sin 2x = 2\sin x \cos x$,
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$. במעגל היחידה הנקודה של הזווית α היא $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

צפו לפני שמתחילים:



מעגל היחידה בטריגונומטריה – ההיגיון והזהויות
YouTube · 15:17



קורס טריגו – מבוא לזהויות בסיס והוכחה
YouTube · 12:01



טריגו – הוכחת זהות של זווית כפולה
YouTube · 3:50

1 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ ו-α זווית חדה. מצאו את $\cos\alpha$ ואת $\tan\alpha$.

2 $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ ו- $90° < \alpha < 180°$. מצאו את $\sin\alpha$ ואת $\tan\alpha$.

3 $\tan\alpha = 2$ ו- $180° < \alpha < 270°$. מצאו את $\sin\alpha$ ואת $\cos\alpha$.

4 פשטו: $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

5 פשטו: $\frac{1-\sin^2 x}{\cos x}$.

6 הוכיחו: $\sin x = \cos x \cdot \tan x$.

7 מצאו בלי מחשבון: $\sin 150°$, $\cos 120°$, $\tan 135°$, $\sin 210°$, $\cos 300°$, $\tan 240°$.

8 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ ו-α חדה. מצאו את $\sin 2\alpha$ ואת $\cos 2\alpha$.

9 $\sin\alpha = \frac{1}{3}$. מצאו את $\cos 2\alpha$ (בלי למצוא את α).

10 פשטו: $\frac{\sin 2x}{2\cos x}$.

11 פשטו: $(\cos x + \sin x)^2$.

12 הוכיחו: $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.

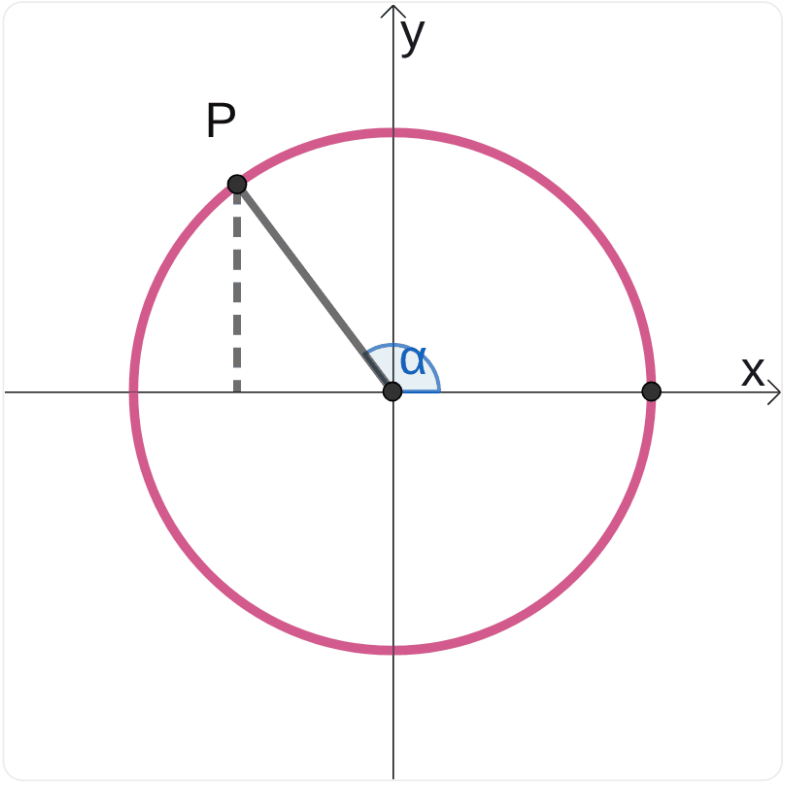
13 פשטו: $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$.

14 הוכיחו: $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

15 ידוע ש- $\sin x + \cos x = 1.2$. מצאו את $\sin 2x$.

16 ידוע ש- $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$. מצאו את $\sin 2x$.

17 הנקודה $P(-0.6,\ 0.8)$ נמצאת על מעגל היחידה. מצאו את $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ואת הזווית α ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$).



18 באיזה רביע נמצאת הזווית 250°? מה הסימנים של sin, cos ו- tan שלה?

19 מצאו: $\sin(-30^\circ)$ ו-$\cos(-60^\circ)$. מה הכלל?

20 ידוע ש-$\cos 20^\circ \approx 0.94$. מצאו בלי מחשבון את $\sin 70^\circ$ ואת $\sin 110^\circ$.

21 $\cos 2\alpha = 0.28$ ו-α חדה. מצאו את $\cos\alpha$ ואת $\sin\alpha$.

22 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ ו-α חדה. מצאו את $\sin 2\alpha$ ואת $\cos 2\alpha$.

23 פשטו: $\sin(180^\circ - x) + \cos(90^\circ - x)$.

24 פשטו: $\sin(x + 360^\circ) - \sin(-x)$.

25 פשטו: $\cos(180^\circ - x) + \cos(180^\circ + x)$.

26 מהו הערך הגדול ביותר של הביטוי $3\sin x\cos x$? (רמז: זווית כפולה)

27 הוכיחו: $\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$.

28 לאילו ערכי α בתחום $0^\circ \le \alpha < 360^\circ$ מתקיים $\sin\alpha = \cos\alpha$? הסבירו בעזרת מעגל היחידה.

29 חשבו בלי מחשבון: $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ$.

30 פשטו: $\tan x\,(1 - \sin^2 x)$.

31 ידוע ש-$\tan x = 3$. מצאו את $\cos^2 x - \sin^2 x$.

32 מצאו את שיעורי הנקודה על מעגל היחידה המתאימה לזווית 150°.

33 $\sin\alpha = 0.8$ ו-$90^\circ < \alpha < 180^\circ$. מצאו את $\sin 2\alpha$ ואת $\cos 2\alpha$.

34 הוכיחו: $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$.

35 $\cos\alpha = 0.6$. מצאו את $\cos 2\alpha$.

36 פשטו: $\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$.

✔ תשובות סופיות – נושא 9.3

1	$\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$
2	$-\frac{12}{5}$; $\frac{12}{13}$
3	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$; $-\frac{2}{\sqrt{5}}$
4	$1+\cos x$
5	$\cos x$
6	$\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos x=\sin x$
7	$\frac{1}{2}$,$-\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}$,-1 ,$-\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}$,$\sqrt{3}$
8	$\frac{7}{25}$; $\frac{24}{25}$
9	$\frac{7}{9}$ $(1-2\sin^2\alpha)$
10	$\sin x$
11	$1+\sin 2x$
12	$(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)=\cos 2x$
13	$\tan x$
14	$\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$
15	0.44 (מעלים בריבוע: $1+\sin 2x=1.44$)
16	$\frac{3}{4}$
17	0.8 ,-0.6 ,$-\frac{4}{3}$; $\alpha\approx 126.87°$
18	רביע שלישי ; $\sin<0$,$\cos<0$,$\tan>0$
19	$-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\sin(-x)=-\sin x$,$\cos(-x)=\cos x$
20	שניהם ≈ 0.94
21	0.8 ; 0.6
22	0.8 ; 0.6
23	$2\sin x$

24	$2\sin x$
25	$-2\cos x$
26	1.5
27	מכנה משותף: $\frac{\sin^2 x+1+2\cos x+\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{2(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}$
28	45° ו- 225°
29	1
30	$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$
31	-0.8
32	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
33	-0.28 ; -0.96
34	פתיחת סוגריים: $2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2$
35	-0.28
36	$\cos x+\sin x$

9.4 משוואות טריגונומטריות

$\sin x = a$: $x = \alpha + 360°k$ או $x = 180° - \alpha + 360°k$.
$\cos x = a$: $x = \pm\alpha + 360°k$.
$\tan x = a$: $x = \alpha + 180°k$. במשוואות ריבועיות – משתנה עזר;
במשוואות עם זווית כפולה – מעבירים לזווית אחת ומוציאים גורם משותף. (k שלם)

צפו לפני שמתחילים:

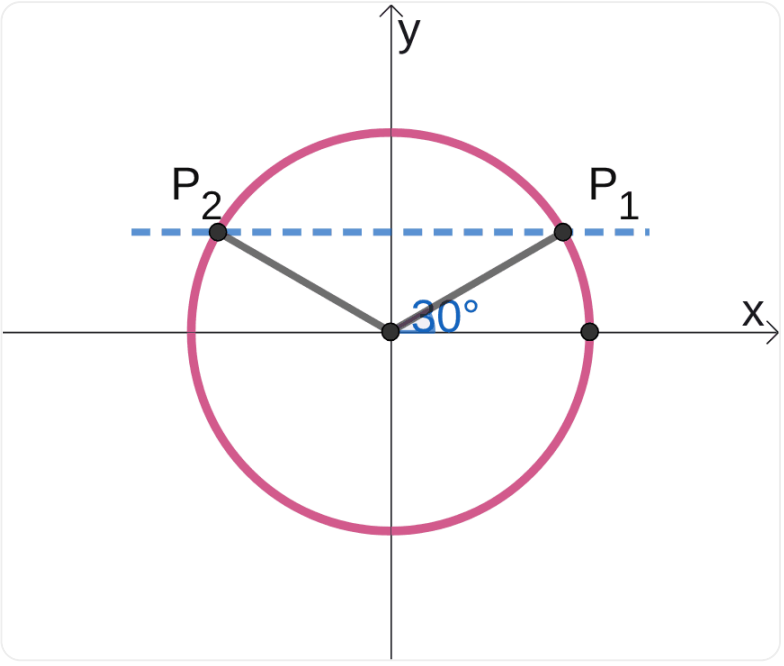
פתרון משוואות טריגונומטריות בתחום
YouTube · 9:30

משוואות טריגונומטריות – עם זהות זווית כפולה
YouTube · 14:33

פתרון משוואות טריגונומטריות עם רדיאנים
YouTube · 13:41

מעבר ממעלות לרדיאנים ולהפך
YouTube · 5:16

1 פתרו: $\sin x = \frac{1}{2}$.



2 פתרו: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3 פתרו: $\tan x = \sqrt{3}$.

4 פתרו: $2\cos x + 1 = 0$.

5 פתרו: $\sin x = 0$, ואחר כך $\cos x = 1$. מה ההבדל בכתיבת הפתרון הכללי?

6 פתרו: $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7 פתרו: $\cos(x - 30^\circ) = \frac{1}{2}$.

8 פתרו: $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$.

9 פתרו: $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$.

10 פתרו: $\sin^2 x = \frac{3}{4}$.

11 פתרו: $\tan^2 x = 1$.

12 פתרו: $\sin x = \cos x$.

13 פתרו: $\sin 2x = \cos x$ (רמז: זווית כפולה והוצאת גורם משותף).

14 פתרו: $\cos 2x = \cos x$ (רמז: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$).

15 פתרו: $\sin 2x = \sin x$.

16 פתרו: $2\cos^2 x = 1 + \sin x$.

17 פתרו: $\cos 2x + 3\sin x = 2$.

18 פתרו (דיוק של שתי ספרות): $\sin x = 0.3$.

19 פתרו: $\cos x = -0.4$.

20 פתרו: $\tan x = -2$.

21 מצאו את כל הפתרונות בתחום $0^\circ \le x \le 360^\circ$: $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

22 מצאו את כל הפתרונות בתחום $0^\circ \le x \le 180^\circ$: $\cos 2x = 0$.

23 מצאו את כל הפתרונות בתחום $0^\circ \le x \le 360^\circ$: $\sin(2x + 30^\circ) = 1$.

24 פתרו: $3\tan x = \sqrt{3}$.

25 פתרו: $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$.

26 פתרו: $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$.

27 פתרו: $\sin 3x = 1$.

28 פתרו: $\tan 2x = 1$.

29 פתרו: $\sin x = \sin 40^\circ$.

30 פתרו: $\cos x = \cos 70^\circ$.

31 פתרו: $\sin x = \cos 20^\circ$.

32 פתרו ברדיאנים: $\sin x = \frac{1}{2}$.

33 פתרו ברדיאנים: $\cos 2x = -1$.

34 מצאו את הפתרונות בתחום $0 \le x \le 2\pi$: $4\sin^2 x - 3 = 0$.

35 פתרו: $\tan x + \frac{1}{\tan x} = 2$.

36 פתרו: $2\sin x \cos x + \cos x = 0$.

37 כמה פתרונות יש למשוואה $\sin x = 0.7$ בתחום $0^\circ \le x \le 720^\circ$? הסבירו בעזרת גרף או מעגל היחידה.

✔ תשובות סופיות – נושא 9.4

1	$x = 30° + 360°k$ או $x = 150° + 360°k$
2	$x = \pm 135° + 360°k$
3	$x = 60° + 180°k$
4	$x = \pm 120° + 360°k$
5	$x = 180°k$; $x = 360°k$
6	$x = 30° + 180°k$ או $x = 60° + 180°k$
7	$x = 90° + 360°k$ או $x = -30° + 360°k$
8	$x = 90° + 360°k$,$x = 210° + 360°k$,$x = 330° + 360°k$
9	$x = \pm 120° + 360°k$ או $x = 180° + 360°k$
10	$x = 60° + 180°k$ או $x = 120° + 180°k$
11	$x = 45° + 90°k$
12	$x = 45° + 180°k$
13	$x = 90° + 180°k$,$x = 30° + 360°k$,$x = 150° + 360°k$
14	$x = 360°k$ או $x = \pm 120° + 360°k$
15	$x = 180°k$ או $x = \pm 60° + 360°k$
16	$x = 30° + 360°k$,$x = 150° + 360°k$,$x = 270° + 360°k$
17	$x = 90° + 360°k$,$x = 30° + 360°k$,$x = 150° + 360°k$
18	$x \approx 17.46° + 360°k$ או $x \approx 162.54° + 360°k$
19	$x \approx \pm 113.58° + 360°k$
20	$x \approx 116.57° + 180°k$
21	$240°$ ו- $300°$
22	$45°$ ו- $135°$
23	$30°$ ו- $210°$

24	$x = 30° + 180°k$
25	$x = 15° + 180°k$ או $x = 75° + 180°k$
26	$x = \pm 30° + 180°k$
27	$x = 30° + 120°k$
28	$x = 22.5° + 90°k$
29	$x = 40° + 360°k$ או $x = 140° + 360°k$
30	$x = \pm 70° + 360°k$
31	$x = 70° + 360°k$ או $x = 110° + 360°k$
32	$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ או $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$
33	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$
34	$\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$
35	$x = 45° + 180°k$
36	$x = 90° + 180°k$, $x = 210° + 360°k$, $x = 330° + 360°k$
37	4 פתרונות

פרק 9 סיכומון סוף פרק – טריגונומטריה

משולש ישר זווית

- $\sin\alpha$ = ניצב מול / יתר, $\cos\alpha$ = ניצב ליד / יתר, $\tan\alpha$ = מול / ליד.
- זווית נמצאת בעזרת $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ במחשבון (מצב מעלות!).

משפט הסינוסים

- $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$.
- משתמשים כשיודעים **צלע וזווית שמולה** + נתון נוסף.
- מציאת זווית: ייתכנו שני פתרונות – α ו-$180^\circ-\alpha$. בודקים מול סכום הזוויות.

משפט הקוסינוסים

- $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$.
- משתמשים כשיודעים **שתי צלעות והזווית שביניהן**, או **שלוש צלעות**.

שטחים

- $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ – שתי צלעות והזווית שביניהן.
- מקבילית: $S=ab\sin\alpha$. מרובע לפי אלכסונים: $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\theta$.

זהויות בסיס

- $\sin^2x+\cos^2x=1$, $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$.
- $\sin(180^\circ-x)=\sin x$,
  $\cos(180^\circ-x)=-\cos x$,
  $\cos(-x)=\cos x$.

זווית כפולה

- $\sin 2x=2\sin x\cos x$.
- $\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x$
- $\cos 2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x$.

מעגל היחידה

- נקודה על המעגל: $(\cos x,\sin x)$.
- רביע I: הכול חיובי; II: רק sin; III: רק tan; IV: רק cos.

משוואות טריגונומטריות

- $\sin x=a$: $x=\alpha+360^\circ k$ או $x=180^\circ-\alpha+360^\circ k$.
- $\cos x=a$: $x=\pm\alpha+360^\circ k$.
- $\tan x=a$: $x=\alpha+180^\circ k$.
- משוואה ריבועית ב-$\sin x$ – משתנה עזר, ובודקים $-1\le t\le 1$.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לחלק ב-$\sin x$ או ב-$\cos x$ ולאבד פתרונות – עדיף להוציא גורם משותף.
- במשפט הסינוסים לשכוח את הפתרון השני $180^\circ-\alpha$.
- לשכוח את $+360^\circ k$ (או $+180^\circ k$ בטנגנס) בפתרון הכללי.

💡 **הטיפ של אילון:** לפני כל משולש – שאלו: מה נתון? צלע וזווית מולה ⇐ סינוסים. זווית בין שתי צלעות או שלוש צלעות ⇐ קוסינוסים. זה חוסך חצי מהזמן.

פרק 10

סדרה חשבונית

פרק זה אינו במיקוד הבגרות הנוכחי – אך הוא הבסיס להבנת סדרות, ולכן מומלץ לתרגל אותו

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

10.1 **האיבר הכללי והוכחה שסדרה היא חשבונית** — 34 תרגילים

10.2 **סכום סדרה חשבונית – סכום בין לבין, זוגיים ואי-זוגיים וטרנספורמציות** — 33 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

קורס סדרה חשבונית – מבוא
YouTube · 8:16

סדרה חשבונית – האיבר הכללי
YouTube · 6:47

סדרה חשבונית – נוסחת סכום
YouTube · 4:44

כל מה שצריך לדעת על סדרות – מיקוד לבגרות
YouTube · 5:09

🎛️ המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

מעבדת הסדרות
בחרו איבר ראשון והפרש (או מנה) וראו את האיברים כעמודות ואת הסכום מצטבר – חשבונית מול הנדסית.

10.1 האיבר הכללי והוכחה שסדרה היא חשבונית

סדרה חשבונית: ההפרש בין כל שני איברים עוקבים קבוע, $a_{n+1}-a_n=d$. האיבר הכללי: $a_n=a_1+(n-1)d$. כדי להוכיח שסדרה חשבונית – מראים ש-$a_{n+1}-a_n$ קבוע (לא תלוי ב-n).

צפו לפני שמתחילים:

קורס סדרה חשבונית – מבוא
YouTube · 8:16

קורס סדרה חשבונית – האיבר הכללי
YouTube · 6:47

סדרה חשבונית – איברים חיוביים ושליליים
YouTube · 5:31

סדרה חשבונית – התחלקות מספרים
YouTube · 2:52

1 בסדרה חשבונית $a_1=3$ וההפרש $d=4$. מצאו את a_{10}.

2 בסדרה חשבונית $a_1=20$ ו-$d=-3$. מצאו את a_{15}.

3 כתבו את האיבר הכללי של הסדרה $5,\ 9,\ 13,\ 17,\ \ldots$

4 כתבו את האיבר הכללי של הסדרה $12,\ 7,\ 2,\ -3,\ \ldots$

5 כתבו את האיבר הכללי של הסדרה $\frac{1}{2},\ 2,\ \frac{7}{2},\ 5,\ \ldots$

6 איזה מקום תופס המספר 95 בסדרה $3,\ 7,\ 11,\ \ldots$?

7 האם המספר 100 הוא איבר בסדרה $2,\ 9,\ 16,\ \ldots$? נמקו.

8 האם המספר 50 הוא איבר בסדרה $4,\ 10,\ 16,\ \ldots$? נמקו.

9 בסדרה חשבונית $a_4=11$ ו-$a_9=26$. מצאו את a_1 ואת d.

10 בסדרה חשבונית $a_3=-1$ ו-$a_{12}=-28$. מצאו את האיבר הכללי.

11 בסדרה חשבונית $a_5 + a_7 = 40$ ו- $a_2 = 8$. מצאו את a_1 ואת d.

12 בסדרה חשבונית $a_2 \cdot a_4 = 63$ ו- $a_3 = 8$. מצאו את ההפרש (שתי אפשרויות).

13 הוכיחו שהסדרה $a_n = 7n - 4$ היא סדרה חשבונית, ומצאו את ההפרש.

14 הוכיחו שהסדרה $a_n = 10 - \frac{n}{2}$ היא סדרה חשבונית יורדת.

15 הראו שהסדרה $a_n = n^2 + 1$ אינה סדרה חשבונית.

16 המספרים $4x - 3,\ 2x + 1,\ x + 1$ הם שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית. מצאו את x.

17 המספרים $8,\ 3x,\ x^2$ הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית. מצאו את x (שתי אפשרויות).

18 הכניסו 4 מספרים בין 3 לבין 23 כך שיתקבלו 6 איברים של סדרה חשבונית.

19 הכניסו 5 מספרים בין -2 ל- 16 כך שתתקבל סדרה חשבונית.

20 כמה איברים יש בסדרה הסופית $6,\ 11,\ 16,\ \ldots,\ 101$?

21 כמה מספרים דו-ספרתיים מתחלקים ב- 7?

22 כמה מספרים תלת-ספרתיים נותנים שארית 2 בחלוקה ב- 5?

23 בסדרה $50,\ 46,\ 42,\ \ldots$ – מהו האיבר השלילי הראשון ומה מקומו?

24 בסדרה $-30,\ -27,\ -24,\ \ldots$ – כמה איברים שליליים יש?

25 בסדרה $a_n = 4n - 37$: מהו האיבר החיובי הקטן ביותר?

26 בסדרה חשבונית $a_7 = 0$. הראו ש- $a_3 + a_{11} = 0$.

27 בסדרה חשבונית $a_6 = 15$. מצאו את $a_2 + a_{10}$ ואת $a_1 + a_{11}$.

28 בסדרה חשבונית ההפרש בין האיבר ה-20 לאיבר ה-8 הוא 36. מצאו את d.

29 נתונה סדרה חשבונית a_n שבה $d=2$. מצאו את ההפרש של הסדרה $b_n=3a_n-5$, והוכיחו שהיא חשבונית.

30 מהסדרה החשבונית $a_n=5n+2$ לוקחים רק את האיברים במקומות הזוגיים: $a_2, a_4, a_6, \ldots$. הוכיחו שמתקבלת סדרה חשבונית ומצאו את ההפרש שלה.

31 שתי סדרות: $a_n=3n+1$ ו-$b_n=5n-9$. האם יש מקום n שבו האיברים שווים? מצאו אותו.

32 שתי סדרות: $4,\ 7,\ 10,\ldots$ ו-$5,\ 9,\ 13,\ldots$. מצאו את שלושת המספרים הקטנים ביותר שמופיעים בשתי הסדרות.

33 אורכי צלעות משולש ישר זווית יוצרים סדרה חשבונית שהפרשה 3. מצאו את הצלעות.

34 זוויות משולש יוצרות סדרה חשבונית, והזווית הגדולה פי 2 מהקטנה. מצאו את הזוויות.

✔ תשובות סופיות – נושא 10.1

1	39
2	-22
3	$a_n = 4n + 1$
4	$a_n = 17 - 5n$
5	$a_n = \frac{3}{2}n - 1$
6	$a_{24} = 95$
7	כן: $a_{15} = 100$
8	לא: $6n - 2 = 50$ נותן $n = \frac{26}{3}$
9	$a_1 = 2$, $d = 3$
10	$a_n = 8 - 3n$
11	$d = 3$, $a_1 = 5$
12	$d = 1$ או $d = -1$
13	$a_{n+1} - a_n = 7$ (קבוע)
14	$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2} < 0$
15	$a_{n+1} - a_n = 2n + 1$ - תלוי ב-n
16	$x = 4$ (הסדרה $5, 9, 13$)
17	$x = 2$ או $x = 4$
18	$7,\ 11,\ 15,\ 19$
19	$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13$
20	20
21	13
22	180
23	$a_{14} = -2$

24	10
25	$a_{10}=3$
26	$a_3+a_{11}=2a_7=0$
27	$30\ ;\ 30$
28	$d=3$
29	$b_{n+1}-b_n=3d=6$
30	$b_n=a_{2n}=10n+2$; הפרש 10
31	$n=5$ (שניהם 16)
32	$13,\ 25,\ 37$
33	$9,\ 12,\ 15$
34	$40^\circ,\ 60^\circ,\ 80^\circ$

10.2 סכום סדרה חשבונית – סכום בין לבין, זוגיים ואי-זוגיים וטרנספורמציות

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. מעבר מסכום לאיבר: $a_n = S_n - S_{n-1}$.
סכום בין לבין: $a_k + \cdots + a_m = S_m - S_{k-1}$.

צפו לפני שמתחילים:

סדרה חשבונית – נוסחת סכום: הסבר והיגיון
YouTube · 4:44

סדרה חשבונית – סכום איברים אחרונים
YouTube · 5:45

סדרה חשבונית – סכום איברים זוגיים ואי-זוגיים
YouTube · 5:24

מנוסחת סכום לאיבר כללי
YouTube · 4:50

1 חשבו את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה $2,\ 5,\ 8,\ \ldots$

2 חשבו את סכום 15 האיברים הראשונים בסדרה $40,\ 36,\ 32,\ \ldots$

3 חשבו את הסכום $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$.

4 חשבו את סכום כל המספרים האי-זוגיים מ-1 עד 99.

5 חשבו את סכום כל המספרים הדו-ספרתיים שמתחלקים ב-4.

6 חשבו את הסכום $7 + 12 + 17 + \cdots + 102$.

7 בסדרה חשבונית $a_1 = 5$ ו-$S_{10} = 275$. מצאו את ההפרש.

8 בסדרה חשבונית $d = 4$ ו-$S_{12} = 300$. מצאו את a_1.

9 בסדרה חשבונית $a_1 = 1$, $d = 2$. כמה איברים צריך לחבר כדי לקבל סכום 225?

10 כמה איברים צריך לחבר בסדרה $3,\ 7,\ 11,\ \ldots$ כדי שהסכום יהיה 210?

11 בסדרה $30,\ 27,\ 24,\ldots$ – כמה איברים צריך לחבר כדי שהסכום יהיה 0?

12 בסדרה $30,\ 27,\ 24,\ldots$ – מהו הסכום הגדול ביותר שאפשר לקבל, ואחרי כמה איברים?

13 בסדרה חשבונית $S_5=40$ ו-$S_{10}=155$. מצאו את a_1 ואת d.

14 בסדרה חשבונית $a_6=17$. חשבו את S_{11}.

15 סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא $S_n=n^2+4n$. מצאו את a_1, את a_2 ואת האיבר הכללי.

16 סכום n האיברים הראשונים הוא $S_n=3n^2-n$. הוכיחו שהסדרה חשבונית ומצאו את ההפרש.

17 בסדרה $a_n=2n+1$: חשבו את סכום האיברים מ-a_{11} עד a_{30} ("סכום בין לבין").

18 בסדרה חשבונית $a_1=4$, $d=3$, ויש בה 40 איברים. חשבו את סכום 10 האיברים האחרונים.

19 בסדרה חשבונית בת $2n$ איברים, $a_1=1$ ו-$d=2$. חשבו את סכום האיברים שבמקומות הזוגיים ($a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$).

20 בסדרה $5,\ 8,\ 11,\ldots$ עם 30 איברים: חשבו את סכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים.

21 בסדרה חשבונית בת 20 איברים, סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 250 וסכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 220. מצאו את ההפרש.

22 בסדרה חשבונית בת 21 איברים, האיבר האמצעי הוא 12. מה סכום כל האיברים?

23 חשבו את סכום כל המספרים בין 1 ל-200 שאינם מתחלקים ב-3.

24 בונים מגדל ממקלות: בשורה העליונה 3 מקלות, ובכל שורה נוספת 2 מקלות יותר. כמה מקלות בסך הכול ב-15 שורות?

25 יוסי חוסך 50 ש"ח בחודש הראשון, ובכל חודש 10 ש"ח יותר מהקודם. אחרי כמה חודשים יחסוך בסך הכול 1610 ש"ח?

26 מוסיפים 5 לכל איבר בסדרה חשבונית בת 12 איברים שסכומה 96. מה הסכום החדש?

27 מכפילים פי 3 כל איבר בסדרה חשבונית שסכום 10 איבריה הראשונים 85. מה הסכום החדש, ומה הקשר בין ההפרשים?

28 נתונה סדרה חשבונית a_n עם $a_1 = 2$, $d = 3$. בונים סדרה חדשה $b_n = a_n + a_{n+1}$. הוכיחו שהיא חשבונית וחשבו את $b_1 + \cdots + b_{10}$.

29 סדרה חשבונית: $a_1 = -11$, $d = 2$. מצאו את סכום האיברים השליליים, ואת סכום 20 האיברים הראשונים.

30 בסדרה חשבונית סכום 3 האיברים הראשונים 27 ומכפלתם 585. מצאו את האיברים (סדרה עולה).

31 בסדרה חשבונית $S_n = S_m$ עבור $n \neq m$. הוכיחו ש-$S_{n+m} = 0$. בדקו עם $a_n = 13 - 2n$, $n = 4$, $m = 8$.

32 המספרים $1, 2, \ldots, n$ מחוברים. מה ה-n הקטן ביותר שעבורו הסכום עובר את 1000?

33 בסדרה חשבונית סכום כל n האיברים הראשונים שווה ל-$S_n = \frac{n(n+7)}{2}$. מצאו את a_{20}.

✔ תשובות סופיות – נושא 10.2

1	610
2	180
3	5050
4	2500
5	1188
6	1090
7	$d=5$
8	$a_1=3$
9	15
10	10
11	21
12	165, אחרי 10 או 11 איברים
13	$a_1=2$, $d=3$
14	187
15	$a_1=5$, $a_2=7$; $a_n=2n+3$
16	$d=6$; $a_n=6n-4$
17	840
18	1075
19	$2n^2+n$
20	705
21	$d=3$
22	252
23	13467

24	255
25	14 חודשים
26	156
27	255 ; ההפרש גדל פי 3
28	340 ; $b_n = 6n + 1$
29	160 ; -36
30	$5,\ 9,\ 13$
31	$S_{12} = 0$,$S_4 = S_8 = 32$
32	$n = 45$
33	$a_{20} = 23$

פרק 10 סיכומון סוף פרק – סדרה חשבונית

הגדרה

- סדרה חשבונית: ההפרש בין כל שני איברים עוקבים קבוע: $a_{n+1}-a_n=d$.
- $d>0$ – עולה, $d<0$ – יורדת, $d=0$ – קבועה.

האיבר הכללי

- $a_n=a_1+(n-1)d$.
- בין שני איברים: $a_m=a_k+(m-k)d$.
- שני נתונים (למשל a_3 ו-a_8) ⇐ מערכת של שתי משוואות ב-a_1, d.

הוכחה שסדרה חשבונית

- מחשבים $a_{n+1}-a_n$ באופן כללי (עם n).
- אם התוצאה מספר קבוע (לא תלוי ב-n) – הסדרה חשבונית.
- a_n ליניארי ב-n ($a_n=pn+q$) ⇐ חשבונית עם $d=p$.

איבר אמצעי

- a,b,c סדרה חשבונית $\Leftrightarrow$ $2b=a+c$.
- איברים חיוביים/שליליים: פותרים $a_n>0$ ומוצאים את n השלם.

סכום

- $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$.
- $a_n=S_n-S_{n-1}$ (עבור $n\geq 2$).

סכום בין לבין

- סכום מ-a_k עד a_m: מספר האיברים $m-k+1$, ואז $\frac{m-k+1}{2}(a_k+a_m)$.
- או: S_m-S_{k-1}.

זוגיים / אי-זוגיים במיקום

- $a_2,a_4,a_6,\ldots$ – סדרה חשבונית חדשה עם הפרש $2d$.
- $a_1,a_3,a_5,\ldots$ – גם הפרש $2d$; סופרים כמה איברים יש בכל קבוצה.

טרנספורמציות

- $b_n=ka_n+c$ – חשבונית עם הפרש kd.
- $b_n=a_n+a_{n+1}$ – חשבונית עם הפרש $2d$.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לכתוב $a_n=a_1+nd$ במקום $(n-1)d$.
- לספור לא נכון את מספר האיברים בסכום בין לבין (שוכחים את ה-$+1$).
- בהוכחה – להראות על כמה איברים בודדים במקום באופן כללי.
- n חייב להיות טבעי – לשכוח לעגל/לפסול פתרון שאינו שלם או שלילי.

💡 **הטיפ של אילון:** בכל שאלת סדרות – כתבו קודם את כל הנתונים בשפה של a_1 ו-d. ברגע שיש לכם שתי משוואות – השאלה כבר כמעט פתורה.

פרק 11

סדרה הנדסית

איבר כללי, סכומים, סדרות אינסופיות מתכנסות, כללי נסיגה ושילוב עם סדרה חשבונית

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

11.1 האיבר הכללי, הוכחה שסדרה הנדסית וטרנספורמציות לסדרה — 32 תרגילים

11.2 סכום סדרה הנדסית וסדרה הנדסית אינסופית — 31 תרגילים

11.3 כלל נסיגה, סדרות משולבות ושאלות 100 — 30 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

סדרה הנדסית – סיכום מלא לבגרות
YouTube · 43:59

סדרה הנדסית – איבר כללי
YouTube · 3:52

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת
YouTube · 5:23

סדרה הנדסית – התנהגויות ומצבים
YouTube · 5:50

🎛️ המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

מעבדת הסדרות

שנו את המנה q וראו מתי הסדרה מתכנסת ואיך הסכום האינסופי מתקרב ל- $\frac{a_1}{1-q}$.

11.1 האיבר הכללי, הוכחה שסדרה הנדסית וטרנספורמציות לסדרה

סדרה הנדסית: המנה בין כל שני איברים עוקבים קבועה, $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$. האיבר הכללי: $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$. שלושה איברים עוקבים a,b,c בסדרה הנדסית מקיימים $b^2=ac$.

צפו לפני שמתחילים:



קורס סדרות – סדרה הנדסית איבר כללי
YouTube · 3:52



סדרה הנדסית – התנהגויות ומצבים
YouTube · 5:50



סדרה הנדסית – הסבר ותרגול
YouTube · 13:14

1. בסדרה הנדסית $a_1=3$ והמנה $q=2$. מצאו את a_6.
2. בסדרה הנדסית $a_1=64$ ו-$q=\frac{1}{2}$. מצאו את a_7.
3. בסדרה הנדסית $a_1=2$ ו-$q=-3$. מצאו את a_5 ואת a_6. מה אפשר לומר על הסימנים?
4. כתבו את האיבר הכללי של הסדרה $5,\ 15,\ 45,\ \ldots$
5. כתבו את האיבר הכללי של הסדרה $48,\ -24,\ 12,\ \ldots$
6. איזה מקום תופס המספר 1458 בסדרה $2,\ 6,\ 18,\ \ldots$?
7. האם המספר 200 הוא איבר בסדרה $3,\ 6,\ 12,\ \ldots$? נמקו.
8. בסדרה הנדסית $a_2=6$ ו-$a_5=162$. מצאו את a_1 ואת q.
9. בסדרה הנדסית $a_3=20$ ו-$a_5=80$. מצאו את q ואת a_1 (שתי אפשרויות).

10 בסדרה הנדסית חיובית $a_2 \cdot a_4 = 144$. מצאו את a_3.

11 בסדרה הנדסית $a_4 = -24$ ו-$a_7 = 192$. מצאו את המנה ואת האיבר הכללי.

12 הוכיחו שהסדרה $a_n = 5 \cdot 2^n$ היא סדרה הנדסית ומצאו את המנה.

13 הוכיחו שהסדרה $a_n = \frac{3^n}{4^{n+1}}$ היא סדרה הנדסית ומצאו את המנה.

14 הראו שהסדרה $a_n = n \cdot 2^n$ אינה הנדסית.

15 המספרים $x,\ x+6,\ 4x$ הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית. מצאו את x ואת המנה (שתי אפשרויות).

16 המספרים $2,\ x,\ 18$ הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית. מצאו את x.

17 הכניסו 3 מספרים חיוביים בין 2 לבין 162 כך שתתקבל סדרה הנדסית.

18 כמה איברים יש בסדרה הסופית $3,\ 6,\ 12,\ \ldots,\ 768$?

19 בסדרה $1,\ 2,\ 4,\ \ldots$ מהו האיבר הראשון שגדול מ-1000, ומה מקומו?

20 בסדרה $80,\ 40,\ 20,\ \ldots$ מהו מקום האיבר הראשון שקטן מ-1?

21 סדרה הנדסית עם $a_1 = -3$ ו-$q = 2$. האם היא עולה או יורדת? נמקו.

22 לאילו ערכי q הסדרה ההנדסית $a_n = 4q^{n-1}$ יורדת?

23 נתונה סדרה הנדסית a_n עם מנה $q = 3$. הוכיחו שהסדרה $b_n = 2a_n$ הנדסית ומצאו את מנתה.

24 נתונה סדרה הנדסית a_n עם מנה q. הוכיחו שהסדרה $b_n = a_n^2$ הנדסית ומצאו את מנתה.

25 נתונה סדרה הנדסית חיובית a_n עם מנה $q = 4$. הוכיחו שהסדרה $b_n = \frac{1}{a_n}$ הנדסית ומצאו את מנתה.

26 מהסדרה ההנדסית $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ לוקחים את האיברים במקומות האי-זוגיים. הוכיחו שמתקבלת סדרה הנדסית ומצאו את המנה.

27 נתונה סדרה הנדסית a_n עם $a_1 = 2$, $q = 3$. הוכיחו שהסדרה $b_n = a_n \cdot a_{n+1}$ הנדסית ומצאו את b_1 ואת מנתה.

28 נתונה הסדרה ההנדסית $a_n = 2^n$. הוכיחו שהסדרה $b_n = \log_2 a_n$ היא סדרה חשבונית.

29 נתונה סדרה הנדסית a_n עם $q = 2$. האם הסדרה $b_n = a_n + 1$ הנדסית? בדקו עם $a_1 = 1$.

30 שלושה מספרים יוצרים סדרה הנדסית שמכפלתם 216 וסכומם 26. מצאו אותם.

31 מתחילים בריבוע שצלעו 8, ובכל שלב בונים ריבוע חדש שקודקודיו באמצעי הצלעות של הקודם. הראו שהשטחים יוצרים סדרה הנדסית, ומצאו את שטח הריבוע החמישי.

32 אוכלוסיית חיידקים מוכפלת פי 3 כל שעה. בהתחלה היו 200. כמה יהיו אחרי 5 שעות?

✔ תשובות סופיות – נושא 11.1

1	96
2	1
3	$162\ ;\ -486$ – הסימנים מתחלפים
4	$a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$
5	$a_n = 48 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
6	$a_7 = 1458$
7	לא – $3 \cdot 2^{n-1} = 200$ אין פתרון שלם
8	$a_1 = 2\ ,q = 3$
9	$a_1 = 5\ ,q = 2$ או $a_1 = 5\ ,q = -2$
10	$a_3 = 12$
11	$q = -2\ ;\ a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$
12	$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$
13	$q = \frac{3}{4}$
14	$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)}{n}$ – תלוי ב-n
15	$x = 6\ ,q = 2$ או $x = -2\ ,q = -2$
16	$x = 6$ או $x = -6$
17	$6,\ 18,\ 54$
18	9
19	$a_{11} = 1024$
20	$a_8 = \frac{5}{8}$
21	יורדת (כל האיברים שליליים והולכים וגדלים בערכם המוחלט)
22	$0 < q < 1$
23	$q = 3$ (אותה מנה)

24	q^2
25	$\frac{1}{4}$
26	$b_n = 3 \cdot 4^{n-1}$; מנה 4
27	$b_1 = 12$; מנה 9
28	$b_n = n$ – הפרש 1
29	לא: $2, 3, 5$ – $\frac{3}{2} \neq \frac{5}{3}$
30	$2,\ 6,\ 18$ (או $18,\ 6,\ 2$)
31	4 (השטחים: $64, 32, 16, 8, 4$)
32	48600

11.2 סכום סדרה הנדסית וסדרה הנדסית אינסופית

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת כאשר $-1 < q < 1$ ($q \neq 1$). $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$
($q \neq 0$), וסכומה $S = \frac{a_1}{1-q}$.

צפו לפני שמתחילים:



סדרה הנדסית – הוכחת נוסחת הסכום
YouTube · 3:10



סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת – מבוא
YouTube · 5:23



הוכחת נוסחת הסכום של סדרה אינסופית
YouTube · 2:41

1. חשבו את סכום 6 האיברים הראשונים בסדרה $3,\ 6,\ 12,\ \ldots$

2. חשבו את סכום 5 האיברים הראשונים בסדרה $81,\ 27,\ 9,\ \ldots$

3. חשבו את סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה $1,\ -2,\ 4,\ \ldots$

4. חשבו את הסכום $1+2+4+\cdots+512$.

5. בסדרה הנדסית $q=2$ ו- $S_6=315$. מצאו את a_1.

6. בסדרה הנדסית $a_1=4$, $q=3$. כמה איברים צריך לחבר כדי שהסכום יהיה 484?

7. בסדרה הנדסית $a_1=2$ ו- $S_3=26$. מצאו את המנה (שתי אפשרויות).

8. הוכיחו כי $\frac{S_{2n}}{S_n}=1+q^n$ בסדרה הנדסית עם $q \neq 1$. בדקו עם $a_n=2^{n-1}$, $n=3$.

9. בסדרה הנדסית $S_3=7$ ו- $S_6=63$. מצאו את q ואת a_1.

10. בסדרה $a_n=3\cdot 2^{n-1}$ חשבו את סכום האיברים מ- a_5 עד a_{10}.

11 בסדרה הנדסית בת 10 איברים $a_1 = 1$, $q = 2$. חשבו את סכום האיברים שבמקומות הזוגיים.

12 בסדרה הנדסית בת $2n$ איברים, סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 3 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. מצאו את q.

13 חשבו את סכום הסדרה ההנדסית האינסופית $12 + 6 + 3 + \ldots$

14 חשבו את סכום הסדרה האינסופית $9 - 3 + 1 - \ldots$

15 הסבירו מדוע לסדרה $2 + 3 + 4.5 + \ldots$ אין סכום סופי.

16 סכום סדרה הנדסית אינסופית הוא 20, והאיבר הראשון 5. מצאו את המנה.

17 סכום סדרה הנדסית אינסופית הוא 8 והמנה $-\frac{1}{2}$. מצאו את שלושת האיברים הראשונים.

18 לאילו ערכי x הסדרה $1 + x + x^2 + \ldots$ מתכנסת, ומהו סכומה?

19 לאילו ערכי x הסדרה $1 + (x-2) + (x-2)^2 + \ldots$ מתכנסת?

20 פתרו: $3 = \cdots + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1$.

21 כתבו את המספר המחזורי $0.777\ldots = 0.\overline{7}$ כשבר בעזרת סדרה הנדסית אינסופית.

22 כתבו את $0.\overline{36}$ כשבר מצומצם.

23 בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת, כל איבר גדול פי 4 מסכום כל האיברים שאחריו. מצאו את המנה.

24 סכום סדרה הנדסית אינסופית הוא 6, וסכום ריבועי איבריה 12. מצאו את a_1 ואת q.

25 בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת, סכום האיברים במקומות האי-זוגיים 36 וסכום האיברים במקומות הזוגיים 12. מצאו את q ואת a_1.

26 כדור נופל מגובה 10 מ', ובכל קפיצה עולה ל-$\frac{3}{5}$ מהגובה הקודם. מה הדרך הכוללת שהוא עובר עד שנעצר?

27 בונים ריבועים: הראשון בצלע 4, וכל ריבוע הבא בנוי על אמצעי צלעות הקודם. מה סכום השטחים של כל הריבועים (אינסוף)?

28 משכורת מתחילה ב-8000 ש"ח בשנה הראשונה וגדלה ב-5% בכל שנה. כתבו ביטוי לסכום המשכורות ב-10 שנים.

29 סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא $S_n = 3^n - 1$. הוכיחו שהסדרה הנדסית ומצאו a_1 ו-q.

30 בסדרה הנדסית מתכנסת $a_1 + a_2 = 15$ והסכום האינסופי הוא 16. מצאו את q (שתי אפשרויות).

31 הוכיחו שבסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת עם $a_1 > 0$ ו-$0 < q < 1$, הסכום תמיד גדול מ-a_1.

✔ תשובות סופיות – נושא 11.2

1	189
2	121
3	-85
4	1023
5	$a_1 = 5$
6	5
7	$q = 3$ או $q = -4$
8	$\frac{63}{7} = 9 = 1 + 2^3$
9	$a_1 = 1$,$q = 2$
10	3024
11	682
12	$q = 3$
13	24
14	$\frac{27}{4}$
15	$q = 1.5 > 1$ – הסדרה לא מתכנסת
16	$q = \frac{3}{4}$
17	$12,\ -6,\ 3$
18	$\frac{1}{1-x}$; $-1 < x < 1$
19	$1 < x < 3$
20	$x = \frac{3}{2}$
21	$\frac{7}{9}$
22	$\frac{4}{11}$
23	$q = \frac{1}{5}$

24	$a_1 = 3 \ , q = \frac{1}{2}$
25	$q = \frac{1}{3} \ , a_1 = 32$
26	40 מ׳
27	32
28	$8000 \cdot \frac{1.05^{10}-1}{0.05} \approx 100623$ ש״ח
29	$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ ; \ a_1 = 2 \ , q = 3$
30	$q = \frac{1}{4}$ או $q = -\frac{1}{4}$
31	$a_1 < \frac{a_1}{1-q}$ כי $0 < 1-q < 1$

11.3 כלל נסיגה, סדרות משולבות ושאלות 100

כלל נסיגה מגדיר כל איבר בעזרת האיבר (או האיברים) שלפניו. בשאלות משולבות – כתבו כל נתון כמשוואה בעזרת a_1, d ו-q, ופתרו מערכת.

צפו לפני שמתחילים:



סדרה הנדסית – סיכום מלא לבגרות
YouTube · 43:59



סדרה הנדסית – סיכום ותרגול
YouTube · 35:23



כל מה שצריך לדעת על סדרות
YouTube · 5:09

1 נתון כלל הנסיגה $a_1=2$, $a_{n+1}=3a_n$. כתבו את 4 האיברים הראשונים ואת האיבר הכללי.

2 נתון כלל הנסיגה $a_1=5$, $a_{n+1}=a_n-4$. איזו סדרה זו? כתבו את האיבר הכללי.

3 נתון $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+1$. כתבו 5 איברים ראשונים. הראו שהסדרה $b_n=a_n+1$ הנדסית.

4 נתון $a_1=3$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+1$. הראו שהסדרה $b_n=a_n-2$ הנדסית ומצאו את a_n.

5 נתון $a_1=4$, $a_{n+1}=-a_n$. כתבו את האיברים ומצאו את S_{25}.

6 נתון $a_{n+1}=a_n+2n$ ו-$a_1=1$. מצאו את a_5.

7 נתון $a_{n+1}=a_n+3$, $a_1=2$. חשבו את $a_1+a_2+\cdots+a_{20}$.

8 נתון $a_1=2$, $a_2=6$ ו-$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$. כתבו 4 איברים ראשונים ובדקו אם הסדרה הנדסית.

9 נתון $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+a_n}$. כתבו 4 איברים ראשונים ונחשו את האיבר הכללי.

10 שלושה מספרים יוצרים סדרה חשבונית שסכומה 15. אם מוסיפים 1, 4 ו-19 לאיברים (בהתאמה) מתקבלת סדרה הנדסית. מצאו את המספרים.

11 האיברים הראשון, השלישי והשביעי בסדרה חשבונית שאינה קבועה יוצרים סדרה הנדסית. אם $a_1=4$, מצאו את ההפרש ואת המנה.

12 בסדרה הנדסית a_1, a_2, a_3 עם $q=2$: המספרים a_1+1, a_2+1, a_3-1 יוצרים סדרה חשבונית. מצאו את a_1.

13 נתונה סדרה חשבונית $a_n=2n+1$ וסדרה הנדסית $b_n=2^n$. חשבו את $\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)$.

14 הסדרה $c_n=3n+2^{n-1}$ היא סכום של סדרה חשבונית וסדרה הנדסית. חשבו את $c_1+\cdots+c_{10}$.

15 נתונה סדרה הנדסית a_n עם $a_1=3$ ו-$q=2$. הסדרה $b_n=\log_2\frac{a_n}{3}$ – הוכיחו שהיא חשבונית ומצאו את סכום 10 איבריה הראשונים.

16 בסדרה הנדסית חיובית $a_3=4$ ו-$a_7=64$. הסדרה $b_n=\log_2 a_n$ – מצאו את האיבר הכללי שלה.

17 בין 1 ל-64 מכניסים 5 מספרים כך שנוצרת סדרה הנדסית חיובית, ו-5 מספרים כך שנוצרת סדרה חשבונית. מה ההפרש בין האיברים הרביעיים בשתי הסדרות?

18 בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת $S=12$. אם מוחקים את האיבר הראשון, סכום שאר האיברים הוא 8. מצאו את a_1 ואת q.

19 בסדרה הנדסית בת 3 איברים, אם מוסיפים 4 לאיבר האמצעי מתקבלת סדרה חשבונית, ואם מוסיפים אז 32 לאיבר האחרון מתקבלת שוב הנדסית. מצאו את הסדרה (מצב אחד).

20 נתון $a_1=1$ ו-$a_{n+1}=a_n+2^n$. מצאו נוסחה לאיבר הכללי.

21 נתון $S_n=2a_n-1$ לכל n. הראו שהסדרה הנדסית ומצאו את האיבר הכללי.

22 נתונה סדרה חשבונית a_n עם $d \neq 0$. הוכיחו שהסדרה $b_n = 2^{a_n}$ הנדסית ומצאו את מנתה.

23 שאלת 100: סדרה הנדסית אינסופית שבה כל איבר שווה לסכום כל האיברים שאחריו. מצאו את המנה.

24 שאלת 100: בסדרה הנדסית בת $2n$ איברים, סכום האיברים במקומות האי-זוגיים 85 ובמקומות הזוגיים 170, ו-$a_1 = 1$. מצאו את q ואת n.

25 שאלת 100: הסדרה a_n מוגדרת $a_1 = 6$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2$. מצאו את $\lim$ (הערך שאליו האיברים מתקרבים) בעזרת הסדרה $b_n = a_n - 3$.

26 שאלת 100: מספרים חיוביים $a,\ b,\ c$ יוצרים סדרה הנדסית, ו-$a + b + c = 21$, $a^2 + b^2 + c^2 = 189$. מצאו אותם.

27 שאלת 100: בסדרה חשבונית $a_1 = 1$. האיברים a_2, a_5, a_{14} יוצרים סדרה הנדסית. מצאו את d ($d \neq 0$).

28 שאלת 100: הוכיחו שאם a, b, c סדרה הנדסית אז $a^2 + b^2,\ ab + bc,\ b^2 + c^2$ גם סדרה הנדסית.

29 שאלת 100: סכום סדרה הנדסית אינסופית S, ומנתה q. מה הסכום של הסדרה האינסופית שאיבריה הם האיברים במקומות הזוגיים בלבד?

30 שאלת 100: חשבו את הסכום $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots$ (רמז: הפרש בין S ל-$\frac{1}{2}S$).

✔ תשובות סופיות – נושא 11.3

1	$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$; $2, 6, 18, 54$
2	חשבונית ; $a_n = 9 - 4n$
3	$b_n = 2^n$; $1, 3, 7, 15, 31$
4	$a_n = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
5	$S_{25} = 4$; $4, -4, 4, \ldots$
6	$a_5 = 21$
7	610
8	$2, 6, 18, 54$ – הנדסית עם $q = 3$
9	$a_n = \frac{1}{n}$; $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$
10	$2,\ 5,\ 8$ (או $26, 5, -16$)
11	$d = 2$; $q = 2$
12	$a_1 = 2$
13	97
14	1188
15	$b_n = n - 1$; 45
16	$b_n = n - 1$
17	$32.5 - 8 = 24.5$
18	$a_1 = 4$, $q = \frac{2}{3}$
19	$2,\ 6,\ 18$
20	$a_n = 2^n - 1$
21	$a_n = 2a_{n-1}$, $a_1 = 1$; $a_n = 2^{n-1}$
22	מנה 2^d
23	$q = \frac{1}{2}$

24	$n=4\ ;\ q=2$
25	$a_n \to 3\ ;\ b_n = 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \to 0$
26	$3,\ 6,\ 12$ (או $12,\ 6,\ 3$)
27	$d=2$
28	q מנה (נובע מ-$b=aq,\ c=aq^2$)
29	$\frac{Sq}{1+q}$
30	2

פרק 11 סיכומון סוף פרק – סדרה הנדסית

הגדרה ואיבר כללי

- סדרה הנדסית: המנה בין איברים עוקבים קבועה: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
- $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, ובין שני איברים: $a_m = a_k \cdot q^{m-k}$.
- $q < 0$ – הסימנים מתחלפים; $0 < q < 1$ עם $a_1 > 0$ – יורדת.

הוכחה שסדרה הנדסית

- מחשבים $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ באופן כללי ומראים שזה מספר קבוע.
- a, b, c הנדסית $\Leftrightarrow b^2 = ac$.

טרנספורמציות לסדרה

- $k \cdot a_n$ – הנדסית עם אותה מנה q.
- a_n^2 – מנה q^2; $\frac{1}{a_n}$ – מנה $\frac{1}{q}$.
- a_{2n} (מקומות זוגיים) – מנה q^2.

סכום

- $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$, עבור $q \neq 1$.
- $q = 1$: $S_n = n \cdot a_1$.
- סכום לפי מיקומים: מזהים איבר ראשון, מנה ומספר איברים של התת-סדרה.

סדרה הנדסית אינסופית

- מתכנסת רק כאשר $|q| < 1$ (ו-$q \neq 0$).
- $S = \frac{a_1}{1-q}$.
- שאלה עם פרמטר – לא לשכוח לבדוק את תנאי ההתכנסות.

כלל נסיגה

- a_{n+1} מוגדר לפי a_n – מחשבים איברים אחד אחרי השני.
- b_n חדשה מתוך כלל נסיגה: מוכיחים ש-$\frac{b_{n+1}}{b_n}$ קבוע (או $b_{n+1} - b_n$ קבוע).

הנדסית + חשבונית

- איברים שהם גם בחשבונית וגם בהנדסית: בונים שתי משוואות ב-a_1, d, q.
- log של סדרה הנדסית חיובית – סדרה חשבונית.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לבלבל בין q^{n-1} ל-q^n באיבר הכללי.
- להשתמש בסכום אינסופי כש-$|q| \geq 1$.
- לפתור $q^2 = 4$ ולשכוח את $q = -2$.
- בכלל נסיגה – לנחש נוסחה בלי להוכיח.

💡 **הטיפ של אילון:** כשיש שני נתונים בהנדסית – חלקו משוואה במשוואה. a_1 מצטמצם ונשארת משוואה רק ב-q.

פרק 12

הסתברות

מאורעות, טבלה דו-ממדית, עץ הסתברות, הסתברות מותנית ונוסחת ברנולי

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

12.1 **מאורעות, "או", טבלה, מאורעות זרים ובלתי תלויים** — 35 תרגילים

12.2 **עץ הסתברות והסתברות מותנית** — 35 תרגילים

12.3 **נוסחת ברנולי** — 35 תרגילים

סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

הסתברות 5 יחידות מתמטיקה – סיכום
YouTube · 19:28

קורס הסתברות – טבלה דו מימדית
YouTube · 6:28

קורס הסתברות – דיאגרמת עץ
YouTube · 8:11

קורס הסתברות – נוסחת ברנולי
YouTube · 8:06

המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

מעבדת ברנולי

שנו את n ואת p וראו את ההסתברות לכל מספר הצלחות, כולל "לפחות" ו"לכל היותר".

12.1 מאורעות, "או", טבלה, מאורעות זרים ובלתי תלויים

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. זרים: $P(A\cap B)=0$. בלתי תלויים: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. משלים: $P(\bar{A})=1-P(A)$.

צפו לפני שמתחילים:

הסתברות "או" – הסבר ברור וטכניקות חישוב
YouTube · 3:39

הסתברות עם טבלה – המבנה הנכון
YouTube · 4:30

מאורעות זרים ומאורעות בלתי תלויים
YouTube · 3:44

מאורעות תלויים ובלתי תלויים
YouTube · 3:48

1. מטילים קובייה הוגנת. מה ההסתברות לקבל מספר זוגי?
2. מטילים קובייה הוגנת. מה ההסתברות לקבל מספר גדול מ-4?
3. מטילים קובייה הוגנת. מה ההסתברות לקבל מספר זוגי **או** מספר גדול מ-4?
4. מטילים קובייה הוגנת. מה ההסתברות **שלא** יתקבל 6?
5. מטילים שתי קוביות הוגנות. מה ההסתברות שסכום התוצאות יהיה 7?
6. מטילים שתי קוביות הוגנות. מה ההסתברות שסכום התוצאות יהיה לפחות 10?
7. מטילים שתי קוביות הוגנות. מה ההסתברות ששתי התוצאות שוות?
8. מטילים שתי קוביות הוגנות. מה ההסתברות שמכפלת התוצאות תהיה זוגית?
9. מטילים מטבע הוגן שלוש פעמים. מה ההסתברות לקבל בדיוק שני "עץ"?
10. בכד 5 כדורים אדומים ו-3 כחולים. מוציאים כדור אחד. מה ההסתברות שהוא כחול?

11 ידוע: $P(A)=0.5$, $P(B)=0.3$, $P(A\cap B)=0.1$. חשבו את $P(A\cup B)$.

12 ידוע: $P(A\cup B)=0.8$, $P(A)=0.6$, $P(B)=0.4$. חשבו את $P(A\cap B)$.

13 A ו-B מאורעות זרים, $P(A)=0.25$, $P(B)=0.4$. חשבו את $P(A\cup B)$.

14 A ו-B בלתי תלויים, $P(A)=0.5$, $P(B)=0.2$. חשבו את $P(A\cap B)$ ואת $P(A\cup B)$.

15 A ו-B בלתי תלויים, $P(A)=0.3$ ו-$P(A\cup B)=0.58$. מצאו את $P(B)$.

16 $P(A)=0.4$, $P(B)=0.5$, $P(A\cap B)=0.2$. האם A ו-B בלתי תלויים? האם הם זרים?

17 $P(A)=0.3$, $P(B)=0.6$ ו-A, B זרים. האם הם בלתי תלויים? נמקו.

18 $P(A)=0.7$. חשבו את $P(\bar{A})$.

19 A, B בלתי תלויים, $P(A)=0.6$, $P(B)=0.5$. חשבו את ההסתברות שאף אחד מהמאורעות לא יתרחש.

20 A, B בלתי תלויים, $P(A)=0.6$, $P(B)=0.5$. חשבו את ההסתברות שיתרחש בדיוק אחד מהם.

21 ידוע ש-$P(A\cap\bar{B})=0.3$ ו-$P(A)=0.5$. חשבו את $P(A\cap B)$.

22 בכיתה 30 תלמידים: 18 לומדים פיזיקה, 12 לומדים כימיה ו-5 לומדים את שני המקצועות. בוחרים תלמיד באקראי. מה ההסתברות שהוא לומד לפחות אחד מהם?

23 בהמשך לתרגיל הקודם: מה ההסתברות שהתלמיד לומד בדיוק מקצוע אחד מהשניים?

24 בטבלה ההסתברויות לבחירת תלמיד מהשכבה:

	בנים	בנות
אוהבים ספורט	0.35	0.25
לא אוהבים ספורט	0.15	0.25

מה ההסתברות שהתלמיד שנבחר הוא בת?

25 לפי הטבלה בתרגיל הקודם: מה ההסתברות שהתלמיד אוהב ספורט?

26 לפי הטבלה: מה ההסתברות שהתלמיד הוא בן **או** אוהב ספורט?

27 לפי הטבלה: האם המאורעות "בן" ו-"אוהב ספורט" בלתי תלויים?

28 בטבלה דו-ממדית ידוע: $P(A)=0.4$, $P(B)=0.7$, $P(A\cap B)=0.25$. השלימו ומצאו את $P(\bar{A}\cap\bar{B})$.

29 ב-60% מהבתים יש מזגן, ב-30% יש מייבש כביסה, וב-20% יש את שניהם. מה ההסתברות שבבית שנבחר אין אף אחד מהמכשירים?

30 בהמשך לתרגיל הקודם: מה ההסתברות שבבית שנבחר יש מזגן אך אין מייבש?

31 $P(A)=p$, $P(B)=2p$, A ו-B זרים ו-$P(A\cup B)=0.6$. מצאו את p.

32 A , B בלתי תלויים ו-$P(A)=P(B)=p$. ידוע ש-$P(A\cap B)=0.16$. מצאו את $P(A\cup B)$.

33 A ו-B בלתי תלויים. הוכיחו ש-$\bar{A}$ ו-B בלתי תלויים, ובדקו עם $P(A)=0.3$, $P(B)=0.5$.

34 שולפים קלף מחפיסה של 52 קלפים. מה ההסתברות לקבל לב **או** מלך?

35 מספר בין 1 ל-20 נבחר באקראי. מה ההסתברות שהוא מתחלק ב-3 או ב-5?

✔ תשובות סופיות – נושא 12.1

1	$\frac{1}{2} = 0.5$
2	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{2}{3}$
4	$\frac{5}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$
7	$\frac{1}{6}$
8	$\frac{3}{4} = 0.75$
9	$\frac{3}{8} = 0.375$
10	$\frac{3}{8} = 0.375$
11	$\frac{7}{10} = 0.7$
12	$\frac{1}{5} = 0.2$
13	$\frac{13}{20} = 0.65$
14	$P(A \cup B) = 0.6$; $P(A \cap B) = 0.1$
15	$\frac{2}{5} = 0.4$
16	בלתי תלויים ($0.4 \cdot 0.5 = 0.2$) ; לא זרים
17	לא – $P(A \cap B) = 0 \neq 0.18$
18	$\frac{3}{10} = 0.3$
19	$\frac{1}{5} = 0.2$
20	$\frac{1}{2} = 0.5$
21	$\frac{1}{5} = 0.2$
22	$\frac{5}{6}$
23	$\frac{2}{3}$

24 $\frac{1}{2} = 0.5$

25 $\frac{3}{5} = 0.6$

26 $\frac{3}{4} = 0.75$

27 לא - $0.5 \cdot 0.6 = 0.3 \neq 0.35$

28 $\frac{3}{20} = 0.15$

29 $\frac{3}{10} = 0.3$

30 $\frac{2}{5} = 0.4$

31 $\frac{1}{5} = 0.2$

32 $\frac{16}{25} = 0.64$

33 $P(\bar{A} \cap B) = 0.35 = 0.7 \cdot 0.5$

34 $\frac{4}{13}$

35 $\frac{9}{20} = 0.45$

12.2 עץ הסתברות והסתברות מותנית

בעץ: כופלים לאורך ענף ומחברים בין ענפים. הסתברות מותנית:
$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ – "ידוע ש..." הוא סימן להסתברות מותנית.

צפו לפני שמתחילים:

הסתברות עם תרשים עץ – המבנה הנכון
YouTube · 2:55

הסתברות מותנית – הסבר ברור לבגרות
YouTube · 3:31

קורס הסתברות – הסתברות מותנית (טבלה)
YouTube · 5:52

1. בכד 4 כדורים אדומים ו-6 לבנים. מוציאים שני כדורים **עם החזרה**. מה ההסתברות ששניהם אדומים?
2. אותו כד: מוציאים שני כדורים **בלי החזרה**. מה ההסתברות ששניהם אדומים?
3. אותו כד, בלי החזרה: מה ההסתברות שהכדורים בצבעים שונים?
4. אותו כד, בלי החזרה: מה ההסתברות שלפחות אחד מהכדורים לבן?
5. אותו כד, בלי החזרה: ידוע שהכדור השני אדום. מה ההסתברות שגם הראשון אדום?
6. ההסתברות שיירד גשם מחר היא 0.3. אם יורד גשם – ההסתברות שדן יאחר היא 0.6, ואם לא – 0.1. מה ההסתברות שדן יאחר?
7. בהמשך: ידוע שדן איחר. מה ההסתברות שירד גשם?
8. בהמשך: מה ההסתברות שירד גשם ודן לא איחר?
9. 40% מהמוצרים מיוצרים במכונה א' ו-60% במכונה ב'. אחוז הפגומים: 5% במכונה א', 2% במכונה ב'. מה ההסתברות שמוצר שנבחר פגום?

10 בהמשך: מוצר שנבחר פגום. מה ההסתברות שיוצר במכונה א'?

11 קלע פוגע במטרה בהסתברות 0.8 בכל ירייה, באופן בלתי תלוי. הוא יורה פעמיים. מה ההסתברות שיפגע לפחות פעם אחת?

12 אותו קלע יורה עד שהוא פוגע, ולכל היותר 3 יריות. מה ההסתברות שיזדקק לשלוש יריות בדיוק?

13 ידוע: $P(A)=0.5$, $P(B|A)=0.4$. חשבו את $P(A\cap B)$.

14 ידוע: $P(A\cap B)=0.12$, $P(B)=0.3$. חשבו את $P(A|B)$.

15 ידוע: $P(A)=0.6$, $P(B)=0.5$, $P(A\cup B)=0.8$. חשבו את $P(A|B)$ ואת $P(B|A)$.

16 A ו-B בלתי תלויים, $P(A)=0.3$. חשבו את $P(A|B)$.

17 ידוע ש-$P(B|A)=P(B)$. מה אפשר לומר על המאורעות A ו-B?

18 ב-70% מהימים דנה נוסעת באוטובוס ובשאר ברכבת. באוטובוס היא מגיעה בזמן בהסתברות 0.8, ברכבת 0.95. מה ההסתברות שתגיע בזמן?

19 בהמשך: דנה איחרה. מה ההסתברות שנסעה ברכבת?

20 בשקית א' 3 סוכריות תות ו-2 לימון; בשקית ב' 1 תות ו-4 לימון. בוחרים שקית באקראי ומוציאים סוכרייה. מה ההסתברות שהיא תות?

21 בהמשך: הסוכרייה היא תות. מה ההסתברות שנבחרה שקית א'?

22 מעבירים כדור אחד באקראי מכד א' (3 לבנים, 1 שחור) לכד ב' (2 לבנים, 2 שחורים), ואז מוציאים כדור מכד ב'. מה ההסתברות שהוא לבן?

23 בהמשך: הכדור שהוצא מכד ב' לבן. מה ההסתברות שהועבר כדור שחור?

24 ההסתברות לנצח במשחק היא 0.6. שחקן משחק עד שהוא מנצח פעמיים, או מפסיד פעמיים (המוקדם מביניהם). מה ההסתברות שינצח פעמיים?

25 בבדיקה רפואית: 2% מהאוכלוסייה נשאים. הבדיקה מזהה נשא בהסתברות 0.9, ונותנת תוצאה חיובית שגויה ללא-נשא בהסתברות 0.05. מה ההסתברות לתוצאה חיובית?

26 בהמשך: התוצאה חיובית. מה ההסתברות שהנבדק נשא?

27 שלושה כדורים בכד: 2 זהובים ו-1 כסוף. מוציאים בזה אחר זה בלי החזרה עד שיוצא הכסוף. מה ההסתברות שהכסוף יצא שלישי?

28 מטילים קובייה. אם יוצא 6 – מטילים מטבע פעמיים, אחרת – פעם אחת. מה ההסתברות שלא יתקבל אף "עץ"?

29 $P(A)=0.4$, $P(B|A)=0.5$, $P(B|\bar{A})=0.25$. חשבו את $P(B)$.

30 בהמשך: חשבו את $P(A|B)$.

31 בהמשך: האם A ו-B בלתי תלויים?

32 $P(B|A)=0.3$ ו-$P(A|B)=0.6$, $P(A\cap B)=0.12$. מצאו את $P(A)$ ואת $P(B)$.

33 בכד n כדורים, מתוכם 2 אדומים. מוציאים 2 בלי החזרה, וההסתברות ששניהם אדומים היא $\frac{1}{15}$. מצאו את n.

34 בכד 3 אדומים ו-k כחולים. מוציאים שניים עם החזרה, וההסתברות ששניהם אדומים היא $\frac{1}{4}$. מצאו את k.

35 40% מהתלמידים בנים. 30% מהבנים ו-50% מהבנות משחקים כדורעף. בוחרים כדורעפן באקראי. מה ההסתברות שהוא בן?

✔ תשובות סופיות – נושא 12.2

1	$\frac{4}{25}=0.16$
2	$\frac{2}{15}$
3	$\frac{8}{15}$
4	$\frac{13}{15}$
5	$\frac{1}{3}$
6	$\frac{1}{4}=0.25$
7	$\frac{18}{25}=0.72$
8	$\frac{3}{25}=0.12$
9	$\frac{4}{125}=0.032$
10	$\frac{5}{8}=0.625$
11	$\frac{24}{25}=0.96$
12	$\frac{1}{25}=0.04$
13	$\frac{1}{5}=0.2$
14	$\frac{2}{5}=0.4$
15	$P(B\|A)=\frac{1}{2}\ ;\ P(A\|B)=0.6$
16	$\frac{3}{10}=0.3$
17	הם בלתי תלויים
18	$\frac{169}{200}=0.845$
19	$\frac{3}{31}$
20	$\frac{2}{5}=0.4$
21	$\frac{3}{4}=0.75$
22	$\frac{11}{20}=0.55$
23	$\frac{2}{11}$

24 $\frac{81}{125} = 0.648$

25 $\frac{67}{1000} = 0.067$

26 $\frac{18}{67}$

27 $\frac{1}{3}$

28 $\frac{11}{24}$

29 $\frac{7}{20} = 0.35$

30 $\frac{4}{7}$

31 לא - $P(B|A) \neq P(B)$

32 $P(B) = 0.2 \ ; \ P(A) = 0.4$

33 $n = 6$

34 $k = 3$

35 $\frac{2}{7}$

12.3 נוסחת ברנולי

ב-n ניסויים בלתי תלויים עם הסתברות הצלחה p: $P(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. "לפחות אחד" – דרך המשלים: $1-P(0)$.

צפו לפני שמתחילים:



קורס הסתברות – נוסחת ברנולי
YouTube · 8:06



הסתברות "לפחות" – איך לפתור בקלות
YouTube · 4:34

1. מטילים מטבע הוגן 5 פעמים. מה ההסתברות לקבל בדיוק 3 פעמים "עץ"?
2. מטילים קובייה 4 פעמים. מה ההסתברות לקבל בדיוק פעמיים 6?
3. מטילים קובייה 4 פעמים. מה ההסתברות לקבל 6 לפחות פעם אחת?
4. קלע פוגע בהסתברות 0.7. הוא יורה 3 יריות. מה ההסתברות שיפגע בדיוק פעמיים?
5. אותו קלע, 3 יריות: מה ההסתברות שיפגע לכל היותר פעם אחת?
6. אותו קלע, 3 יריות: מה ההסתברות שיפגע לפחות פעמיים?
7. ההסתברות שזרע ינבט היא 0.8. שותלים 6 זרעים. מה ההסתברות שבדיוק 5 ינבטו?
8. בהמשך: מה ההסתברות שכל 6 הזרעים ינבטו?
9. בהמשך: מה ההסתברות שלפחות 5 ינבטו?
10. במבחן אמריקאי 5 שאלות, בכל שאלה 4 תשובות. תלמיד מנחש. מה ההסתברות שיענה נכון בדיוק על 2?
11. בהמשך: מה ההסתברות שיענה נכון על כל השאלות?
12. בהמשך: מה ההסתברות שיענה נכון לפחות על שאלה אחת?

13 10% מהנורות פגומות. בוחרים 4 נורות. מה ההסתברות שבדיוק אחת פגומה?

14 בהמשך: מה ההסתברות שאף נורה לא פגומה?

15 מטילים מטבע הוגן 6 פעמים. מה ההסתברות שמספר ה"עץ" שווה למספר ה"פלי"?

16 מטילים מטבע הוגן 4 פעמים. מה ההסתברות שיותר "עץ" מ"פלי"?

17 ההסתברות להצלחה בניסוי היא p. חוזרים על הניסוי 3 פעמים. בטאו באמצעות p את ההסתברות לבדיוק הצלחה אחת.

18 ההסתברות שלא תהיה אף הצלחה ב-2 ניסויים היא 0.09. מצאו את ההסתברות להצלחה בניסוי בודד.

19 ההסתברות להצלחה p. ידוע שההסתברות ל-2 הצלחות ב-2 ניסויים היא 0.36. מהי ההסתברות לבדיוק הצלחה אחת ב-2 ניסויים?

20 כמה פעמים לפחות יש להטיל מטבע הוגן כדי שההסתברות לקבל לפחות "עץ" אחד תהיה גדולה מ-0.9?

21 כמה פעמים לפחות יש להטיל קובייה כדי שההסתברות לקבל לפחות פעם אחת 6 תעלה על $\frac{1}{2}$?

22 קלע פוגע בהסתברות 0.6. מה ההסתברות שבחמש יריות יפגע בדיוק 3 פעמים, ושהפגיעה האחרונה תהיה ביריה החמישית?

23 מטילים קובייה 5 פעמים. מה ההסתברות שה-6 הראשון יופיע בהטלה השלישית?

24 מטילים מטבע הוגן 5 פעמים. מה ההסתברות שיתקבלו בדיוק 3 "עץ", ושהשניים הראשונים יהיו "עץ"?

25 ההסתברות שתלמיד יגיע לשיעור היא 0.9. בשבוע 5 שיעורים. מה ההסתברות שיחסיר בדיוק שיעור אחד?

26 משחק: מטילים קובייה 3 פעמים. מנצחים אם 5 או 6 מופיע בדיוק פעמיים. מה ההסתברות לנצח?

27 בהמשך: משחקים במשחק הזה 2 פעמים. מה ההסתברות לנצח בשני המשחקים?

28 בכד 2 כדורים אדומים ו-3 לבנים. מוציאים כדור, רושמים ומחזירים, 4 פעמים. מה ההסתברות שיוצא אדום בדיוק פעמיים?

29 שילוב עם עץ: בוחרים באקראי אחד משני מטבעות – הוגן, או מטבע שבו ההסתברות ל"עץ" היא 0.8 – ומטילים אותו 2 פעמים. מה ההסתברות לקבל פעמיים "עץ"?

30 בהמשך: התקבלו פעמיים "עץ". מה ההסתברות שנבחר המטבע ההוגן?

31 ב-3 ניסויי ברנולי, ההסתברות ל-3 הצלחות שווה להסתברות ל-0 הצלחות. מצאו את p.

32 ב-4 ניסויים, ההסתברות לבדיוק 1 הצלחה שווה להסתברות לבדיוק 2 הצלחות, כאשר $0 < p < 1$. מצאו את p.

33 מטילים קובייה 6 פעמים. מה ההסתברות לקבל מספר זוגי בדיוק 4 פעמים?

34 25% מהלקוחות קונים מבצע. 4 לקוחות נכנסים. מה ההסתברות שלפחות שניים יקנו?

35 משחקים 3 משחקים; בכל משחק ההסתברות לנצח 0.5. מה ההסתברות לנצח במשחק הראשון ובסך הכול בדיוק פעמיים?

✔ תשובות סופיות – נושא 12.3

1. $\frac{5}{16} = 0.3125$
2. $\frac{25}{216}$
3. $\frac{671}{1296}$
4. $\frac{441}{1000} = 0.441$
5. $\frac{27}{125} = 0.216$
6. $\frac{98}{125} = 0.784$
7. $\frac{6144}{15625} = 0.393216$
8. $\frac{4096}{15625} = 0.262144$
9. $\frac{2048}{3125} = 0.65536$
10. $\frac{135}{512} = 0.263672$
11. $\frac{1}{1024} = 0.000977$
12. $\frac{781}{1024} = 0.762695$
13. $\frac{729}{2500} = 0.2916$
14. $\frac{6561}{10000} = 0.6561$
15. $\frac{5}{16} = 0.3125$
16. $\frac{5}{16} = 0.3125$
17. $3p(1-p)^2$
18. $\frac{7}{10} = 0.7$
19. $\frac{12}{25} = 0.48$
20. 4 פעמים
21. 4 פעמים
22. $\frac{648}{3125} = 0.20736$
23. $\frac{25}{216}$

24 $\frac{3}{32} = 0.09375$

25 $\frac{6561}{20000} = 0.32805$

26 $\frac{2}{9}$

27 $\frac{4}{81}$

28 $\frac{216}{625} = 0.3456$

29 $\frac{89}{200} = 0.445$

30 $\frac{25}{89}$

31 $\frac{1}{2} = 0.5$

32 $\frac{2}{5} = 0.4$

33 $\frac{15}{64} = 0.234375$

34 $\frac{67}{256} = 0.261719$

35 $\frac{1}{4} = 0.25$

פרק 12 סיכומון סוף פרק – הסתברות

מושגי יסוד

- $P(A)$ = מספר התוצאות הרצויות חלקי מספר כל התוצאות (כשהתוצאות שוות סיכוי).
- $0 \le P(A) \le 1$, משלים: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

'או' ו'וגם'

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- מאורעות **זרים**: $P(A \cap B) = 0$, ולכן $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

טבלה דו-ממדית

- שורות וטורים – שני מאפיינים; בכל משבצת 'וגם'.
- סכום כל שורה/טור – הסתברות שולית; סכום הכול 1.

בלתי תלויים

- A, B בלתי תלויים $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- זרים (עם הסתברות חיובית) **אינם** בלתי תלויים!

עץ הסתברות

- לאורך ענף – כופלים; בין ענפים – מחברים.
- סכום ההסתברויות היוצאות מכל צומת $= 1$.
- הוצאה בלי החזרה – ההסתברויות בשלב השני משתנות.

הסתברות מותנית

- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
- 'ידוע ש...' $\Leftarrow$ מכנה = ההסתברות של מה שידוע.

נוסחת ברנולי

- n ניסויים זהים ובלתי תלויים, הסתברות הצלחה p.
- $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
- 'לפחות אחת' $= 1 - (1-p)^n$; 'לכל היותר' – סכום או משלים.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לחבר הסתברויות של מאורעות שאינם זרים בלי להחסיר את החיתוך.
- להתבלבל בין $P(A|B)$ ל-$P(B|A)$.
- בברנולי לשכוח את המקדם $\binom{n}{k}$ (מספר הסדרים).
- להניח אי-תלות בהוצאה בלי החזרה.

💡 **הטיפ של אילון:** בכל שאלה – קודם ציירו עץ או טבלה. רוב הטעויות קורות כשמנסים לחשב 'מהראש' בלי לראות את כל המקרים.

פרק 13

קדם אנליזה

התנהגות של פונקציות לפני שגוזרים – ואיך גרף משתנה כשמזיזים, מותחים ומשקפים אותו

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

13.1 התנהגות פולינום באינסוף וסביב ציר x — 32 תרגילים

13.2 טרנספורמציות מתוך גרף – הזזות, מתיחות, כיווצים ושיקופים — 47 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

קורס קדם אנליזה – התנהגות באינסוף
YouTube · 6:27

קדם אנליזה – התנהגות סביב ציר x
YouTube · 4:09

טרנספורמציות בפונקציות – הזזות, מתיחות ושילובים
YouTube · 12:52

קדם אנליזה – הזזה בציר x
YouTube · 9:22

🎛️ המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף



מעבדת הטרנספורמציות

הזיזו מחוונים של a, b, h, k וראו בזמן אמת איך הופכת $f(x)$ ל- $a \cdot f(b(x-h)) + k$ – כולל הדגמה אוטומטית.



התנהגות פולינום סביב ציר x

שנו שורשים וריבויים (1, 2, 3) וסימן מקדם מוביל – וראו מתי הגרף חותך, משיק או משתטח.

13.1 התנהגות פולינום באינסוף וסביב ציר x

בכל תרגיל: מצאו את נקודות החיתוך עם ציר x (ואת הריבוי של כל שורש), קבעו אם הגרף **חותך**, **משיק** או **חותך בהשתטחות**, ובדקו לאן הגרף הולך כאשר $x \to \infty$ וכאשר $x \to -\infty$. ריבוי אי-זוגי – חותך; ריבוי זוגי – משיק.

צפו לפני שמתחילים:

קדם אנליזה – התנהגות סביב ציר x
YouTube · 4:09

קדם אנליזה – התנהגות באינסוף
YouTube · 6:27

קדם אנליזה – חוקיות פולינומים
YouTube · 8:59

קדם אנליזה – בנייה של פונקציה
YouTube · 6:44

1 $f(x)=(x-1)(x+2)(x-4)$. שלושה שורשים פשוטים – בצעו את כל השלבים וסרטטו סקיצה.

2 $f(x)=-(x+3)(x-2)$. מצאו את נקודות החיתוך עם ציר x ותארו את כיוון הפתיחה של הגרף.

3 $f(x)=(x-2)^2(x+1)$. באיזה שורש הגרף רק נוגע בציר x? סרטטו סקיצה.

4 $f(x)=-2x(x-3)^2$. שימו לב למקדם השלילי: איך הוא משנה את הסקיצה לעומת $2x(x-3)^2$?

5 $f(x)=(x+1)^3(x-2)$. מה ההבדל בין התנהגות הגרף ב-$x=-1$ לבין ההתנהגות ב-$x=2$?

6 $f(x)=x^2(x-3)(x+3)$. מה קורה לגרף בראשית הצירים? סרטטו סקיצה.

7 $f(x)=-(x-1)^2(x+2)^2$. האם יש ערכי x שעבורם $f(x)>0$? נמקו בעזרת ההתנהגות סביב ציר x.

8 $f(x)=x^3-4x$. הוציאו גורם משותף ופרקו לגורמים, ואז תארו את ההתנהגות.

9 $f(x)=x^4-5x^2+4$. פרקו לגורמים בעזרת משתנה עזר $t=x^2$, ואז תארו את ההתנהגות.

10 $f(x)=(2x-1)(x+3)^2$. מצאו את השורש שאינו מספר שלם, וקבעו את המקדם המוביל.

11 $f(x)=-x(x-2)(x+1)(x-4)$. מהי מעלת הפולינום ומה המקדם המוביל? מה זה אומר על שני הקצוות של הגרף?

12 $f(x)=(x^2+1)(x-2)$. כמה נקודות חיתוך עם ציר x יש לגרף? הסבירו מדוע הגורם x^2+1 אינו תורם נקודת חיתוך.

13 $f(x)=(x-3)^4$. תארו את ההתנהגות סביב $x=3$ ובאינסוף. במה הגרף דומה לגרף של $(x-3)^2$?

14 $f(x)=x^3(x-2)^2$. בשורש אחד הגרף משתטח ובשני משיק – זהו כל אחד מהם.

15 $f(x)=-(x+2)^3$. תארו את ההתנהגות סביב ציר x ובאינסוף. האם לפונקציה יש נקודת קיצון?

16 $f(x)=(x^2-9)(x-3)$. כתבו את הפונקציה כמכפלה של גורמים ממעלה ראשונה. איזה שורש "מתחבא" פעמיים?

17 $f(x)=x^3-6x^2+9x$. פרקו לגורמים (גורם משותף ואז כפל מקוצר) ותארו את ההתנהגות.

18 $f(x)=(1-x)(x+2)$. מהו המקדם המוביל? שימו לב לסימן! תארו את ההתנהגות באינסוף.

19 $f(x)=(x+4)(x-1)(x-3)$. בעזרת סקיצה בלבד (ללא טבלה), פתרו את אי-השוויון $f(x)>0$.

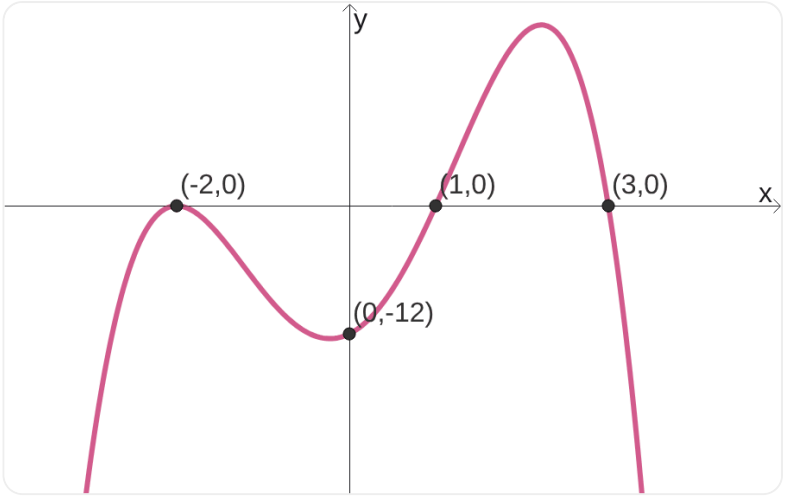
20 $f(x)=-x^2(x-2)$. בעזרת סקיצה, פתרו את אי-השוויון $f(x)\le 0$. שימו לב לנקודה שבה הגרף משיק!

21 $f(x)=(x-1)(x-a)^2$. כמה נקודות חיתוך יש לגרף עם ציר x? בדקו את המקרה $a=1$ בנפרד.

22 $f(x)=x(x+2)(x-a)$. מצאו את a שעבורו הגרף משיק לציר x בנקודה $x=-2$.

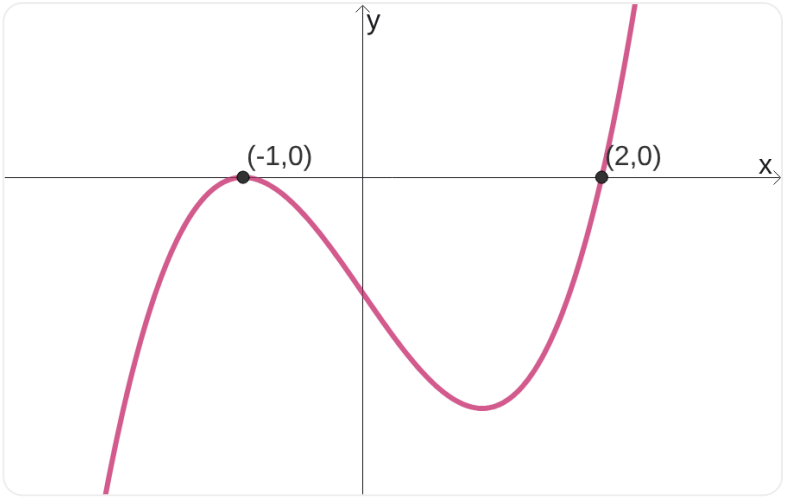
23 מצאו פולינום ממעלה נמוכה ככל האפשר, עם מקדם מוביל חיובי, שחותך את ציר x ב-$x=-1$, משיק לו ב-$x=3$ ועובר בנקודה $(0,18)$.

24 בציור גרף של פולינום ממעלה 4. מצאו את הפונקציה, אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(0,-12)$.



25 איזו מבין הפונקציות הבאות מתאימה לגרף שבציור? נמקו.

(1) $(x+1)(x-2)^2$ (2) $(x+1)^2(x-2)$ (3) $-(x+1)^2(x-2)$ (4) $(x+1)^2(x+2)$



26 $f(x)=(x+3)(x-1)^2(x-4)$. בעזרת סקיצה, פתרו את אי-השוויון $f(x)<0$.

27 $f(x)=x^4-16$. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=0$? פרקו לגורמים והסבירו.

28 $f(x)=-3x^5+100x^4$. תארו את ההתנהגות באינסוף ובמינוס אינסוף. מדוע המקדם 100 אינו משנה את התשובה?

29 $f(x)=x^2(x^2-4)$. הראו שהגרף סימטרי ביחס לציר y, ותארו את ההתנהגות סביב ציר x.

30 $f(x)=(x-1)^3(x+1)^2$. מה מעלת הפולינום? תארו את שני הקצוות ואת ההתנהגות בכל שורש.

31 $f(x)=a(x-1)(x+2)^2$, וידוע ש-$f(0)=-8$. מצאו את a, ותארו את התנהגות הגרף באינסוף.

32 שרטטו סקיצה של פולינום ממעלה 3 שאין לו אף נקודת קיצון, ושחותך את ציר x רק ב-$x=2$. כתבו נוסחה מתאימה.

✔ תשובות סופיות – נושא 13.1

1. $x=-2$ חותך, $x=1$ חותך, $x=4$ חותך ; $f(x)\to\infty$:$x\to\infty$, $f(x)\to\infty$:$x\to-\infty$, $f(x)\to-\infty$

2. $x=-3$ חותך, $x=2$ חותך ; $f(x)\to-\infty$:$x\to\infty$, $f(x)\to-\infty$:$x\to-\infty$; פרבולה בוכה

3. $x=-1$ חותך, $x=2$ משיק ; $f(x)\to\infty$:$x\to\infty$, $f(x)\to-\infty$:$x\to-\infty$

4. $x=0$ חותך, $x=3$ משיק ; $f(x)\to-\infty$:$x\to\infty$, $f(x)\to\infty$:$x\to-\infty$

5. $x=-1$ חותך בהשתטחות, $x=2$ חותך ; $f(x)\to\infty$:$x\to\infty$, $f(x)\to\infty$:$x\to-\infty$

6. $x=-3$ חותך, $x=0$ משיק, $x=3$ חותך ; $f(x)\to\infty$:$x\to\infty$, $f(x)\to\infty$:$x\to-\infty$

7. $x=-2$ משיק, $x=1$ משיק ; $f(x)\to-\infty$:$x\to\infty$, $f(x)\to-\infty$:$x\to-\infty$; לא - $f(x)\le 0$ לכל x

8. $x(x-2)(x+2)$; $x=-2$ חותך, $x=0$ חותך, $x=2$ חותך ; $f(x)\to\infty$:$x\to\infty$, $f(x)\to-\infty$:$x\to-\infty$

9. $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$; $x=-2$ חותך, $x=-1$ חותך, $x=1$ חותך, $x=2$ חותך ; $f(x)\to\infty$:$x\to\infty$, $f(x)\to\infty$:$x\to-\infty$

10. $x=-3$ משיק, $x=\frac{1}{2}$ חותך ; $f(x)\to\infty$:$x\to\infty$, $f(x)\to-\infty$:$x\to-\infty$

11. מעלה 4, מקדם מוביל -1 ; $x=-1$ חותך, $x=0$ חותך, $x=2$ חותך, $x=4$ חותך ; $f(x)\to-\infty$:$x\to\infty$, $f(x)\to-\infty$:$x\to-\infty$

12. $x=2$ חותך ; $f(x)\to\infty$:$x\to\infty$, $f(x)\to-\infty$:$x\to-\infty$; $x^2+1>0$ תמיד

13. $x=3$ משיק ; $f(x)\to\infty$:$x\to\infty$, $f(x)\to\infty$:$x\to-\infty$; שניהם משיקים ב-$x=3$ ופתוחים כלפי מעלה

14. $x=0$ חותך בהשתטחות, $x=2$ משיק ; $f(x)\to\infty$:$x\to\infty$, $f(x)\to-\infty$:$x\to-\infty$

15. $x=-2$ חותך בהשתטחות ; $f(x)\to-\infty$:$x\to\infty$, $f(x)\to\infty$:$x\to-\infty$; אין קיצון (פונקציה יורדת)

16. $(x-3)^2(x+3)$; $x=-3$ חותך, $x=3$ משיק ; $f(x)\to\infty$:$x\to\infty$, $f(x)\to-\infty$:$x\to-\infty$

17	$x(x-3)^2$; $x=0$ חותך, $x=3$ משיק ; $x\to\infty: f(x)\to\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to-\infty$
18	מקדם מוביל -1 ; $x=-2$ חותך, $x=1$ חותך ; $x\to\infty: f(x)\to-\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to-\infty$
19	$-4<x<1$ או $x>3$
20	$x=0$ או $x\geq 2$
21	$a\neq 1$: שתי נקודות ($x=1$ חותך, $x=a$ משיק) ; $a=1$: נקודה אחת – $x=1$, חותך בהשתטחות
22	$a=-2$
23	$f(x)=2(x+1)(x-3)^2$
24	$f(x)=-(x+2)^2(x-1)(x-3)$
25	(2)
26	$-3<x<1$ או $1<x<4$
27	שני פתרונות: $x=\pm 2$; $(x-2)(x+2)(x^2+4)$
28	$x\to\infty: f(x)\to-\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to\infty$; החזקה הגבוהה קובעת
29	$x=-2$ חותך, $x=0$ משיק, $x=2$ חותך ; $x\to\infty: f(x)\to\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to\infty$; $f(-x)=f(x)$
30	$x=-1$ משיק, $x=1$ חותך בהשתטחות ; $x\to\infty: f(x)\to\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to-\infty$
31	$a=2$; $x\to\infty: f(x)\to\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to-\infty$
32	לדוגמה $f(x)=(x-2)^3$ (או $-(x-2)^3$)

13.2 טרנספורמציות מתוך גרף – הזזות, מתיחות, כיווצים ושיקופים

הפונקציה $f(x)$ נתונה רק בעזרת גרף – אין לה נוסחה. כל המידע נלקח מהציור. תזכורת: $f(x)+k$ – הזזה אנכית; $f(x-h)$ – הזזה אופקית ($h>0$ ימינה!); $a\cdot f(x)$ – מתיחה/כיווץ אנכי; $f(bx)$ – כיווץ/מתיחה אופקי; $-f(x)$ – שיקוף בציר x; $f(-x)$ – שיקוף בציר y.

צפו לפני שמתחילים:

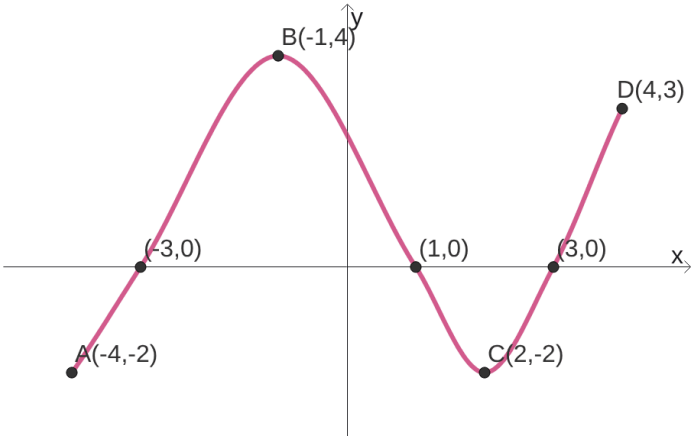
טרנספורמציות בפונקציות – הזזות, מתיחות ושילובים
YouTube · 12:52

חקירת פונקציה – סעיפי חשיבה (הזזות)
YouTube · 8:32

קדם אנליזה – הזזה בציר x
YouTube · 9:22

פרבולה – הזזה אנכית
YouTube · 8:39

תרגילים 1–11 בציור שלפניכם גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $-4\le x\le 4$. בכל תרגיל נתונה פונקציה $g(x)$ שהתקבלה מ-$f(x)$.



גרף הפונקציה $f(x)$

1 $g(x)=f(x)+2$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ (כולל נקודות קצה) וקבעו את סוגן.

2 $g(x)=f(x)-4$. מצאו את נקודת החיתוך של $g(x)$ עם ציר x. האם הגרף חותך את הציר או משיק לו?

3 $g(x)=f(x-2)$. מהו תחום ההגדרה של $g(x)$?

4 $g(x)=f(x+3)$. מצאו את נקודות החיתוך של $g(x)$ עם ציר x.

5 $g(x)=2f(x)$. מהו תחום הערכים (הטווח) של $g(x)$?

6 $g(x)=-f(x)$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ (כולל נקודות קצה) וקבעו את סוגן.

7 $g(x)=f(-x)$. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

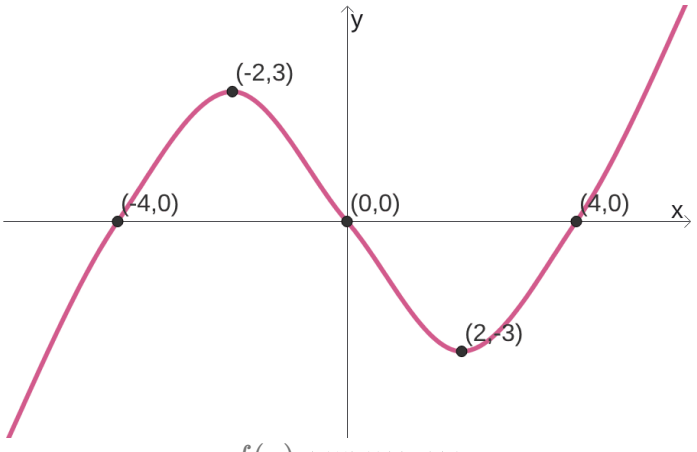
8 $g(x)=f(2x)$. מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$ ואת נקודות הקיצון שלה (כולל נקודות קצה).

9 $g(x)=f(x)-1$. כמה נקודות חיתוך יש ל-$g(x)$ עם ציר x? נמקו בעזרת הגרף.

10 $g(x)=f(x+1)$. מצאו את נקודת החיתוך של $g(x)$ עם ציר y.

11 ידוע ש-$g(x)=f(x-c)$, והנקודה $B(-1,4)$ עברה לנקודה $(2,4)$. מצאו את c ואת הנקודה שאליה עברה $C(2,-2)$.

תרגילים 12–19 בציור שלפניכם גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. מימין ומשמאל הגרף ממשיך לעלות ולרדת בהתאמה לאינסוף.



גרף הפונקציה $f(x)$

12 $g(x)=f(x)+3$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגן.

13 $g(x)=f(x-4)$. מצאו את נקודות החיתוך של $g(x)$ עם ציר x.

14 $g(x)=f(x)+k$. מצאו את ערכי k שעבורם אחת מנקודות הקיצון של $g(x)$ נמצאת על ציר x.

15 $g(x)=-f(x)+1$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגן.

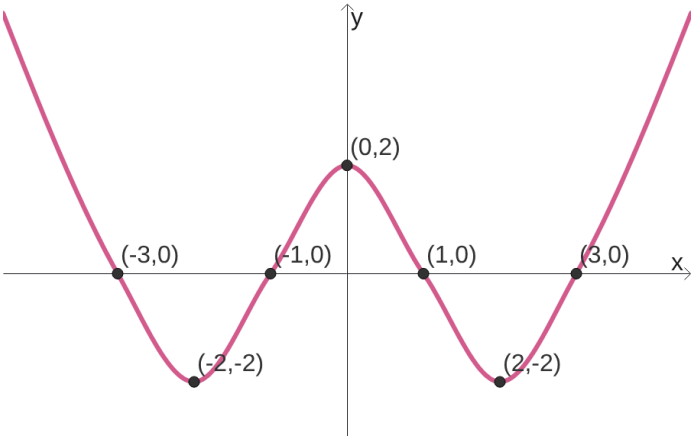
16 $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)$. מצאו את נקודות החיתוך עם ציר x ואת נקודות הקיצון של $g(x)$.

17 $g(x)=\frac{1}{2}f(x)$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$. אילו נקודות של $f(x)$ לא זזו כלל?

18 מצאו את נקודות הקיצון של $f(-x)$ ושל $-f(x)$. מה אתם מגלים? הסבירו מדוע.

19 פתרו את אי-השוויון $f(x-1)>0$.

תרגילים 20–26 בציור שלפניכם גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. בשני הקצוות הגרף עולה לאינסוף.



גרף הפונקציה $f(x)$

20 $g(x)=f(x)+2$. מצאו את נקודות החיתוך של $g(x)$ עם ציר x. האם הגרף חותך או משיק?

21 $g(x)=f(x)-2$. כמה נקודות חיתוך יש ל-$g(x)$ עם ציר x? מצאו את זו שאפשר לדעת במדויק.

22 $g(x)=f(x+2)$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגן.

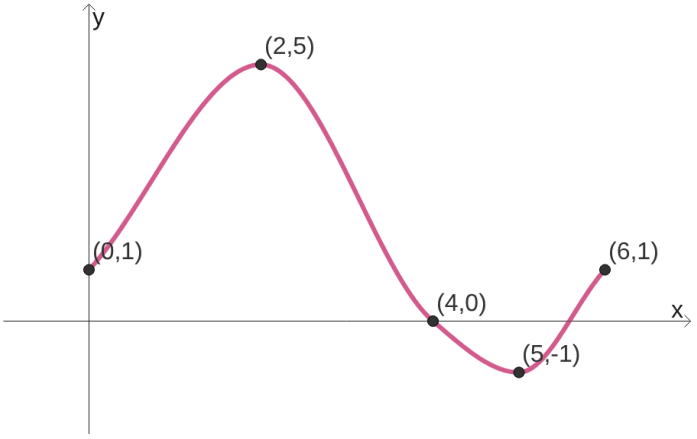
23 $g(x)=3f(x)$. מהו תחום הערכים של $g(x)$?

24 $g(x)=f(x)+k$. לאילו ערכי k הפונקציה $g(x)$ חיובית לכל x?

25 $g(x)=f(2x)$. מצאו את נקודות החיתוך של $g(x)$ עם ציר x.

26 $g(x)=-f(x)$. מהו תחום הערכים של $g(x)$, ומה נקודת הקיצון הנמוכה ביותר שלה?

תרגילים 27–32 בציור שלפניכם גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $0\le x\le 6$.



גרף הפונקציה $f(x)$

27 $g(x)=f(x-3)+1$. מצאו את תחום ההגדרה ואת תחום הערכים של $g(x)$.

28 $g(x)=f(-x)$. מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$ ואת נקודות הקיצון שלה (כולל נקודות קצה).

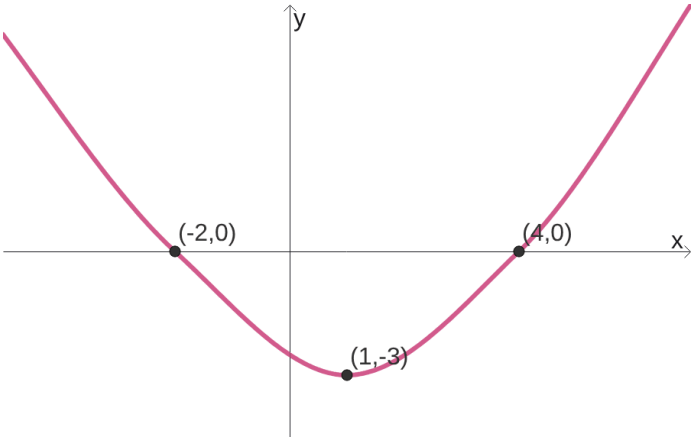
29 $g(x)=f(x)+a$. מצאו את a אם ידוע שגרף $g(x)$ עובר בראשית הצירים.

30 $g(x)=f(x+a)$, ונקודת המקסימום של $g(x)$ היא $(-1,5)$. מצאו את a.

31 $g(x)=a\cdot f(x)$ כאשר $a>0$, וערך המקסימום של $g(x)$ הוא 10. מצאו את a ואת נקודת המינימום הפנימית של $g(x)$.

32 $g(x)=f(x-2)$. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

תרגילים 33–37 בציור שלפניכם גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. בשני הקצוות הגרף עולה לאינסוף.



גרף הפונקציה $f(x)$

33 $g(x)=f(x)+3$. מצאו את נקודת החיתוך של $g(x)$ עם ציר x.

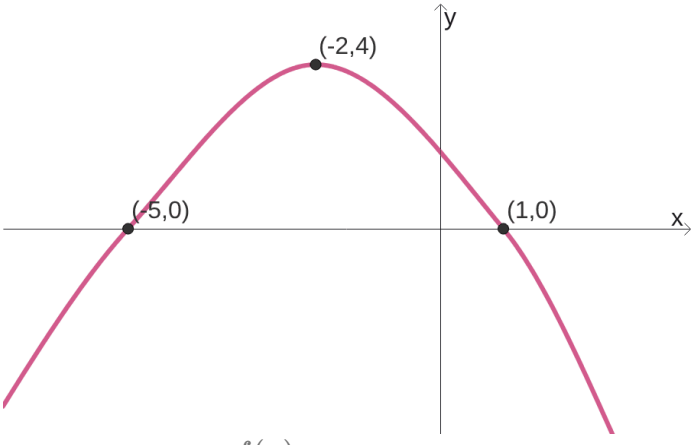
34 $g(x)=f(x+2)-1$. מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגה.

35 $g(x)=-2f(x)$. מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגה.

36 פתרו את אי-השוויון $f(x+1)\le 0$.

37 $g(x)=f(x)$ ו-$h(x)=f(x-6)$. מצאו את נקודת החיתוך היחידה בין שני הגרפים (רמז: היעזרו בתחומי העלייה והירידה).

תרגילים 38–41 בציור שלפניכם גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. בשני הקצוות הגרף יורד למינוס אינסוף.



גרף הפונקציה $f(x)$

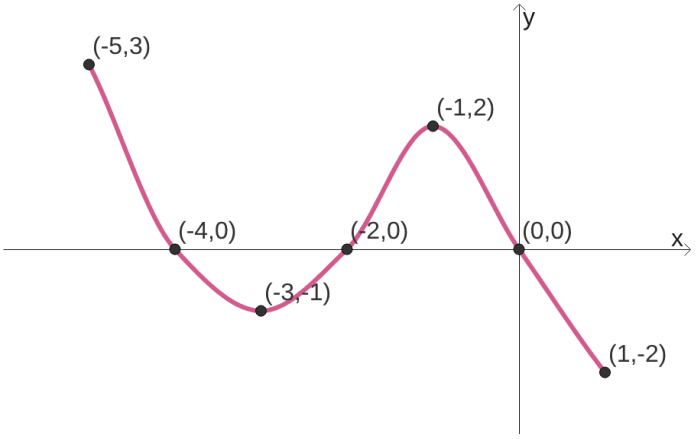
38 $g(x)=f(x)-4$. מצאו את נקודת החיתוך של $g(x)$ עם ציר x.

39 $g(x)=f(-x)+1$. מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגה.

40 $g(x)=f(x+h)$. מצאו את h שעבורו נקודות החיתוך של $g(x)$ עם ציר x סימטריות ביחס לציר y.

41 לאילו ערכי k יש למשוואה $f(x)=k$ בדיוק שני פתרונות? ובדיוק פתרון אחד?

תרגילים 42–47 בציור שלפניכם גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $-5\le x\le 1$.



גרף הפונקציה $f(x)$

42 $g(x)=f(x)+1$. מהו תחום הערכים של $g(x)$?

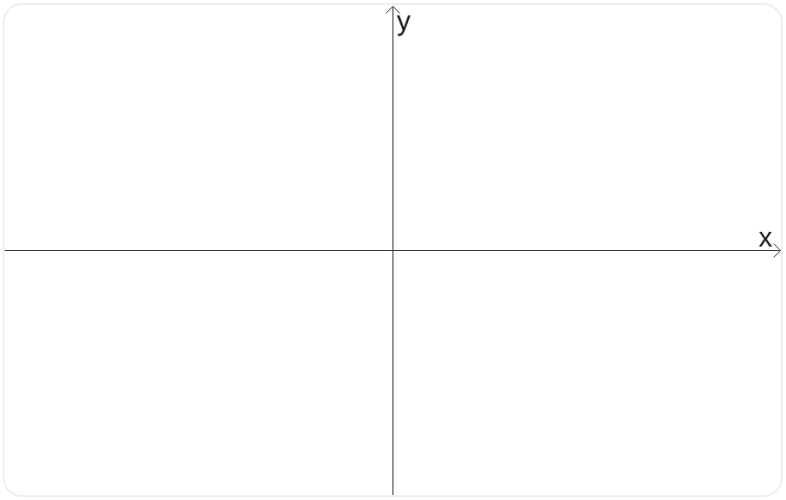
43 $g(x)=f(x+4)$. מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$ ואת נקודות החיתוך שלה עם ציר x.

44 $g(x)=-f(x+1)$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ (כולל נקודות קצה) וקבעו את סוגן.

45 $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)$. מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$ ואת נקודות החיתוך שלה עם ציר x.

46 ידוע ש-$g(x)=a\cdot f(x)$, והנקודה $(-1,2)$ עברה לנקודה $(-1,-6)$. מצאו את a, ואת הנקודה שאליה עברה $(-3,-1)$. איזה סוג קיצון היא ב-$g(x)$?

47 סרטטו במערכת הצירים הריקה סקיצה של $g(x)=f(x-1)+2$. סמנו על הסקיצה את כל הנקודות המיוחדות.



✔ תשובות סופיות – נושא 13.2

1. $(-4,0)$ מינימום (קצה), $(-1,6)$ מקסימום, $(2,0)$ מינימום, $(4,5)$ מקסימום (קצה)
2. $(-1,0)$ – הגרף משיק לציר x (המקסימום עלה על הציר)
3. $-2 \le x \le 6$
4. $(-6,0)$, $(-2,0)$, $(0,0)$
5. $-4 \le y \le 8$
6. $(-4,2)$ מקסימום (קצה), $(-1,-4)$ מינימום, $(2,2)$ מקסימום, $(4,-3)$ מינימום (קצה)
7. עלייה: $-2 < x < 1$; ירידה: $-4 < x < -2$, $1 < x < 4$
8. $-2 \le x \le 2$; $(-2,-2)$ מינימום (קצה), $(-\frac{1}{2},4)$ מקסימום, $(1,-2)$ מינימום, $(2,3)$ מקסימום (קצה)
9. 3 נקודות (הישר $y=1$ חותך את גרף $f(x)$ שלוש פעמים)
10. $(0,0)$, כי $g(0)=f(1)=0$
11. $c=3$; $(5,-2)$
12. $(-2,6)$ מקסימום, $(2,0)$ מינימום
13. $(0,0)$, $(4,0)$, $(8,0)$
14. $k=-3$ או $k=3$
15. $(-2,-2)$ מינימום, $(2,4)$ מקסימום
16. $(-8,0)$, $(0,0)$, $(8,0)$; $(-4,3)$ מקסימום, $(4,-3)$ מינימום
17. $(-2,\frac{3}{2})$ מקסימום, $(2,-\frac{3}{2})$ מינימום ; נקודות החיתוך עם ציר x לא זזו
18. לשתיהן: $(2,3)$ מקסימום, $(-2,-3)$ מינימום – הגרף סימטרי ביחס לראשית
19. $-3 < x < 1$ או $x > 5$
20. $(-2,0)$ ו-$(2,0)$ – משיק בשתיהן
21. 3 נקודות; המדויקת: $(0,0)$
22. $(-4,-2)$ מינימום, $(-2,2)$ מקסימום, $(0,-2)$ מינימום

23 $y \geq -6$

24 $k > 2$

25 $(-\frac{3}{2},0)$, $(-\frac{1}{2},0)$, $(\frac{1}{2},0)$, $(\frac{3}{2},0)$

26 $y \leq 2$; $(0,-2)$ מינימום

27 $3 \leq x \leq 9$; $0 \leq y \leq 6$

28 $-6 \leq x \leq 0$; $(-6,1)$ מקסימום (קצה), $(-5,-1)$ מינימום, $(-2,5)$ מקסימום, $(0,1)$ מינימום (קצה)

29 $a = -1$

30 $a = 3$

31 $a = 2$; $(5,-2)$

32 עלייה: $2 < x < 4$, $7 < x < 8$; ירידה: $4 < x < 7$

33 $(1,0)$ – משיק

34 $(-1,-4)$ מינימום

35 $(1,6)$ מקסימום

36 $-3 \leq x \leq 3$

37 $(4,0)$

38 $(-2,0)$ – משיק

39 $(2,5)$ מקסימום

40 $h = -2$ (כלומר $g(x) = f(x-2)$, והחיתוכים $(\pm 3,0)$)

41 שני פתרונות: $k < 4$; פתרון אחד: $k = 4$

42 $-1 \leq y \leq 4$

43 $-9 \leq x \leq -3$; $(-8,0)$, $(-6,0)$, $(-4,0)$

44 $(-6,-3)$ מינימום (קצה), $(-4,1)$ מקסימום, $(-2,-2)$ מינימום, $(0,2)$ מקסימום (קצה)

45 $-10 \leq x \leq 2$; $(-8,0)$, $(-4,0)$, $(0,0)$

46 $a = -3$; $(-3,3)$ – מקסימום

47 נקודות: $(-4,5)$, $(-3,2)$, $(-2,1)$, $(-1,2)$, $(0,4)$, $(1,2)$, $(2,0)$

פרק 13 סיכומון סוף פרק – קדם אנליזה

התנהגות באינסוף

- קובע רק האיבר עם החזקה הגבוהה: $a\,x^n$.
- n זוגי: שני הקצוות לאותו כיוון – למעלה אם $a>0$, למטה אם $a<0$.
- n אי-זוגי: הקצוות בכיוונים הפוכים – $a>0$: משמאל למטה, מימין למעלה.

התנהגות סביב ציר x

- ריבוי 1 – הגרף **חותך** את הציר.
- ריבוי 2 (זוגי) – הגרף **משיק** לציר ומסתובב.
- ריבוי 3 (אי-זוגי ≥ 3) – **חותך בהשתטחות**.
- גורם כמו x^2+1 אינו מוסיף נקודות חיתוך.

מנוסחה לסקיצה – 4 צעדים

- פירוק לגורמים (גורם משותף, כפל מקוצר, טרינום, משתנה עזר).
- סימון השורשים והריבוי של כל אחד.
- קביעת הקצוות לפי המעלה והמקדם המוביל.
- חיבור הקצוות דרך השורשים לפי כללי הריבוי.

מסקיצה לנוסחה

- כל שורש r נותן גורם $(x-r)^m$ לפי סוג המגע.
- את המקדם a מוצאים מנקודה נוספת, למשל $f(0)$.

הזזות

- $f(x)+k$ – למעלה k ($k<0$ למטה). x לא משתנה.
- $f(x-h)$ – ימינה h ($f(x+h)$ שמאלה). y לא משתנה.
- נקודה: $(x,y)\to(x+h,\ y+k)$.

מתיחות, כיווצים ושיקופים

- $a\cdot f(x)$: $(x,y)\to(x,\ ay)$ – החיתוכים עם ציר x לא זזים.
- $f(bx)$: $(x,y)\to\left(\frac{x}{b},\ y\right)$ – החיתוך עם ציר y לא זז.
- $-f(x)$: שיקוף בציר x – מקסימום הופך למינימום.
- $f(-x)$: שיקוף בציר y – עלייה הופכת לירידה.

מה משתנה ומה לא?

- תחום הגדרה זז רק בהזזה/מתיחה **אופקית**.
- תחום ערכים זז רק בהזזה/מתיחה **אנכית**.
- מספר נקודות הקיצון לא משתנה – רק המיקום (והסוג בשיקוף אנכי).

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- $f(x-2)$ זז **ימינה**, לא שמאלה!
- $f(2x)$ **מכווץ** פי 2 – מחלקים את ה-x ב-2, לא מכפילים.
- בשיקוף $-f(x)$ לשכוח להחליף את סוג הקיצון.
- לשכוח שגורם בריבוע ($(x-3)^2$) נותן השקה ולא חיתוך.

💡 **הטיפ של אילון:** בכל טרנספורמציה – אל תנסו לדמיין את כל הגרף. קחו את הנקודות המיוחדות, הזיזו כל אחת לפי הכלל, ורק אז חברו ביניהן.

פרק 14

מתחילים לחקור!

הנגזרת, המשיק, נקודות קיצון וחקירה מלאה של פולינום – ומציאת פרמטרים

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

14.1 נגזרת וכללי גזירה — 38 תרגילים

14.2 משיק לפונקציה — 34 תרגילים

14.3 נקודות קיצון וחקירה מלאה של פולינום — 33 תרגילים

14.4 מציאת פרמטרים בפולינום — 33 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

נגזרת – מבוא והגיון
YouTube · 11:03

משיק לפונקציה – הסבר ותרגול שלב אחר שלב
YouTube · 10:23

חקירת פונקציית פולינום
YouTube · 11:51

איך מוצאים פרמטר בפונקציה? כל השיטות
YouTube · 6:41

🎛️ המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

המשיק הנע

גררו נקודה לאורך הגרף וראו את המשיק ואת השיפוע שלו – הנגזרת בנקודה – בזמן אמת.

14.1 נגזרת וכללי גזירה

כלל החזקה: $(x^n)' = nx^{n-1}$, נגזרת של קבוע היא 0, ונגזרת של $a \cdot x$ היא a. את $f'(a)$ מחשבים בהצבה בנגזרת – זה שיפוע הגרף בנקודה.

צפו לפני שמתחילים:



נגזרת – מבוא והגיון
YouTube · 11:03



נגזרת פולינום
YouTube · 11:51



כל סוגי הנגזרות – דף סיכום מלא
YouTube · 14:09

1. $f(x) = x^5$. גזרו את $f(x)$ (חזקה בודדת).
2. $f(x) = 7x^3$. גזרו את $f(x)$ (מקדם מספרי).
3. $f(x) = 9 - 4x^2$. גזרו את $f(x)$ (פולינום ממעלה שנייה עם קבוע).
4. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 8$. גזרו את $f(x)$ (פולינום ממעלה רביעית).
5. $f(x) = \frac{x^6}{2}$. גזרו את $f(x)$ (מקדם שבר).
6. $f(x) = -x^3 + \frac{3x^2}{4}$. גזרו את $f(x)$ (מקדמים שליליים ושבר).
7. $f(x) = 12$. גזרו את $f(x)$ (פונקציה קבועה).
8. $f(x) = 5x - 3$. גזרו את $f(x)$ (פונקציה קווית).
9. $f(x) = \frac{x^7}{7} + \frac{x^2}{2}$. גזרו את $f(x)$ (מקדמים שהם הופכי החזקה).
10. $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 10$. גזרו את $f(x)$ (שימו לב לקבוע).

11 $f(x)=\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x$. גזרו את $f(x)$ (שלושה איברים עם שברים).

12 $f(x)=(x+3)(x-2)$. פתחו סוגריים ואז גזרו.

13 $f(x)=(2x-1)^2$. פתחו לפי נוסחת הכפל המקוצר ואז גזרו.

14 $f(x)=x^2(x^2-4x)$. פתחו ואז גזרו.

15 $f(x)=\frac{x^3-6x}{3}$. פצלו לשני שברים ואז גזרו.

16 $f(x)=\frac{1}{x}$. כתבו כחזקה שלילית וגזרו.

17 $f(x)=\frac{4}{x^2}$. כתבו כחזקה שלילית וגזרו.

18 $f(x)=\sqrt{x}$. כתבו כחזקה $x^{\frac{1}{2}}$ וגזרו.

19 $f(x)=x^3-2x^2+5$. חשבו את $f'(2)$.

20 $f(x)=-x^4+3x$. חשבו את $f'(-1)$.

21 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$. חשבו את $f'(0)$ ואת $f'(3)$. מה המשמעות של התוצאה?

22 $f(x)=x^2-6x+1$. מצאו את ערך ה-x שבו $f'(x)=0$.

23 $f(x)=x^3-12x$. מצאו את ערכי ה-x שבהם $f'(x)=0$.

24 $f(x)=2x^3+3x^2-36x$. מצאו את ערכי ה-x שבהם $f'(x)=0$.

25 $f(x)=x^3+3x$. הראו ש-$f'(x)>0$ לכל x.

26 $f(x)=x^2+4x$. מצאו את x שבו שיפוע הגרף הוא 10.

27 $f(x)=x^3$. מצאו את ערכי x שבהם שיפוע הגרף הוא 12.

28 $f(x)=x^4$. מצאו את הנקודה על גרף $f(x)$ שבה השיפוע הוא -32.

29 $f(x)=x^2-5x$. מצאו את הנקודה שבה שיפוע הגרף שווה לשיפוע הישר $y=3x+7$.

30 $f(x)=x^2$. חשבו את $f'(x)$ לפי ההגדרה $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

31 $f(x)=3x+1$. חשבו את $f'(x)$ לפי ההגדרה, והסבירו את התוצאה.

32 $f(x)=x^2+x$. חשבו לפי ההגדרה את $f'(2)$.

33 $f(x)=ax^2+5x$, וידוע ש-$f'(1)=11$. מצאו את a.

34 $f(x)=x^3+bx$, וידוע ש-$f'(2)=f'(-2)$. האם אפשר למצוא את b? הסבירו.

35 $f(x)=x^3-3x^2$. פתרו את אי-השוויון $f'(x)<0$.

36 $f(x)=x^4-8x^2$. מצאו את כל ערכי x שבהם $f'(x)=0$.

37 $f(x)=x^5-x$. חשבו את $f'(1)-f'(-1)$.

38 $f(x)=(x^2+1)^2$. פתחו, גזרו, ובדקו ש-$f'(1)=8$.

✔ תשובות סופיות – נושא 14.1

1	$f'(x)=5x^4$
2	$f'(x)=21x^2$
3	$f'(x)=-8x$
4	$f'(x)=4x^3-6x+2$
5	$f'(x)=3x^5$
6	$f'(x)=-3x^2+\frac{3x}{2}$
7	$f'(x)=0$
8	$f'(x)=5$
9	$f'(x)=x^6+x$
10	$f'(x)=10x^4-20x^3$
11	$f'(x)=2x^2-x+1$
12	$f'(x)=2x+1$
13	$f'(x)=8x-4$
14	$f'(x)=4x^3-12x^2$
15	$f'(x)=x^2-2$
16	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
17	$f'(x)=-\frac{8}{x^3}$
18	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
19	4
20	7
21	$f'(0)=0$, $f'(3)=3$; ב-$x=0$ השיפוע אפס
22	$x=3$

23 $x = \pm 2$

24 $x = 2\ ,x = -3$

25 $f'(x) = 3x^2 + 3 \geq 3 > 0$

26 $x = 3$

27 $x = \pm 2$

28 $(-2, 16)$

29 $(4, -4)$

30 $f'(x) = 2x$

31 $f'(x) = 3$ – שיפוע הישר

32 $f'(2) = 5$

33 $a = 3$

34 לא – השוויון מתקיים לכל b ($f'(x) = 3x^2 + b$ זוגית)

35 $0 < x < 2$

36 $x = 0\ ,x = \pm 2$

37 0

38 $f'(x) = 4x^3 + 4x\ ;\ f'(1) = 8$

14.2 משיק לפונקציה

שלושה דברים למשיק: נקודת ההשקה $(x_0, f(x_0))$, השיפוע $m = f'(x_0)$, ומשוואת הישר $y - y_0 = m(x - x_0)$. ישרים מקבילים – שיפועים שווים; מאונכים – מכפלת השיפועים -1.

צפו לפני שמתחילים:

משיק לפונקציה – הסבר ותרגול שלב אחר שלב
YouTube · 10:23

משיק לפונקציה
YouTube · 9:21

1. $f(x) = x^2$. מצאו את משוואת המשיק לגרף בנקודה שבה $x = 3$.
2. $f(x) = x^3 - 2x$. מצאו את משוואת המשיק בנקודה $x = 1$.
3. $f(x) = x^2 - 4x + 5$. מצאו את משוואת המשיק בנקודת הקיצון של הפונקציה. מה מיוחד בו?
4. $f(x) = -x^2 + 6x$. מצאו את משוואת המשיק בנקודת החיתוך של הגרף עם ציר y.
5. $f(x) = x^2 - 9$. מצאו את משוואות המשיקים בנקודות החיתוך של הגרף עם ציר x.
6. $f(x) = x^3$. מצאו את משוואת המשיק בנקודה שבה $x = -1$.
7. $f(x) = x^2 + 2x$. מצאו את משוואת המשיק שהשיפוע שלו 6.
8. $f(x) = x^2 - 3x$. מצאו את משוואת המשיק המקביל לישר $y = x + 4$.
9. $f(x) = x^3 - 3x$. מצאו את משוואות המשיקים המקבילים לישר $y = 9x$.
10. $f(x) = x^2$. מצאו את משוואת המשיק המאונך לישר $y = -\frac{1}{4}x + 1$.
11. $f(x) = x^3 - 6x^2$. מצאו את הנקודות שבהן המשיק לגרף אופקי.

12 $f(x)=x^2-4x$. המשיק לגרף בנקודה $x=3$ חותך את ציר x. מצאו את נקודת החיתוך.

13 $f(x)=-x^2+4$. המשיק בנקודה $x=1$ חותך את הצירים. חשבו את שטח המשולש שהמשיק יוצר עם הצירים.

14 $f(x)=x^3+1$. בנקודה A על הגרף שיפוע המשיק הוא 3, ו-A ברביע הראשון. מצאו את A ואת משוואת המשיק.

15 $f(x)=x^2+1$. מהנקודה $(0,0)$ מעבירים משיקים לגרף. מצאו את נקודות ההשקה.

16 $f(x)=x^2$. מצאו את משוואות המשיקים לגרף שעוברים דרך הנקודה $(1,-3)$ (שאינה על הגרף).

17 הישר $y=2x+k$ משיק לגרף $f(x)=x^2$. מצאו את k ואת נקודת ההשקה.

18 הישר $y=-4x+b$ משיק לגרף $f(x)=x^2-2x$. מצאו את b.

19 $f(x)=ax^2$, והמשיק לגרף בנקודה $x=2$ הוא $y=12x-12$. מצאו את a.

20 $f(x)=x^3-3x^2+2$. מצאו את הנקודה שבה שיפוע המשיק הוא הקטן ביותר, ואת משוואת המשיק בה.

21 $f(x)=x^2-2x$ ו-$g(x)=-x^2+2x$. הראו שבנקודה $x=1$ המשיקים לשני הגרפים מקבילים, ומצאו את המשוואות.

22 $f(x)=x^2$ ו-$g(x)=x^3$. באילו ערכי x המשיקים לשני הגרפים מקבילים?

23 $f(x)=x^2+3$. המשיק בנקודה $x=a$ עובר בראשית הצירים. מצאו את a.

24 $f(x)=\frac{1}{4}x^4$. מצאו את משוואת המשיק בנקודה $x=2$, ובדקו אם הוא עובר בנקודה $(1,-4)$.

25 $f(x)=x^3-x$. המשיק בנקודה $x=1$ חותך את הגרף בנקודה נוספת. מצאו אותה.

26 $f(x)=x^2-6x+8$. מצאו את משוואת המשיק בנקודה שבה $f(x)=3$ ו-$x>3$.

27 $f(x)=2x^2$. מצאו את הנקודה על הגרף שבה המשיק יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר x.

28 $f(x)=x^3$. מצאו את משוואות המשיקים בנקודות $x=1$ ו-$x=-1$. מה אפשר לומר עליהם?

29 $f(x)=x^2-4$. המשיקים בנקודות החיתוך עם ציר x נחתכים בנקודה C. מצאו את C.

30 $f(x)=x^3-3x+2$. מצאו את משוואת המשיק בנקודת הקיצון שבה $x<0$.

31 $f(x)=-x^3+3x^2$. מצאו את משוואת המשיק שהשיפוע שלו הגדול ביותר.

32 $f(x)=x^2+bx+c$. המשיק לגרף בנקודה $(1,4)$ הוא $y=5x-1$. מצאו את b ואת c.

33 $f(x)=x^4-2x^2$. מצאו את כל הנקודות שבהן המשיק לגרף מקביל לציר x.

34 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$. מצאו את משוואות המשיקים שהשיפוע שלהם 3.

✔ תשובות סופיות – נושא 14.2

1	$y=6x-9$
2	$y=x-2$
3	$y=1$ – משיק אופקי
4	$y=6x$
5	$y=6x-18$; $y=-6x-18$
6	$y=3x+2$
7	$y=6x-4$
8	$y=x-4$
9	$y=9x-16$; $y=9x+16$
10	$y=4x-4$
11	$(0,0)$,$(4,-32)$
12	$(\frac{9}{2},0)$
13	$\frac{25}{4}$
14	$y=3x-1$; $A(1,2)$
15	$(1,2)$,$(-1,2)$
16	$y=6x-9$; $y=-2x-1$
17	$(1,1)$; $k=-1$
18	$b=-1$
19	$a=3$
20	$y=3-3x$; $(1,0)$
21	$y=-1$ ו- $y=1$ (שניהם אופקיים)
22	$x=0$ או $x=\frac{2}{3}$
23	$a=\pm\sqrt{3}$

24 כן ; $y=8x-12$

25 $(-2,-6)$

26 $y=4x-17$

27 $(\frac{1}{4},\frac{1}{8})$

28 $y=3x-2$ ו- $y=3x+2$ – המשיקים מקבילים

29 $C(0,-8)$

30 $y=4$

31 $y=3x-1$

32 $b=3$,$c=0$

33 $(0,0)$,$(1,-1)$,$(-1,-1)$

34 $y=3x-\frac{16}{3}$; $y=3x+\frac{16}{3}$

14.3 נקודות קיצון וחקירה מלאה של פולינום

מוצאים $f'(x)=0$, בונים טבלת סימנים לנגזרת: מעבר מ-$+$ ל-$-$ – מקסימום, מ-$-$ ל-$+$ – מינימום, בלי החלפת סימן – אין קיצון. בתחום סגור בודקים גם את נקודות הקצה.

צפו לפני שמתחילים:

חקירת פונקציית פולינום
YouTube · 11:51

נקודת קיצון קצה / פנימית ומוחלטת / מקומית
YouTube · 5:05

טכניקת סיווג קיצון חשובה
YouTube · 6:23

איך לשרטט פונקציה לפני חקירה?
YouTube · 3:28

1 $f(x)=x^2-6x+5$. חקרו את הפונקציה: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה. שרטטו סקיצה.

2 $f(x)=x^3-3x$. חקרו את הפונקציה: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה. שרטטו סקיצה.

3 $f(x)=-x^3+12x$. חקרו את הפונקציה: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה. שרטטו סקיצה.

4 $f(x)=x^3-6x^2+9x$. חקרו את הפונקציה: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה. שרטטו סקיצה.

5 $f(x)=x^4-2x^2$. חקרו את הפונקציה: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה. שרטטו סקיצה.

6 $f(x)=x^3-3x^2$. חקרו את הפונקציה: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה. שרטטו סקיצה.

7 $f(x)=-x^4+8x^2-16$. חקרו את הפונקציה: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה. שרטטו סקיצה.

8 $f(x)=x^3+3x^2-9x-27$. חקרו את הפונקציה: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה. סרטטו סקיצה.

9 $f(x)=x^4-4x^3$. חקרו את הפונקציה: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה. סרטטו סקיצה.

10 $f(x)=2x^3-3x^2-12x$. חקרו את הפונקציה: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה. סרטטו סקיצה.

11 $f(x)=x^3$. האם יש לפונקציה נקודת קיצון? הסבירו בעזרת טבלת סימנים של $f'(x)$.

12 $f(x)=x^3+3x$. הראו שלפונקציה אין נקודות קיצון ושהיא עולה לכל x.

13 $f(x)=x^4$. מצאו את נקודת הקיצון וסווגו אותה.

14 $f(x)=x^3-12x$. מצאו את נקודות הקיצון וקבעו את סוגן.

15 $f(x)=-2x^3+3x^2+12x$. מצאו את תחומי העלייה והירידה.

16 $f(x)=x^4-8x^2+3$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$.

17 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x$. מצאו את נקודות הקיצון.

18 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ בתחום $-2\le x\le 4$. מצאו את נקודות הקיצון הפנימיות ונקודות הקצה, ואת הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של $f(x)$ בתחום.

19 $f(x)=x^2-4x$ בתחום $0\le x\le 5$. מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הקטן ביותר של $f(x)$ בתחום.

20 $f(x)=-x^3+3x$ בתחום $0\le x\le 2$. מצאו את נקודות הקיצון (כולל קצוות) וקבעו את סוגן.

21 $f(x)=x^3-3x+1$. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=0$? היעזרו בערכי הקיצון.

22 $f(x)=x^3-3x$. לאילו ערכי k יש למשוואה $f(x)=k$ שלושה פתרונות?

23 $f(x)=x^3-3x^2+4$. לאילו ערכי k יש למשוואה $f(x)=k$ פתרון אחד בלבד?

24 $f(x)=(x-1)^2(x+2)$. מצאו את נקודות הקיצון בלי לפתוח סוגריים לגמרי – היעזרו בהתנהגות סביב ציר x.

25 $f(x)=x^4-4x$. מצאו את נקודת הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה.

26 $f(x)=x^3+6x^2+12x$. האם יש לפונקציה נקודות קיצון? מה קורה ב-$x=-2$?

27 $f(x)=-x^4+2x^2+1$. מצאו את נקודות הקיצון והראו שהגרף סימטרי ביחס לציר y.

28 $f(x)=x^3-9x$. מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון.

29 $f(x)=2x^3-6x$. מצאו את נקודות הקיצון, ואת המרחק בין שתי נקודות הקיצון.

30 $f(x)=x^3-3x^2+3x$. הראו שהפונקציה עולה לכל x ומצאו את הנקודה שבה המשיק אופקי.

31 $f(x)=x^4-6x^2+8x$. מצאו את נקודת הקיצון (רמז: $x=1$ הוא שורש כפול של $f'(x)$).

32 סרטטו סקיצה של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x עם הנתונים: $f'(x)>0$ עבור $x<-1$ ועבור $x>3$, $f'(x)<0$ עבור $-1<x<3$, $f(-1)=4$, $f(3)=-2$. מהן נקודות הקיצון?

33 $f(x)=x^3+ax$ כאשר $a>0$. הראו שאין לפונקציה נקודות קיצון לאף ערך $a>0$.

✔ תשובות סופיות – נושא 14.3

1 לכל x ; חיתוך: $(1,0)$, $(5,0)$, $(0,5)$; $(3,-4)$ מינימום ; עלייה: $x>3$; ירידה: $x<3$

2 לכל x ; חיתוך: $(-\sqrt{3},0)$, $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$; $(-1,2)$ מקסימום, $(1,-2)$ מינימום ; עלייה: $x<-1$, $x>1$; ירידה: $-1<x<1$

3 לכל x ; חיתוך: $(-2\sqrt{3},0)$, $(0,0)$, $(2\sqrt{3},0)$; $(-2,-16)$ מינימום, $(2,16)$ מקסימום ; עלייה: $-2<x<2$; ירידה: $x<-2$, $x>2$

4 לכל x ; חיתוך: $(0,0)$, $(3,0)$; $(1,4)$ מקסימום, $(3,0)$ מינימום ; עלייה: $x<1$, $x>3$; ירידה: $1<x<3$

5 לכל x ; חיתוך: $(-\sqrt{2},0)$, $(0,0)$, $(\sqrt{2},0)$; $(-1,-1)$ מינימום, $(0,0)$ מקסימום, $(1,-1)$ מינימום ; עלייה: $-1<x<0$, $x>1$; ירידה: $x<-1$, $0<x<1$

6 לכל x ; חיתוך: $(0,0)$, $(3,0)$; $(0,0)$ מקסימום, $(2,-4)$ מינימום ; עלייה: $x<0$, $x>2$; ירידה: $0<x<2$

7 לכל x ; חיתוך: $(-2,0)$, $(2,0)$, $(0,-16)$; $(-2,0)$ מקסימום, $(0,-16)$ מינימום, $(2,0)$ מקסימום ; עלייה: $x<-2$, $0<x<2$; ירידה: $-2<x<0$, $x>2$

8 לכל x ; חיתוך: $(-3,0)$, $(3,0)$, $(0,-27)$; $(-3,0)$ מקסימום, $(1,-32)$ מינימום ; עלייה: $x<-3$, $x>1$; ירידה: $-3<x<1$

9 לכל x ; חיתוך: $(0,0)$, $(4,0)$; $(3,-27)$ מינימום ; עלייה: $x>3$; ירידה: $x<3$

10 לכל x ; חיתוך: $(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{105}}{4},0)$, $(0,0)$, $(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{105}}{4},0)$; $(-1,7)$ מקסימום, $(2,-20)$ מינימום ; עלייה: $x<-1$, $x>2$; ירידה: $-1<x<2$

11 אין – $f'(x)=3x^2\geq 0$ ואינה מחליפה סימן ב-$x=0$

12 $f'(x)=3x^2+3>0$ – עולה לכל x

13 $(0,0)$ מינימום

14 $(-2,16)$ מקסימום, $(2,-16)$ מינימום

15 עלייה: $-1<x<2$; ירידה: $x<-1$, $x>2$

16 $(-2,-13)$ מינימום, $(0,3)$ מקסימום, $(2,-13)$ מינימום

17 $(2,\frac{14}{3})$ מקסימום, $(3,\frac{9}{2})$ מינימום

18	$(-1,10)$ מקסימום, $(3,-22)$ מינימום ; קצוות: $(-2,3)$ מינימום, $(4,-15)$ מקסימום ; ערך גדול ביותר 10, קטן ביותר -22
19	גדול ביותר 5 (ב-$x=5$), קטן ביותר -4 (ב-$x=2$)
20	$(0,0)$ מינימום (קצה), $(1,2)$ מקסימום, $(2,-2)$ מינימום (קצה)
21	3 פתרונות (המקסימום $3>0$ והמינימום $-1<0$)
22	$-2<k<2$
23	$k<0$ או $k>4$
24	$(-1,4)$ מקסימום, $(1,0)$ מינימום
25	$(1,-3)$ מינימום ; עלייה: $x>1$; ירידה: $x<1$
26	אין קיצון ; ב-$x=-2$ השיפוע אפס אך הנגזרת $3(x+2)^2$ לא מחליפה סימן
27	$(-1,2)$ מקסימום, $(0,1)$ מינימום, $(1,2)$ מקסימום
28	$(-3,0)$, $(0,0)$, $(3,0)$; $(-\sqrt{3},6\sqrt{3})$ מקסימום, $(\sqrt{3},-6\sqrt{3})$ מינימום
29	$(-1,4)$ מקסימום, $(1,-4)$ מינימום ; מרחק $\sqrt{68}=2\sqrt{17}$
30	$f'(x)=3(x-1)^2\geq 0$; $(1,1)$
31	$(-2,-24)$ מינימום
32	$(-1,4)$ מקסימום, $(3,-2)$ מינימום
33	$f'(x)=3x^2+a>0$ לכל x

14.4 מציאת פרמטרים בפולינום

כל נתון הוא משוואה: נקודה על הגרף – הצבה ב-$f(x)$; קיצון או משיק אופקי – $f'(x_0)=0$; שיפוע משיק נתון – $f'(x_0)=m$. כמה פרמטרים – כמה משוואות.

צפו לפני שמתחילים:



איך מוצאים פרמטר בפונקציה? כל השיטות

YouTube · 6:41



חקירת פונקציית פולינום עם פרמטר

YouTube · 14:16



איך מסווגים נקודת קיצון עם פרמטר?

YouTube · 12:32

1 $f(x)=x^2+ax$. לפונקציה יש נקודת קיצון ב-$x=3$. מצאו את a.

2 $f(x)=x^3+ax^2$. לפונקציה יש נקודת קיצון ב-$x=2$. מצאו את a וסווגו את נקודת הקיצון.

3 $f(x)=x^3-3ax$. לפונקציה יש נקודת קיצון ב-$x=-2$. מצאו את a ואת נקודת הקיצון השנייה.

4 $f(x)=ax^3-12x$. ל-$f(x)$ נקודת קיצון ב-$x=1$. מצאו את a.

5 $f(x)=x^2+bx+c$. נקודת הקיצון של הפונקציה היא $(2,-1)$. מצאו את b ו-c.

6 $f(x)=ax^2+bx$. נקודת הקיצון היא $(1,3)$. מצאו את a ו-b וקבעו את סוג הקיצון.

7 $f(x)=x^3+ax^2+bx$. לפונקציה נקודות קיצון ב-$x=1$ וב-$x=3$. מצאו את a ו-b.

8 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. לפונקציה מקסימום ב-$(-1,7)$ ומינימום ב-$x=3$. מצאו את a, b, c.

9 $f(x)=ax^3+bx^2$. לפונקציה נקודת קיצון ב-$(2,-4)$. מצאו את a ו-b.

10 $f(x)=x^3+ax^2+3x$. מצאו את a אם ידוע ששיפוע המשיק ב-$x=1$ הוא -3.

11 $f(x)=x^3+ax+b$. המשיק לגרף בנקודה $(1,2)$ מקביל לציר x. מצאו את a ו-b.

12 $f(x)=ax^2+bx+c$ עובר בראשית, ויש לו מינימום ב-$(2,-8)$. מצאו את a, b, c.

13 $f(x)=x^4+ax^2$. לפונקציה נקודת קיצון ב-$x=2$. מצאו את a ואת כל נקודות הקיצון.

14 $f(x)=x^3+ax^2$. לאילו ערכי a נקודת הקיצון שאינה בראשית נמצאת ב-$x>0$?

15 $f(x)=x^3-3x+k$. מצאו את k אם ידוע שערך המינימום של הפונקציה הוא 0.

16 $f(x)=x^3-3x+k$. מצאו את ערכי k שעבורם לגרף יש בדיוק שתי נקודות חיתוך עם ציר x.

17 $f(x)=-x^2+4x+k$. מצאו את k אם ידוע שערך המקסימום של הפונקציה הוא 10.

18 $f(x)=x^3+ax^2+ax$. מצאו את ערכי a שעבורם אין לפונקציה נקודות קיצון.

19 $f(x)=x^3-ax$. מצאו את ערכי a שעבורם לפונקציה יש שתי נקודות קיצון.

20 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+4x$. מצאו את $a>0$ שעבורו לנגזרת יש שורש כפול. האם יש אז קיצון?

21 $f(x)=ax^3+3x^2$, והמשיק בנקודה $x=-1$ מקביל לישר $y=3x$. מצאו את a.

22 $f(x)=x^2+ax+b$. הישר $y=2x-3$ משיק לגרף בנקודה שבה $x=2$. מצאו את a ו-b.

23 $f(x)=x^3+ax^2+b$. לפונקציה נקודת קיצון $(2,0)$. מצאו את a, b, ואת נקודת הקיצון השנייה.

24 $f(x)=a(x-1)^2(x+2)$. ערך המקסימום של הפונקציה הוא 8. מצאו את $a>0$.

25 $f(x)=x^4+bx$. לפונקציה נקודת קיצון ב-$x=-1$. מצאו את b ואת ערך הקיצון.

26 $f(x)=ax^3+bx$. הגרף עובר בנקודה $(1,-2)$ ויש לו קיצון ב-$x=1$. מצאו את a ו-b.

27 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. הגרף חותך את ציר y ב-5, ולו קיצון ב-$x=0$ וב-$x=2$. מצאו את a, b, c.

28 $f(x)=x^2-2ax+a+6$. מצאו את ערכי a שעבורם נקודת הקיצון נמצאת על ציר x.

29 $f(x)=x^3-3a^2x$ כאשר $a>0$. בטאו באמצעות a את נקודות הקיצון של $f(x)$.

30 $f(x)=x^3-3a^2x$ כאשר $a>0$. מצאו את a אם ההפרש בין ערך המקסימום לערך המינימום הוא 32.

31 $f(x)=-x^3+ax^2$ כאשר $a>0$. בטאו באמצעות a את תחום העלייה של $f(x)$.

32 $f(x)=x^3+ax^2+bx$. שיפוע המשיק בנקודה $x=0$ הוא -9 ובנקודה $x=1$ הוא -12. מצאו את a ו-b.

33 $f(x)=ax^4+bx^2$. לפונקציה מינימום ב-$(1,-1)$. מצאו את a ו-b.

✔ תשובות סופיות – נושא 14.4

1. $a=-6$
2. $a=-3$; $(2,-4)$ מינימום
3. $a=4$; $(-2,16)$ מקסימום, $(2,-16)$ מינימום
4. $a=4$
5. $b=-4$, $c=3$
6. $a=-3$, $b=6$; מקסימום
7. $a=-6$, $b=9$
8. $a=-3$, $b=-9$, $c=2$
9. $a=1$, $b=-3$
10. $a=-\frac{9}{2}$
11. $a=-3$, $b=4$
12. $a=2$, $b=-8$, $c=0$
13. $a=-8$; $(0,0)$ מקסימום, $(\pm 2,-16)$ מינימום
14. $a<0$
15. $k=2$
16. $k=\pm 2$
17. $k=6$
18. $0\le a\le 3$
19. $a>0$
20. $a=2$; אין קיצון
21. $a=3$
22. $a=-2$, $b=1$
23. $a=-3$, $b=4$; $(0,4)$ מקסימום

24	$a=2$
25	$b=4$; $(-1,-3)$ מינימום
26	$a=1$, $b=-3$
27	$a=-3$, $b=0$, $c=5$
28	$a=3$ או $a=-2$
29	$(-a,2a^3)$ מקסימום, $(a,-2a^3)$ מינימום
30	$a=2$
31	$0<x<\frac{2a}{3}$
32	$a=-3$, $b=-9$
33	$a=1$, $b=-2$

פרק 14 סיכומון סוף פרק – מתחילים לחקור!

כללי גזירה

- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(c)' = 0$, $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$.
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

משמעות הנגזרת

- $f'(a)$ = שיפוע המשיק לגרף בנקודה $x = a$.
- $f'(x) > 0$ – עולה; $f'(x) < 0$ – יורדת.

משוואת משיק

- נקודת ההשקה $(x_0, f(x_0))$, שיפוע $m = f'(x_0)$.
- $y - f(x_0) = m(x - x_0)$.
- משיק מקביל לישר ⇐ אותו שיפוע; מאונך ⇐ $m_1 \cdot m_2 = -1$; אופקי ⇐ $f'(x) = 0$.

נקודות קיצון

- פותרים $f'(x) = 0$ ⇐ נקודות 'חשודות'.
- טבלת סימני $f'(x)$: מ-$+$ ל-$-$ מקסימום; מ-$-$ ל-$+$ מינימום.
- אין החלפת סימן ⇐ אין קיצון (נקודת פיתול אופקית).

חקירה מלאה של פולינום

- תחום הגדרה: כל x.
- חיתוך עם הצירים: $x = 0$ ⇐ ציר y; $f(x) = 0$ ⇐ ציר x.
- קיצון, תחומי עלייה וירידה, ואז סקיצה.

מציאת פרמטרים

- כל נתון = משוואה: נקודה על הגרף ⇐ $f(x_0) = y_0$.
- קיצון ב-x_0 ⇐ $f'(x_0) = 0$; שיפוע משיק נתון ⇐ $f'(x_0) = m$.
- מספר נעלמים = מספר משוואות נדרש.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- להציב את נקודת ההשקה ב-$f'(x)$ כדי לקבל את ה-y – ה-y בא מ-$f(x)$!
- להסיק קיצון מ-$f'(x) = 0$ בלי לבדוק החלפת סימן.
- לבקש 'נקודות קיצון' ולשכוח לחשב את ערך ה-y של כל אחת.
- בפרמטרים – להשתמש רק בנתון אחד כשיש שני נעלמים.

💡 **הטיפ של אילון:** $f(x)$ נותן גובה, $f'(x)$ נותן שיפוע. לפני כל הצבה תשאלו את עצמכם: אני צריך גובה או שיפוע? ככה לא תתבלבלו לעולם.

פרק 15

מורכבת ומכפלה

גזירת פונקציה מורכבת ומכפלה, הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת, זוגיות והטרנספורמציה $f^2(x)$

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

15.1 **נגזרת של פונקציה מורכבת ושל מכפלה** — 37 תרגילים

15.2 **קשר גרף – נגזרת** — 32 תרגילים

15.3 **פונקציה זוגית ואי-זוגית והטרנספורמציה** $f^2(x)$ — 31 תרגילים

סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

חקירת פונקציות – נגזרת מורכבת
YouTube · 3:04

חקירת פונקציה – נגזרת מכפלת שתי פונקציות
YouTube · 8:41

קשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת
YouTube · 16:24

פונקציה זוגית ואי זוגית
YouTube · 11:29

המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף



הפונקציה והנגזרת – יד ביד

גרף הפונקציה וגרף הנגזרת זה מעל זה: ראו איך עלייה, ירידה וקיצון ב-$f(x)$ מתאימים לסימן של $f'(x)$.

15.1 נגזרת של פונקציה מורכבת ושל מכפלה

מורכבת: $[(g(x))^n]' = n\,(g(x))^{n-1}\cdot g'(x)$ – לא לשכוח את הנגזרת הפנימית. מכפלה: $(u\cdot v)' = u'v + uv'$. אחרי הגזירה מוציאים גורם משותף כדי למצוא בקלות את השורשים.

צפו לפני שמתחילים:

חקירת פונקציות – נגזרת מורכבת
YouTube · 3:04

נגזרת מכפלת שתי פונקציות
YouTube · 8:41

חקירת פונקציית מכפלה
YouTube · 14:11

1. $f(x) = (3x-2)^4$. גזרו את $f(x)$ (פונקציה פנימית קווית).
2. $f(x) = (x^2+1)^5$. גזרו את $f(x)$ (פונקציה פנימית ריבועית).
3. $f(x) = (5-x)^3$. גזרו את $f(x)$ (שימו לב לסימן של הנגזרת הפנימית).
4. $f(x) = (x^3-2x)^2$. גזרו את $f(x)$ (פנימית ממעלה שלישית).
5. $f(x) = 2\,(4x+1)^3$. גזרו את $f(x)$ (מקדם מחוץ לסוגריים).
6. $f(x) = (x^2-4x)^6$. גזרו את $f(x)$ (חזקה גבוהה).
7. $f(x) = \frac{(2x-6)^4}{2}$. גזרו את $f(x)$ (מקדם שבר).
8. $f(x) = (1-x^2)^3$. גזרו את $f(x)$ (מינוס בתוך הסוגריים).
9. $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^3}$. כתבו כחזקה שלילית וגזרו.

10 $f(x)=\sqrt{x^2+9}$. גזרו את $f(x)$.

11 $f(x)=x(x-3)^2$. גזרו בעזרת כלל המכפלה ופשטו עד מכפלת גורמים (מכפלה פשוטה).

12 $f(x)=x^2(x+1)^3$. גזרו בעזרת כלל המכפלה ופשטו עד מכפלת גורמים (שתי חזקות).

13 $f(x)=(x-1)^2(x+2)$. גזרו בעזרת כלל המכפלה ופשטו עד מכפלת גורמים (פולינום כמכפלה).

14 $f(x)=(x-4)^3(2x+1)$. גזרו בעזרת כלל המכפלה ופשטו עד מכפלת גורמים (גורם קווי וגורם מורכב).

15 $f(x)=x^3(2-x)^2$. גזרו בעזרת כלל המכפלה ופשטו עד מכפלת גורמים (שימו לב לסימנים).

16 $f(x)=(x+3)^2(x^2-1)$. גזרו בעזרת כלל המכפלה ופשטו עד מכפלת גורמים (שני גורמים ריבועיים).

17 $f(x)=(x+2)^3$. חשבו את $f'(-1)$.

18 $f(x)=(x^2-3)^4$. חשבו את $f'(2)$.

19 $f(x)=x(x-2)^3$. מצאו את ערכי x שבהם $f'(x)=0$.

20 $f(x)=(x^2-4)^2$. מצאו את ערכי x שבהם $f'(x)=0$.

21 $f(x)=(2x-1)^5$. מצאו את משוואת המשיק בנקודה $x=1$.

22 $f(x)=x(x-4)^2$. מצאו את משוואת המשיק בנקודה שבה $x=2$.

23 $f(x)=(x^2-2x)^3$. מצאו את משוואת המשיק בנקודה $x=1$. מה מיוחד בו?

24 $f(x)=x(x-3)^2$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ ואת תחומי העלייה והירידה (מכפלה).

25 $f(x)=x^2(x-4)^2$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ ואת תחומי העלייה והירידה (שני שורשים כפולים).

26 $f(x)=(x-1)^3(x+3)$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ ואת תחומי העלייה והירידה (שורש משולש).

27 $f(x)=\left(x^2-1\right)^2$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ ואת תחומי העלייה והירידה (מורכבת ריבועית).

28 $f(x)=x(x+2)^3$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ ואת תחומי העלייה והירידה (מכפלה עם חזקה שלישית).

29 $f(x)=(x-2)^4$. האם הנקודה $(2,0)$ היא נקודת קיצון? סווגו.

30 $f(x)=(x+1)^3(x-1)^3$. מצאו את נקודת הקיצון היחידה, והסבירו מדוע $x=\pm1$ אינן נקודות קיצון.

31 $f(x)=(ax+1)^3$, ו-$f'(0)=6$. מצאו את a.

32 $f(x)=x(x-a)^2$ כאשר $a>0$. בטאו באמצעות a את נקודות הקיצון של $f(x)$.

33 $f(x)=x(x-a)^2$, ולפונקציה מקסימום ב-$x=2$. מצאו את a.

34 $f(x)=(x^2+k)^2$. מצאו את ערכי k שעבורם לפונקציה שלוש נקודות קיצון.

35 $f(x)=g(2x)$, וידוע ש-$g'(4)=3$. חשבו את $f'(2)$.

36 $f(x)=[g(x)]^2$, וידוע ש-$g(1)=3$, $g'(1)=-2$. חשבו את $f'(1)$.

37 $f(x)=x\cdot g(x)$, וידוע ש-$g(2)=5$, $g'(2)=1$. מצאו את משוואת המשיק ל-$f(x)$ בנקודה $x=2$.

✔ תשובות סופיות – נושא 15.1

1	$f'(x)=12(3x-2)^3$
2	$f'(x)=10x(x^2+1)^4$
3	$f'(x)=-3(x-5)^2$
4	$f'(x)=2x(x^2-2)(3x^2-2)$
5	$f'(x)=24(4x+1)^2$
6	$f'(x)=12x^5(x-4)^5(x-2)$
7	$f'(x)=32(x-3)^3$
8	$f'(x)=-6x(x-1)^2(x+1)^2$
9	$f'(x)=-\frac{6}{(2x+1)^4}$
10	$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$
11	$f'(x)=3(x-3)(x-1)$
12	$f'(x)=x(x+1)^2(5x+2)$
13	$f'(x)=3(x-1)(x+1)$
14	$f'(x)=(x-4)^2(8x-5)$
15	$f'(x)=x^2(x-2)(5x-6)$
16	$f'(x)=2(x+3)(2x^2+3x-1)$
17	3
18	16
19	$x=2\ ,x=\frac{1}{2}$
20	$x=\pm 2\ ,x=0$
21	$y=10x-9$
22	$y=16-4x$

23 $y=-1$ – משיק אופקי

24 $(1,4)$ מקסימום, $(3,0)$ מינימום ; עלייה: $x<1$, $x>3$; ירידה: $1<x<3$

25 $(0,0)$ מינימום, $(2,16)$ מקסימום, $(4,0)$ מינימום ; עלייה: $0<x<2$, $x>4$; ירידה: $2<x<4$, $x<0$

26 $(-2,-27)$ מינימום ; עלייה: $x>-2$; ירידה: $x<-2$

27 $(-1,0)$ מינימום, $(0,1)$ מקסימום, $(1,0)$ מינימום ; עלייה: $-1<x<0$, $x>1$; ירידה: $x<-1$, $0<x<1$

28 $(-\frac{1}{2},-\frac{27}{16})$ מינימום ; עלייה: $x>-\frac{1}{2}$; ירידה: $x<-\frac{1}{2}$

29 כן – מינימום

30 $(0,-1)$ מינימום ; ב-$x=\pm 1$ הנגזרת לא מחליפה סימן

31 $a=2$

32 $(\frac{a}{3},\frac{4a^3}{27})$ מקסימום, $(a,0)$ מינימום

33 $a=6$

34 $k<0$

35 $f'(2)=6$

36 $f'(1)=-12$

37 $y=7x-4$

15.2 קשר גרף – נגזרת

איפה ש- $f'(x)>0$ עולה; $f'(x)<0$ – יורדת. שורש של $f'(x)$ שבו היא **מחליפה סימן** – קיצון של $f(x)$; שורש שבו היא רק נוגעת בציר – אין קיצון. נקודת קיצון של $f'(x)$ – המקום שבו $f(x)$ עולה או יורדת הכי מהר.

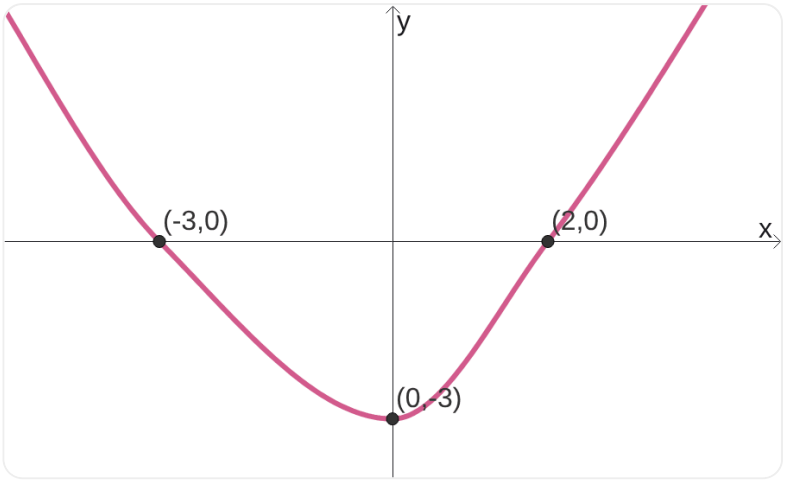
צפו לפני שמתחילים:

קשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת – הסבר ותרגול
YouTube · 7:17

קשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת
YouTube · 16:24

קשר גרף נגזרת – אסימפטוטות
YouTube · 10:07

1 בציור גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

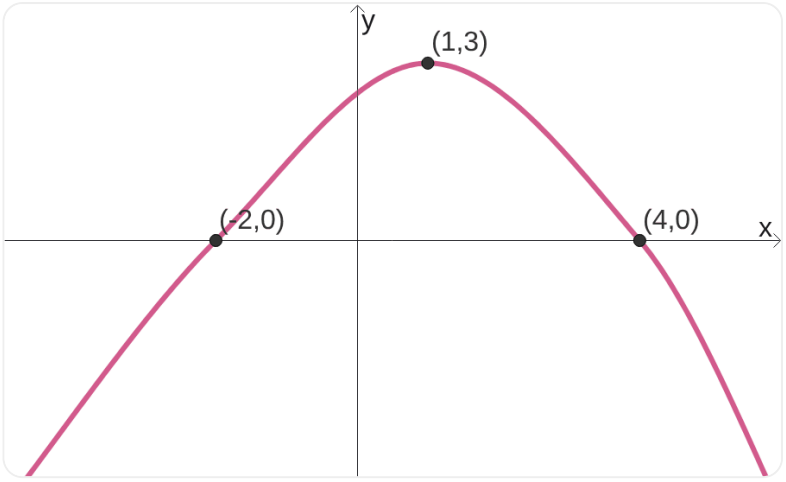


2 בציור של תרגיל 1 מופיע גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן.

3 בציור של תרגיל 1 מופיע גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. באיזה ערך x השיפוע של $f(x)$ הוא הקטן ביותר?

4 בציור של תרגיל 1 מופיע גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. סדרו לפי הגודל: $f(-3)$, $f(0)$, $f(2)$. נמקו בעזרת תחומי העלייה והירידה.

5 בציור גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

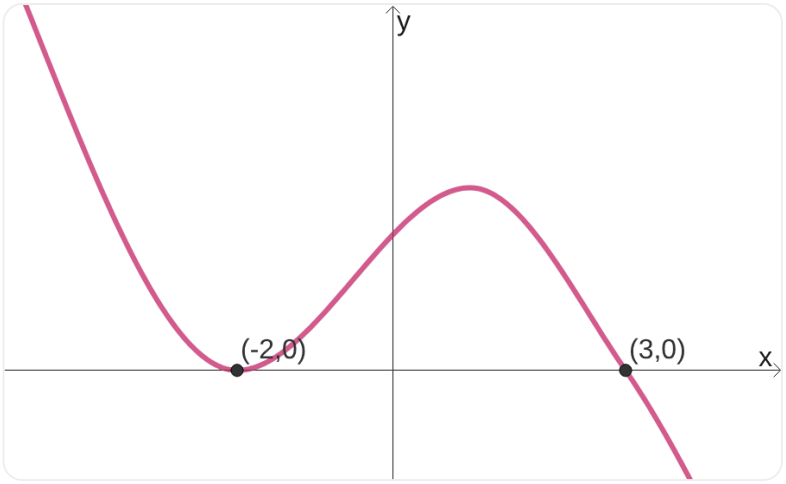


6 בציור של תרגיל 5 מופיע גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. מצאו את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של $f(x)$ וסווגו אותן.

7 בציור של תרגיל 5 מופיע גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. באיזה ערך x הפונקציה $f(x)$ עולה בקצב המהיר ביותר?

8 בציור של תרגיל 5 מופיע גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. ידוע ש-$f(4)=0$. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=0$ בתחום $x>-2$? נמקו.

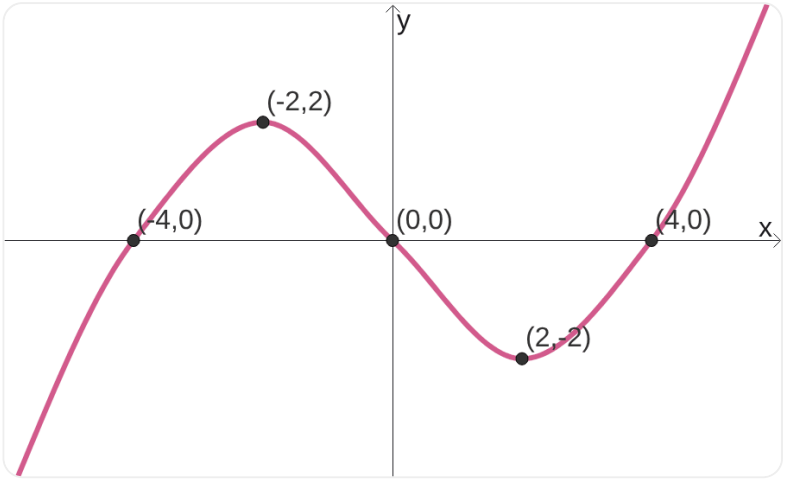
9 בציור גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. מצאו את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של $f(x)$. שימו לב לנקודה $x=-2$!



10 בציור של תרגיל 9 מופיע גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

11 בציור של תרגיל 9 מופיע גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. האם המשיק לגרף $f(x)$ בנקודה $x=-2$ אופקי? האם זו נקודת קיצון?

12 בציור גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. מצאו את שיעורי ה-x של כל נקודות הקיצון של $f(x)$ וסווגו אותן.

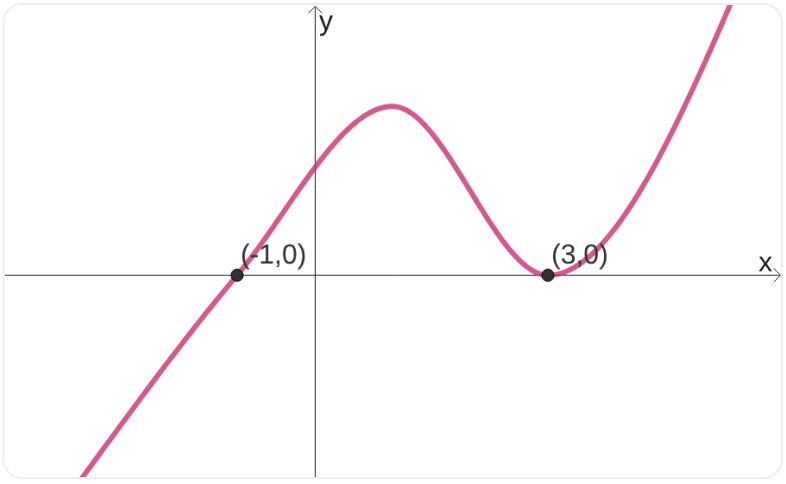


13 בציור של תרגיל 12 מופיע גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. מצאו את תחומי הירידה של $f(x)$.

14 בציור של תרגיל 12 מופיע גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.
ידוע ש-$f(x)$ פונקציה זוגית ו-$f(4)=-5$. מהו $f(-4)$ ומה סוג הנקודה $(-4,f(-4))$?

15 בציור של תרגיל 12 מופיע גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.
באילו ערכי x שיפוע המשיק לגרף $f(x)$ הוא 2 (לפי הנתונים בציור)?

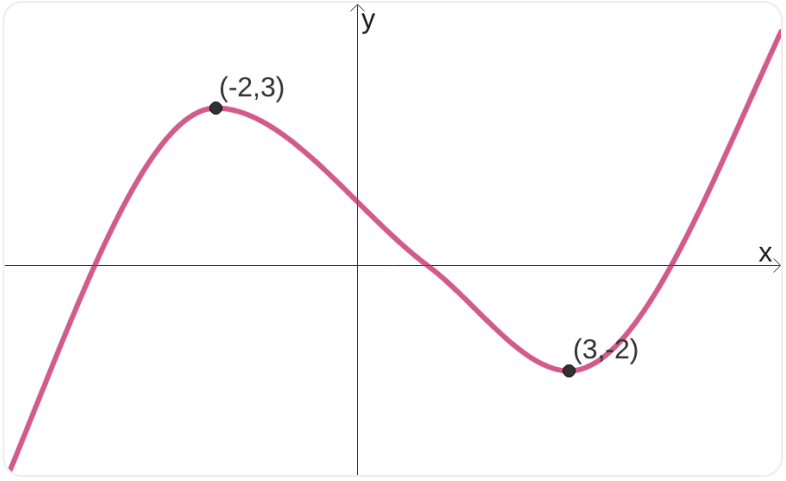
16 בציור גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. מצאו את נקודת הקיצון של $f(x)$ וסווגו אותה. מה קורה ב-$x=3$?



17 בציור של תרגיל 16 מופיע גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.
מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

18 בציור של תרגיל 16 מופיע גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.
ידוע ש-$f(-1)=2$. האם יש ל-$f(x)$ נקודות חיתוך עם ציר x? נמקו.

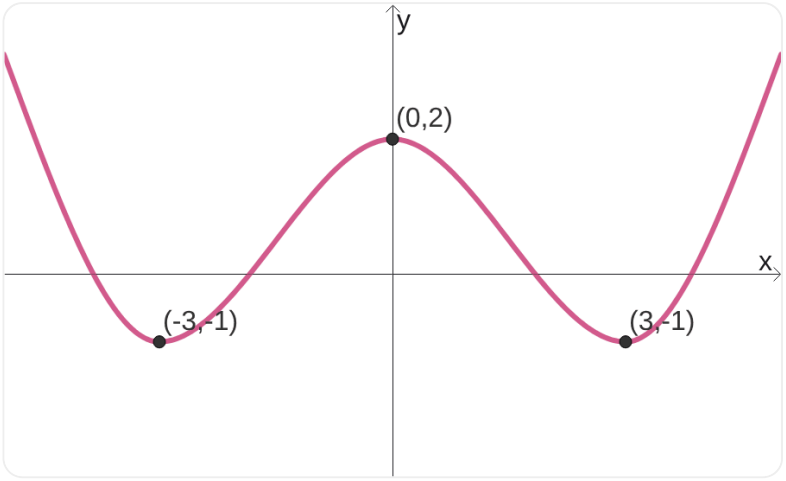
19 בציור גרף הפונקציה $f(x)$. באילו תחומים $f'(x)>0$ ובאילו $f'(x)<0$?



20 בציור של תרגיל 19 מופיע גרף הפונקציה $f(x)$. מצאו את הפתרונות של המשוואה $f'(x)=0$.

21 בציור של תרגיל 19 מופיע גרף הפונקציה $f(x)$. מה הסימן של $f'(1)$? ושל $f'(5)$?

22 בציור גרף הפונקציה $f(x)$. כמה פתרונות יש למשוואה $f'(x)=0$? מהם?



23 בציור של תרגיל 22 מופיע גרף הפונקציה $f(x)$. פתרו את אי-השוויון $f'(x)<0$.

24 בציור של תרגיל 22 מופיע גרף הפונקציה $f(x)$. באיזה מהתחומים $f'(x)$ חיובית: $-3<x<0$ או $0<x<3$? נמקו.

25 $f'(x)=(x-1)(x+3)$. בלי לחשב את $f(x)$, מצאו את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון וסווגו אותן.

26 $f'(x)=x^2(x-4)$. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$ ואת נקודות הקיצון.

27 $f'(x)=-(x+2)^2$. האם יש ל-$f(x)$ נקודות קיצון? מה אפשר לומר על $f(x)$?

28 $f'(x)=(x-2)^3(x+1)$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ (שיעורי x) וסווגו.

29 ל-$f'(x)$ יש שלושה שורשים: $x=-1$ (חותך), $x=2$ (משיק), $x=5$ (חותך), ו-$f'(0)>0$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ וסווגו.

30 סרטטו סקיצה של גרף $f'(x)$ לפונקציה $f(x)=x^3-3x$ על סמך תחומי העלייה והירידה בלבד, ובדקו בעזרת $f'(x)=3x^2-3$.

31 $f(x)$ פולינום ממעלה שלישית עם מקסימום ב-$x=-1$ ומינימום ב-$x=3$. איזו פונקציה מתאימה לנגזרת: (1) $f'(x)=(x+1)(x-3)$ (2) $f'(x)=-(x+1)(x-3)$?

32 $f'(x)=(x-a)(x-4)$ כאשר $a<4$. מהו סוג נקודת הקיצון ב-$x=a$?

✔ תשובות סופיות – נושא 15.2

1. עלייה: $x<-3$, $x>2$; ירידה: $-3<x<2$
2. $x=-3$ מקסימום, $x=2$ מינימום
3. $x=0$
4. $f(-3)>f(0)>f(2)$
5. עלייה: $-2<x<4$; ירידה: $x<-2$, $x>4$
6. $x=-2$ מינימום, $x=4$ מקסימום
7. $x=1$
8. פתרון אחד: $x=4$ (נקודת מקסימום שערכה 0, ובשאר התחום $f(x)<0$)
9. $x=3$ מקסימום ; ב-$x=-2$ אין קיצון (הנגזרת לא מחליפה סימן)
10. עלייה: $x<3$; ירידה: $x>3$
11. כן, אופקי ; לא קיצון
12. $x=-4$ מינימום, $x=0$ מקסימום, $x=4$ מינימום
13. $x<-4$, $0<x<4$
14. $f(-4)=-5$; מינימום
15. $x=-2$
16. $x=-1$ מינימום ; ב-$x=3$ אין קיצון
17. עלייה: $x>-1$; ירידה: $x<-1$
18. לא – המינימום המוחלט הוא $2>0$
19. $f'(x)>0$: $x<-2$, $x>3$; $f'(x)<0$: $-2<x<3$
20. $x=-2$, $x=3$
21. $f'(1)<0$; $f'(5)>0$
22. 3 פתרונות: $x=-3$, $x=0$, $x=3$
23. $x<-3$ או $0<x<3$

24 $-3 < x < 0$ – שם $f(x)$ עולה

25 $x = -3$ מקסימום, $x = 1$ מינימום

26 עלייה: $x > 4$; ירידה: $x < 4$; $x = 4$ מינימום (ב-$x = 0$ אין קיצון)

27 אין קיצון ; $f(x)$ יורדת לכל x

28 $x = -1$ מקסימום, $x = 2$ מינימום

29 $x = -1$ מינימום, $x = 5$ מקסימום ; ב-$x = 2$ אין קיצון

30 פרבולה צוחקת שחותכת ב-$x = \pm 1$ ושלילית ביניהן

31 (1)

32 מקסימום

15.3 פונקציה זוגית ואי-זוגית והטרנספורמציה $f^2(x)$

זוגית: $f(-x)=f(x)$ – סימטריה לציר y. אי-זוגית: $f(-x)=-f(x)$ – סימטריה לראשית. ב-$f^2(x)$: הגרף כולו מעל ציר x, כל שורש של $f(x)$ הופך למינימום שמשיק לציר, וכל קיצון של $f(x)$ עובר לגובה הריבועי.

צפו לפני שמתחילים:



פונקציה זוגית ואי זוגית
YouTube · 11:29



טרנספורמציה – הפונקציה בריבוע
YouTube · 5:40

1 $f(x)=x^4-3x^2$. קבעו אם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או אף אחת מהן. הוכיחו בעזרת $f(-x)$.

2 $f(x)=x^3-5x$. קבעו אם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או אף אחת מהן. הוכיחו בעזרת $f(-x)$.

3 $f(x)=x^3+x^2$. קבעו אם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או אף אחת מהן. הוכיחו בעזרת $f(-x)$.

4 $f(x)=7$. קבעו אם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או אף אחת מהן. הוכיחו בעזרת $f(-x)$.

5 $f(x)=\left(x^2-1\right)^3$. קבעו אם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או אף אחת מהן. הוכיחו בעזרת $f(-x)$.

6 $f(x)=x\left(x^2-4\right)$. קבעו אם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או אף אחת מהן. הוכיחו בעזרת $f(-x)$.

7 $f(x)=x^5+2x^3-x$. קבעו אם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או אף אחת מהן. הוכיחו בעזרת $f(-x)$.

8 $f(x)=(x-1)^2$. קבעו אם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או אף אחת מהן. הוכיחו בעזרת $f(-x)$.

9 $f(x)=x^2\left(x^2+1\right)$. קבעו אם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או אף אחת מהן. הוכיחו בעזרת $f(-x)$.

10 $f(x)=x^3\left(x^2-1\right)^2$. קבעו אם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או אף אחת מהן. הוכיחו בעזרת $f(-x)$.

11 $f(x)=(x-1)^3+(x+1)^3$. קבעו אם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או אף אחת מהן. הוכיחו בעזרת $f(-x)$.

12 $f(x)=x^4+x$. קבעו אם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או אף אחת מהן. הוכיחו בעזרת $f(-x)$.

13 $f(x)=x^4+ax^3+2x^2$. מצאו את a שעבורו $f(x)$ זוגית.

14 $f(x)=x^3+(b-2)x^2+x$. מצאו את b שעבורו $f(x)$ אי-זוגית.

15 $f(x)$ אי-זוגית, ו-$f(3)=-7$. מצאו את $f(-3)$.

16 $f(x)$ אי-זוגית ומוגדרת ב-$x=0$. מהו $f(0)$? הסבירו.

17 $f(x)$ זוגית, ולה נקודת מקסימום $(2,5)$. מצאו נקודת קיצון נוספת וסווגו אותה.

18 $f(x)$ אי-זוגית, ולה נקודת מינימום $(1,-4)$. מצאו נקודת קיצון נוספת וסווגו אותה.

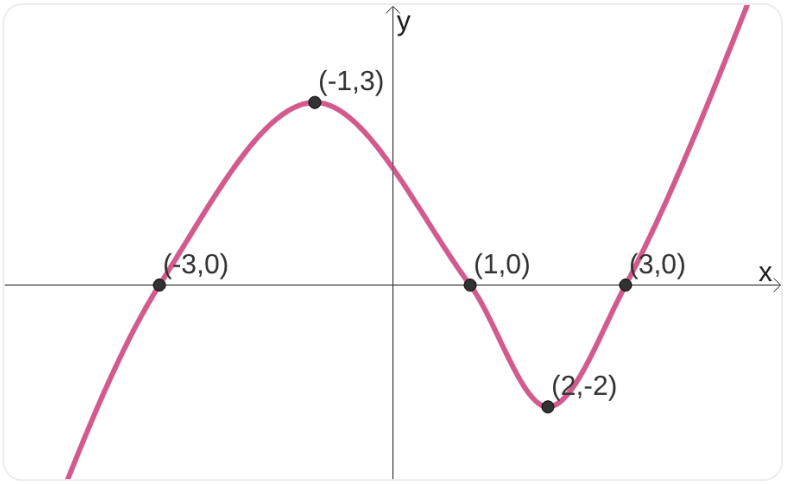
19 $f(x)$ זוגית ועולה בתחום $x>0$. מה אפשר לומר על $f(x)$ בתחום $x<0$?

20 $f(x)$ אי-זוגית ועולה בתחום $x>0$. מה אפשר לומר על $f(x)$ בתחום $x<0$?

21 $f(x)$ זוגית ו-$g(x)$ אי-זוגית. קבעו מה הזוגיות של $f(x)\cdot g(x)$.

22 $f(x)$ זוגית וגזירה. הראו ש-$f'(x)$ אי-זוגית, ובדקו על $f(x)=x^4-x^2$.

23 בציור גרף הפונקציה $f(x)$. $g(x)=f^2(x)$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגן.

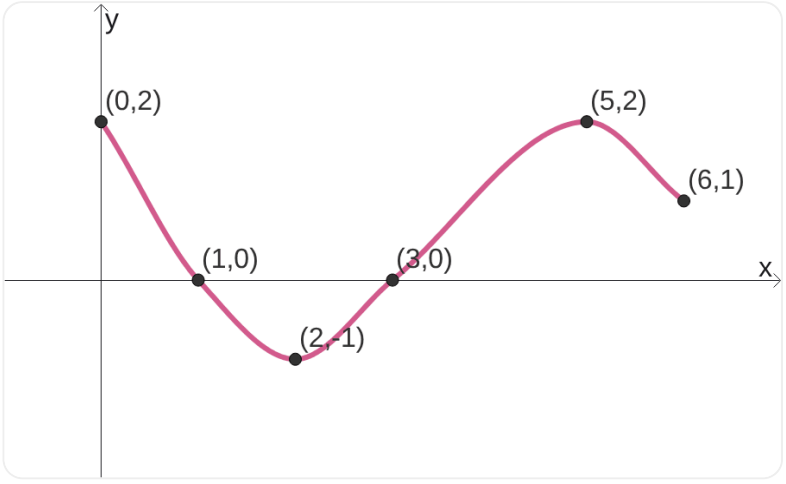


24 בציור של תרגיל 23 מופיע גרף הפונקציה $f(x)$. $g(x)=f^2(x)$. באילו נקודות $g(x)$ משיקה לציר x?

25 בציור של תרגיל 23 מופיע גרף הפונקציה $f(x)$. $g(x)=f^2(x)$. האם יש ערכי x שבהם $g(x)<0$? נמקו.

26 בציור של תרגיל 23 מופיע גרף הפונקציה $f(x)$. $g(x)=f^2(x)$. באילו תחומים $g(x)$ עולה?

27 בציור גרף הפונקציה $f(x)$. $g(x)=f^2(x)$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ (כולל נקודות קצה) וקבעו את סוגן.



28 בציור של תרגיל 27 מופיע גרף הפונקציה $f(x)$. $g(x)=f^2(x)$. מהו תחום הערכים של $g(x)$?

29 $f(x)=x^2-4$ ו-$g(x)=f^2(x)$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ בעזרת הקשר בין $f(x)$ ל-$g(x)$, ובדקו בגזירה.

30 $g(x)=f^2(x)$. הראו ש-$g'(x)=2f(x)f'(x)$, והסבירו מדוע כל שורש של $f(x)$ (שבו הגרף חותך) הוא מינימום של $g(x)$.

31 $f(x)=x^3-3x$ ו-$g(x)=f^2(x)$. כמה נקודות קיצון יש ל-$g(x)$? מצאו אותן.

✔ תשובות סופיות – נושא 15.3

1	זוגית
2	אי-זוגית
3	לא זוגית ולא אי-זוגית
4	זוגית
5	זוגית
6	אי-זוגית
7	אי-זוגית
8	לא זוגית ולא אי-זוגית
9	זוגית
10	אי-זוגית
11	אי-זוגית
12	לא זוגית ולא אי-זוגית
13	$a=0$
14	$b=2$
15	$f(-3)=7$
16	$f(0)=0$ וכי $f(0)=-f(0)$
17	$(-2,5)$ מקסימום
18	$(-1,4)$ מקסימום
19	יורדת
20	עולה
21	אי-זוגית
22	$f'(x)=4x^3-2x$ – אי-זוגית
23	$(-3,0)$ מינימום, $(-1,9)$ מקסימום, $(1,0)$ מינימום, $(2,4)$ מקסימום, $(3,0)$ מינימום

24 $(-3,0)$, $(1,0)$, $(3,0)$

25 לא - $g(x)=f^2(x)\geq 0$ לכל x

26 $-3<x<-1$, $1<x<2$, $x>3$

27 $(0,4)$ מקסימום (קצה), $(1,0)$ מינימום, $(2,1)$ מקסימום, $(3,0)$ מינימום, $(5,4)$ מקסימום, $(6,1)$ מינימום (קצה)

28 $0\leq y\leq 4$

29 $(-2,0)$ מינימום, $(0,16)$ מקסימום, $(2,0)$ מינימום

30 $g(x)\geq 0$ ו-$g=0$ בשורש - לכן מינימום

31 :5 $(-\sqrt{3},0)$, $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$ מינימום ; $(-1,4)$, $(1,4)$ מקסימום

פרק 15 סיכומון סוף פרק – מורכבת ומכפלה

נגזרת מורכבת (שרשרת)

- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ – גוזרים את החיצונית וכופלים בנגזרת הפנימית.
- $((ax+b)^n)' = n(ax+b)^{n-1} \cdot a$.
- $\left(\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$.

נגזרת מכפלה

- $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.
- אחרי הגזירה – מוציאים גורם משותף כדי לפתור $f'(x) = 0$ בקלות.

קשר גרף – נגזרת

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x)$ עולה; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f(x)$ יורדת.
- $f'(x)$ מחליף סימן $\Leftarrow$ קיצון של $f(x)$.
- קיצון של $f'(x) \Leftarrow$ נקודת פיתול של $f(x)$.

קריאת גרף הנגזרת

- מסתכלים על **הסימן** של $f'(x)$ (מעל/מתחת לציר), לא על עלייה וירידה שלו.
- חיתוך של $f'(x)$ עם ציר x – 'מועמד' לקיצון של $f(x)$.
- השקה של $f'(x)$ לציר – אין החלפת סימן, אין קיצון.

זוגית ואי-זוגית

- זוגית: $f(-x) = f(x)$ – סימטריה לציר y.
- אי-זוגית: $f(-x) = -f(x)$ – סימטריה לראשית.
- נגזרת של זוגית – אי-זוגית, ולהפך.

הטרנספורמציה $f^2(x)$

- $f^2(x) \geq 0$ תמיד; חיתוך של $f(x)$ עם ציר $x \Leftarrow$ השקה של $f^2(x)$.
- $\left(f^2(x)\right)' = 2f(x)f'(x) \Leftarrow$ קיצון גם בשורשי $f(x)$ וגם בקיצוני $f(x)$.
- נקודה (x_0, y_0) על $f(x) \Leftarrow$ נקודה (x_0, y_0^2) על $f^2(x)$.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לשכוח לכפול בנגזרת הפנימית במורכבת.
- לגזור מכפלה כמכפלת נגזרות: $(uv)' \neq u'v'$.
- בקריאת גרף $f'(x)$ – לבלבל בין 'הנגזרת עולה' לבין 'הפונקציה עולה'.
- ב-$f^2(x)$ לשכוח שבשורשי $f(x)$ נוצרות נקודות מינימום.

💡 **הטיפ של אילון:** בגרף של נגזרת – תעבירו את האצבע על ציר x ותגידו בקול: פלוס, מינוס, פלוס. זה כל מה שצריך כדי לסרטט את $f(x)$.

פרק 16

חקירת פונקציית מנה

תחום, אסימפטוטות, חורים, קיצון, קעירות – וגרף $\frac{1}{f(x)}$

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

16.1	תחום הגדרה, אסימפטוטות ונקודות אי-רציפות ("חור")	38 תרגילים
16.2	נגזרת, נקודות קיצון וחקירה מלאה של פונקציית מנה	34 תרגילים
16.3	נגזרת שנייה, תחומי קעירות ונקודות פיתול	31 תרגילים
16.4	הטרנספורמציה $\frac{1}{f(x)}$	31 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

▶ חור או אסימפטוטה? איך יודעים בפונקציית מנה
YouTube · 6:11

▶ חקירת פונקציית מנה עם פרמטר
YouTube · 21:40

▶ פונקציית מנה – תרגיל מסכם ודגשים
YouTube · 20:40

▶ הטרנספורמציה 1/f(x) – איך משרטטים "אחת חלקי" פונקציה?
YouTube · 9:40

🎛️ המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף



מעבדת פונקציית מנה

שנו את a, b, c בפונקציה $f(x)=\frac{ax+b}{x-c}$ וראו את האסימפטוטות זזות; הוסיפו גורם מצטמצם וגלו איך נוצר חור.



הטרנספורמציה $\frac{1}{f(x)}$

גרף $f(x)$ וגרף $\frac{1}{f(x)}$ זה לצד זה: אפסים הופכים לאסימפטוטות ומקסימום הופך למינימום.

16.1 תחום הגדרה, אסימפטוטות ונקודות אי-רציפות ("חור")

תחום ההגדרה: המכנה שונה מאפס. אם המכנה מתאפס והמונה לא – **אסימפטוטה אנכית**; אם גם המונה מתאפס והגורם מצטמצם לגמרי – **חור**. אסימפטוטה אופקית: מעלה במונה קטנה ממעלה במכנה – $y=0$; מעלות שוות – יחס המקדמים המובילים; מעלת המונה גדולה – אין.

צפו לפני שמתחילים:

חור או אסימפטוטה? איך יודעים בפונקציית מנה
YouTube · 6:11

פונקציה רציונלית – תחום הגדרה ואסימפטוטה אנכית
YouTube · 7:58

חקירת פונקציה – מציאת אסימפטוטה אופקית
YouTube · 10:53

חקירת פונקציות – נקודת אי-רציפות "חור"
YouTube · 9:09

1 $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטות של $f(x)$ המאונכות לצירים.

2 $f(x)=\frac{5}{x+4}$. מצאו את האסימפטוטות של $f(x)$. מדוע האסימפטוטה האופקית היא דווקא ציר x?

3 $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$. מהו תחום ההגדרה? האם ב-$x=2$ יש לגרף אסימפטוטה אנכית או נקודת אי-רציפות? מצאו אותה.

4 $f(x)=\frac{x}{x^2-9}$. מצאו את כל האסימפטוטות של $f(x)$.

5 $f(x)=\frac{3x^2+1}{x^2+1}$. הראו שהפונקציה מוגדרת לכל x, ומצאו את האסימפטוטה האופקית.

6 $f(x)=\frac{x^2+2x}{x+2}$. מצאו את נקודת האי-רציפות של $f(x)$. לאיזה ישר שווה הגרף בשאר התחום?

7 $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$. מצאו את האסימפטוטות ואת נקודת האי-רציפות של $f(x)$.

8 $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$. פרקו את המונה ואת המכנה, ומצאו את האסימפטוטות ואת נקודת האי-רציפות.

9 $f(x)=\frac{4x-8}{2x+6}$. מצאו את האסימפטוטות. שימו לב למקדמים במונה ובמכנה.

10 $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$. האם יש לגרף אסימפטוטה אופקית? נמקו. מצאו את האסימפטוטה האנכית.

11 $f(x)=\frac{x+3}{x^2+x-6}$. מצאו את תחום ההגדרה, את האסימפטוטה האנכית ואת נקודת האי-רציפות.

12 $f(x)=\frac{2x^2-8}{x^2-4x+4}$. האם הגורם $(x-2)$ מצטמצם כך שנוצר חור? מצאו את האסימפטוטות.

13 $f(x)=\frac{6}{x^2+4}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטות. מדוע אין אסימפטוטה אנכית?

14 $f(x)=\frac{x^3-x}{x^2-1}$. מצאו את כל נקודות האי-רציפות של $f(x)$. כיצד נראה הגרף?

15 $f(x)=\frac{1-x^2}{x^2+2x-3}$. מצאו את האסימפטוטות ואת נקודת האי-רציפות.

16 $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2+1}$. מצאו את נקודות החיתוך של $f(x)$ עם הצירים ואת האסימפטוטה האופקית.

17 $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4x}$. מצאו את תחום ההגדרה, את האסימפטוטות ואת נקודות החיתוך עם הצירים.

18 $f(x)=\frac{ax+3}{x-b}$. לגרף $f(x)$ אסימפטוטה אנכית $x=2$ ואסימפטוטה אופקית $y=4$. מצאו את a ואת b, ומצאו את נקודות החיתוך של $f(x)$ עם הצירים.

19 $f(x)=\frac{ax-1}{x+b}$. האסימפטוטה האנכית של $f(x)$ היא $x=-5$ והאסימפטוטה האופקית היא $y=-3$. מצאו את a ואת b.

20 $f(x)=\frac{ax^2+1}{x^2-b}$. לגרף $f(x)$ אסימפטוטה אופקית $y=2$, ואחת האסימפטוטות האנכיות היא $x=3$. מצאו את a ואת b ואת האסימפטוטה האנכית השנייה.

21 $f(x)=\frac{x^2+ax}{x-3}$. מצאו את a שעבורו לגרף $f(x)$ יש נקודת אי-רציפות (חור) ב-$x=3$, ומצאו את הנקודה.

22 $f(x)=\frac{x+a}{x^2-4}$. מצאו את ערכי a שעבורם יש לגרף $f(x)$ אסימפטוטה אנכית אחת בלבד, ועבור כל ערך מצאו אותה.

23 $f(x)=\frac{x^2+4}{x^2-4x}$. מצאו את האסימפטוטות. האם הגרף חותך את ציר x? נמקו.

24 $f(x)=\frac{2x^2+x}{x^2+1}$. מצאו את האסימפטוטה האופקית, ובדקו אם הגרף חותך אותה. אם כן – מצאו את נקודת החיתוך.

25 $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$. לאן שואף $f(x)$ כאשר x מתקרב ל-1 מימין ומשמאל? מה מיוחד באסימפטוטה האנכית הזו?

26 $f(x)=\frac{x}{x+2}$. לאן שואף $f(x)$ כאשר $x\to -2^+$ וכאשר $x\to -2^-$?

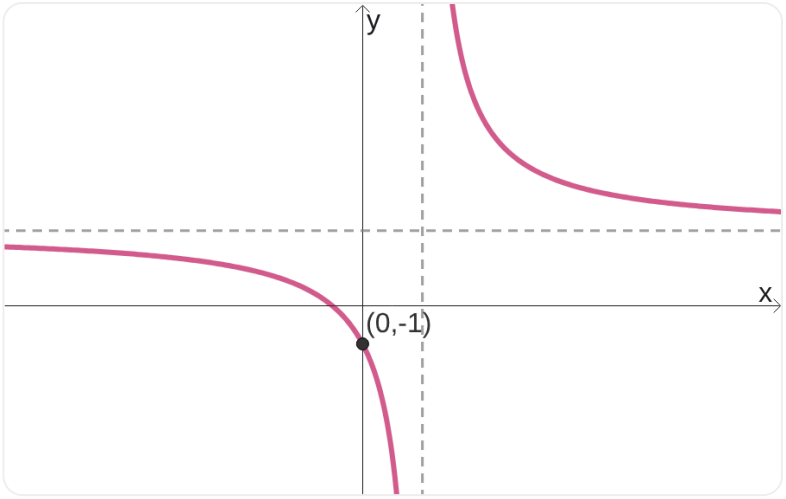
27 $f(x)=\frac{3}{x^3-4x}$. מהו תחום ההגדרה של $f(x)$? כמה אסימפטוטות אנכיות יש לה?

28 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x}$. מצאו את האסימפטוטות, את נקודת האי-רציפות ואת נקודות החיתוך עם הצירים.

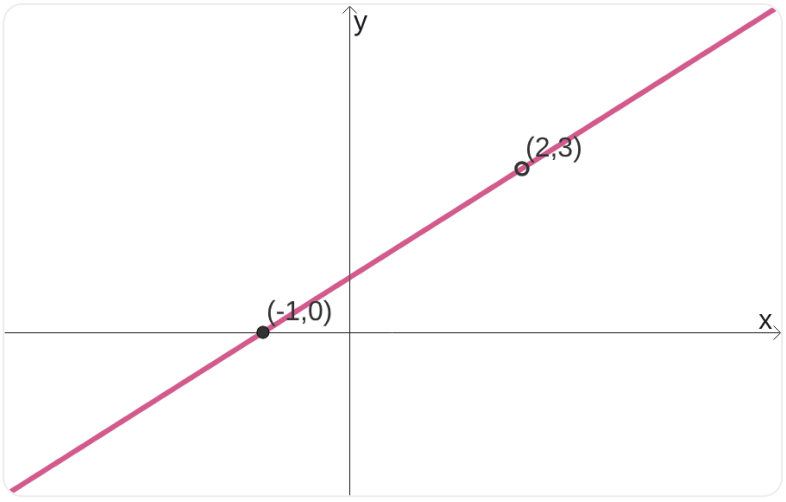
29 $f(x)=\frac{x-3}{x^2+9}$. מצאו את האסימפטוטות ואת נקודות החיתוך עם הצירים.

30 $f(x)=\frac{ax+2}{bx-6}$. לגרף $f(x)$ אסימפטוטה אנכית $x=2$ ואסימפטוטה אופקית $y=2$. מצאו את a ואת b.

31 בציור גרף הפונקציה $f(x)=\frac{2x+b}{x-c}$ ואסימפטוטות שלה (בקו מקווקו): $x=1$ ו-$y=2$. הגרף חותך את ציר y בנקודה $(0,-1)$. מצאו את b ואת c, ואת נקודת החיתוך עם ציר x.



32 בציור גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x-2}$. לגרף נקודת אי-רציפות $(2,3)$, והוא חותך את ציר x ב-$(-1,0)$. מצאו את a ואת b.



33 $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-4}$. האם יש לגרף אסימפטוטות? תארו את הגרף ומצאו את נקודות האי-רציפות.

34 $f(x)=\frac{2x-1}{x^2+bx+9}$. לאילו ערכי b אין לגרף $f(x)$ אסימפטוטה אנכית?

35 $f(x)=\frac{x}{x^2+a}$. לגרף $f(x)$ שתי אסימפטוטות אנכיות: $x=2$ ו-$x=-2$. מצאו את a ואת האסימפטוטה האופקית.

36 $f(x)=\frac{6x}{2x-1}$. מצאו את האסימפטוטות. אחר כך מצאו נקודה על הגרף שבה $f(x)=2$.

37 $f(x)=\frac{x^2-6x+9}{x-3}$. האם ב-$x=3$ יש לגרף אסימפטוטה אנכית? מצאו את נקודת האי-רציפות והראו שהיא על ציר x.

38 $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+1}$. צמצמו את הביטוי. האם הגורם המצטמצם יוצר חור או אסימפטוטה? מצאו את האסימפטוטות.

✔ תשובות סופיות – נושא 16.1

1. תחום: $x \neq 3$; אנכית: $x = 3$; אופקית: $y = 2$
2. אנכית: $x = -4$; אופקית: $y = 0$ – מעלת המונה קטנה ממעלת המכנה
3. תחום: $x \neq 2$; נקודת אי-רציפות (חור): $(2, 4)$
4. אנכיות: $x = -3$, $x = 3$; אופקית: $y = 0$
5. תחום: כל x ; $y = 3$
6. $(-2, -2)$; הגרף הוא הישר $y = x$ ללא הנקודה
7. אנכית: $x = -1$; אופקית: $y = 0$; חור: $(1, \frac{1}{2})$
8. אנכית: $x = -2$; אופקית: $y = 1$; חור: $(2, -\frac{1}{4})$
9. אנכית: $x = -3$; אופקית: $y = 2$
10. אין אסימפטוטה אופקית (מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה) ; אנכית: $x = 1$
11. תחום: $x \neq -3,\ 2$; אנכית: $x = 2$; חור: $(-3, -\frac{1}{5})$
12. אין חור (נשאר גורם $(x - 2)$ במכנה) ; אנכית: $x = 2$; אופקית: $y = 2$
13. תחום: כל x ; אין אסימפטוטה אנכית ($x^2 + 4 > 0$) ; אופקית: $y = 0$
14. $(-1, -1)$, $(1, 1)$; הגרף הוא הישר $y = x$ ללא שתי הנקודות
15. אנכית: $x = -3$; אופקית: $y = -1$; חור: $(1, -\frac{1}{2})$
16. ציר x: $(-3, 0)$, $(3, 0)$; ציר y: $(0, -9)$; $y = 1$
17. תחום: $x \neq 0,\ 4$; אנכית: $x = 0$, $x = 4$; אופקית: $y = 0$; ציר x: $(2, 0)$; ציר y: אין
18. $a = 4$, $b = 2$; ציר x: $(-\frac{3}{4}, 0)$; ציר y: $(0, -\frac{3}{2})$
19. $a = -3$, $b = 5$
20. $a = 2$, $b = 9$; $x = -3$
21. $a = -3$; $(3, 3)$
22. $a = -2$: $x = -2$; $a = 2$: $x = 2$
23. אנכיות: $x = 0$, $x = 4$; אופקית: $y = 1$; לא חותך ($x^2 + 4 > 0$)

24 $y=2$; חותך ב-$(2,2)$

25 משני הצדדים $f(x)\to\infty$ – הגרף עולה משני צידי האסימפטוטה $x=1$

26 $x\to -2^+ : f(x)\to -\infty$; $x\to -2^- : f(x)\to \infty$

27 תחום: $x\neq -2,\ 0,\ 2$; שלוש: $x=-2$, $x=0$, $x=2$

28 אנכית: $x=0$; אופקית: $y=1$; חור: $(-1,2)$; ציר x: $(1,0)$; ציר y: אין

29 אין אסימפטוטה אנכית ; אופקית: $y=0$; ציר x: $(3,0)$; ציר y: $(0,-\frac{1}{3})$

30 $a=6$, $b=3$

31 $c=1$, $b=1$; $(-\frac{1}{2},0)$

32 $a=-1$, $b=-2$

33 אין אסימפטוטות ; הגרף הוא הישר $y=1$ ללא $(-2,1)$, $(2,1)$

34 $-6<b<6$

35 $a=-4$; $y=0$

36 אנכית: $x=\frac{1}{2}$; אופקית: $y=3$; $(-1,2)$

37 אין אסימפטוטה ; חור: $(3,0)$

38 אסימפטוטה (לא חור) ; אנכית: $x=-1$; אופקית: $y=0$

16.2 נגזרת, נקודות קיצון וחקירה מלאה של פונקציית מנה

גוזרים בכלל המנה: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$. נקודות חשודות: $f'(x)=0$ בתוך התחום. מסווגים בטבלת סימנים – וזוכרים לשים בטבלה גם את האסימפטוטות האנכיות!

צפו לפני שמתחילים:

חקירת פונקציית מנה עם פרמטר
YouTube · 21:40

פונקציית מנה – תרגיל מסכם ודגשים
YouTube · 20:40

איך מסווגים נקודת קיצון עם פרמטר?
YouTube · 12:32

קשר גרף נגזרת – אסימפטוטות
YouTube · 10:07

1 $f(x)=\frac{3x+1}{x-2}$. גזרו את $f(x)$ והראו שהפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

2 $f(x)=x+\frac{4}{x}$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן.

3 $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$. מצאו את $f'(x)$ ואת נקודות הקיצון. האם ערך המקסימום גדול מערך המינימום?

4 $f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x-2}$. חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, אסימפטוטות, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

5 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. מצאו את נקודות הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה.

6 $f(x)=\frac{4x}{x^2+4}$. מצאו את נקודות הקיצון ואת תחום הערכים של $f(x)$.

7 $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}$. חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, אסימפטוטות, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

8 $f(x)=\frac{1}{x^2-2x+2}$. הראו שאין לפונקציה אסימפטוטה אנכית, ומצאו את נקודת הקיצון ואת האסימפטוטה האופקית.

9 $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$. חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, אסימפטוטות, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

10 $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$. מצאו את נקודת הקיצון של $f(x)$. היכן היא נמצאת ביחס לציר x?

11 $f(x)=\frac{2x}{(x-1)^2}$. מצאו את $f'(x)$ ואת נקודת הקיצון. לאן שואף $f(x)$ משני צידי $x=1$?

12 $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$. הראו שהמכנה חיובי לכל x, ומצאו את נקודות הקיצון ואת האסימפטוטה האופקית.

13 $f(x)=\frac{x^3}{x^2-3}$. מצאו את הנקודות שבהן $f'(x)=0$. האם כולן נקודות קיצון? נמקו.

14 $f(x)=\frac{x-2}{x^2}$. חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, אסימפטוטות, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

15 $f(x)=\frac{8}{x^2+4x+8}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת תחום הערכים של $f(x)$.

16 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$. מצאו את נקודת הקיצון. האם הגרף יכול להגיע לאסימפטוטה האופקית?

17 $f(x)=\frac{x^2+a}{x}$. ידוע ש-$f(x)$ יש נקודת קיצון ב-$x=3$. מצאו את a ואת שתי נקודות הקיצון של $f(x)$.

18 $f(x)=\frac{ax}{x^2+b}$. לפונקציה נקודת מקסימום $(2,1)$. מצאו את a ואת b.

19 $f(x)=\frac{x^2+ax}{x-1}$. ל-$f(x)$ נקודת קיצון ב-$x=3$. מצאו את a, את נקודות הקיצון וקבעו את סוגן.

20 $f(x)=\frac{x+a}{x^2+3}$. ל-$f(x)$ נקודת קיצון ב-$x=1$. מצאו את a ואת נקודות הקיצון של $f(x)$.

21 $f(x)=\frac{ax^2}{(x-b)^2}$. לגרף $f(x)$ אסימפטוטה אופקית $y=1$ ואסימפטוטה אנכית $x=2$. מצאו את a ואת b, וחקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, אסימפטוטות, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

22 $f(x)=\frac{ax^2+1}{x^2-b}$. האסימפטוטה האופקית של $f(x)$ היא $y=2$, ואחת האסימפטוטות האנכיות היא $x=2$. מצאו את a ואת b ואת נקודת הקיצון של $f(x)$.

23 $f(x)=\frac{x}{(x-2)^2}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

24 $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x-3}$. האם יש ל-$f(x)$ נקודות קיצון? נמקו בעזרת צמצום הביטוי.

25 $f(x)=x+\frac{1}{x}$. מצאו את נקודות הקיצון, ובעזרתן קבעו לאילו ערכי k אין פתרון למשוואה $f(x)=k$.

26 $f(x)=\frac{x^2}{x+3}$. חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, אסימפטוטות, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

27 $f(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}$. מצאו את $f'(x)$, את נקודת הקיצון ואת סוגה.

28 $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$. חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, אסימפטוטות, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

29 $f(x)=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$. הראו ש-$f'(x)=\frac{8}{(x-2)^3}$, וקבעו את תחומי העלייה והירידה.

30 $f(x)=\frac{x^2+5}{x-2}$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$. מהו המרחק האנכי בין שתי נקודות הקיצון?

31 $f(x)=\frac{9x}{x^2+9}$. מצאו את נקודות הקיצון. הראו שהגרף סימטרי ביחס לראשית.

32 $f(x)=\frac{x^2-x+4}{x-1}$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$. האם יש לגרף נקודות חיתוך עם ציר x?

33 $f(x)=\frac{4-x^2}{x^2+4}$. מצאו את נקודת הקיצון, את נקודות החיתוך עם הצירים ואת האסימפטוטה האופקית.

34 $f(x)=\frac{x^2+a}{x-1}$. ידוע ש-$f'(3)=0$. מצאו את a, ומצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$.

✔ תשובות סופיות – נושא 16.2

1. $f'(x)=-\frac{7}{(x-2)^2}$; $f'(x)<0$; עולה: אין ; יורדת: $x<2$,$x>2$
2. $(-2,-4)$ מקסימום, $(2,4)$ מינימום
3. $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$; $(0,0)$ מקסימום, $(2,4)$ מינימום ; לא – המקסימום קטן מהמינימום
4. תחום: $x\neq 2$; אנכית: $x=2$; אופקית: אין אסימפטוטה אופקית ; ציר x: אין ; ציר y: $(0,-2)$; קיצון: $(0,-2)$ מקסימום, $(4,6)$ מינימום ; עולה: $x<0$,$x>4$; יורדת: $0<x<2$,$2<x<4$
5. $(-1,-\frac{1}{2})$ מינימום, $(1,\frac{1}{2})$ מקסימום ; עולה: $-1<x<1$; יורדת: $x<-1$,$x>1$
6. $(-2,-1)$ מינימום, $(2,1)$ מקסימום ; $-1\leq y\leq 1$
7. תחום: $x\neq 2$; אנכית: $x=2$; אופקית: אין אסימפטוטה אופקית ; ציר x: $(-\sqrt{3},0)$, $(\sqrt{3},0)$; ציר y: $(0,\frac{3}{2})$; קיצון: $(1,2)$ מקסימום, $(3,6)$ מינימום ; עולה: $x<1$,$2<x<3$; יורדת: $1<x<2$,$x>3$
8. אין אסימפטוטה אנכית ; $(1,1)$ מקסימום ; $y=0$
9. תחום: $x\neq -2,\ 2$; אנכית: $x=-2$,$x=2$; אופקית: $y=1$; ציר x: $(0,0)$; ציר y: $(0,0)$; קיצון: $(0,0)$ מקסימום ; עולה: $x<-2$,$-2<x<0$; יורדת: $0<x<2$,$x>2$
10. $(1,0)$ מינימום – על ציר x (הגרף משיק לציר)
11. $f'(x)=-\frac{2(x+1)}{(x-1)^3}$; $(-1,-\frac{1}{2})$ מינימום ; משני הצדדים $f(x)\to\infty$
12. $(-1,\frac{1}{3})$ מינימום, $(1,3)$ מקסימום ; $y=1$
13. $x=0,\pm 3$; קיצון: $(-3,-\frac{9}{2})$ מקסימום, $(3,\frac{9}{2})$ מינימום ; ב-$x=0$ אין קיצון (הנגזרת לא מחליפה סימן)
14. תחום: $x\neq 0$; אנכית: $x=0$; אופקית: $y=0$; ציר x: $(2,0)$; ציר y: אין ; קיצון: $(4,\frac{1}{8})$ מקסימום ; עולה: $0<x<4$; יורדת: $x<0$,$x>4$
15. $(-2,2)$ מקסימום ; $0<y\leq 2$
16. $(0,-1)$ מינימום ; לא – $f(x)<1$ לכל x
17. $a=9$; $(-3,-6)$ מקסימום, $(3,6)$ מינימום
18. $a=4$,$b=4$

19 $a=3$; $(-1,1)$ מקסימום, $(3,9)$ מינימום

20 $a=1$; $(-3,-\frac{1}{6})$ מינימום, $(1,\frac{1}{2})$ מקסימום

21 $a=1$, $b=2$; תחום: $x\neq 2$; אנכית: $x=2$; אופקית: $y=1$; ציר x: $(0,0)$; ציר y: $(0,0)$; קיצון: $(0,0)$ מינימום ; עולה: $0<x<2$; יורדת: $x<0$, $x>2$

22 $a=2$, $b=4$; $(0,-\frac{1}{4})$ מקסימום

23 $(-2,-\frac{1}{8})$ מינימום ; עולה: $-2<x<2$; יורדת: $x<-2$, $x>2$

24 אין – $f(x)=x+1$ (ללא $(3,4)$), ישר עולה

25 $(-1,-2)$ מקסימום, $(1,2)$ מינימום ; $-2<k<2$

26 תחום: $x\neq -3$; אנכית: $x=-3$; אופקית: אין אסימפטוטה אופקית ; ציר x: $(0,0)$; ציר y: $(0,0)$; קיצון: $(-6,-12)$ מקסימום, $(0,0)$ מינימום ; עולה: $x<-6$, $x>0$; יורדת: $-6<x<-3$, $-3<x<0$

27 $f'(x)=-\frac{x-3}{(x+1)^3}$; $(3,\frac{1}{8})$ מקסימום

28 תחום: $x\neq -1,\ 1$; אנכית: $x=-1$, $x=1$; אופקית: $y=1$; ציר x: אין ; ציר y: $(0,-1)$; קיצון: $(0,-1)$ מקסימום ; עולה: $-1<x<0$, $0<x<1$; יורדת: $x<-1$, $x>1$

29 עולה: $x>2$; יורדת: $x<2$

30 $(-1,-2)$ מקסימום, $(5,10)$ מינימום ; 12

31 $(-3,-\frac{3}{2})$ מינימום, $(3,\frac{3}{2})$ מקסימום ; $f(-x)=-f(x)$

32 $(-1,-3)$ מקסימום, $(3,5)$ מינימום ; אין ($x^2-x+4>0$)

33 $(0,1)$ מקסימום ; ציר x: $(-2,0)$, $(2,0)$; ציר y: $(0,1)$; $y=-1$

34 $a=3$; $(-1,-2)$ מקסימום, $(3,6)$ מינימום

16.3 נגזרת שנייה, תחומי קעירות ונקודות פיתול

$f''(x) > 0$ – הגרף קעור כלפי מעלה ∪; $f''(x) < 0$ – קעור כלפי מטה ∩. נקודת פיתול – נקודה בתחום שבה הקעירות מתחלפת. לא כל נקודה שבה $f''(x) = 0$ היא נקודת פיתול!

צפו לפני שמתחילים:

נקודות פיתול וקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת השנייה
YouTube · 11:34

נקודות פיתול עם היגיון – תרגול והסברים
YouTube · 16:05

תרגול בסיס – נקודות פיתול
YouTube · 5:50

1. $f(x) = \frac{1}{x}$. מצאו את $f''(x)$ ואת תחומי הקעירות. האם יש לגרף נקודת פיתול? נמקו.
2. $f(x) = \frac{1}{x^2}$. מצאו את תחומי הקעירות של $f(x)$.
3. $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$. מצאו את נקודות הפיתול של $f(x)$ ואת תחומי הקעירות.
4. $f(x) = \frac{12}{x^2+12}$. מצאו את נקודות הפיתול של $f(x)$.
5. $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$. מצאו את תחומי הקעירות ואת נקודות הפיתול של $f(x)$.
6. $f(x) = x + \frac{1}{x}$. הראו ש- $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, וקבעו באיזה תחום הגרף קעור כלפי מעלה.
7. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. מצאו את $f''(x)$ ואת תחומי הקעירות.
8. $f(x) = x^3 - 3x^2$. מצאו את נקודת הפיתול ואת תחומי הקעירות.
9. $f(x) = x^4 - 6x^2$. מצאו את נקודות הפיתול של $f(x)$.

10 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$. מצאו את נקודות הקיצון ואת נקודת הפיתול. הראו שנקודת הפיתול היא אמצע הקטע שבין נקודות הקיצון.

11 $f(x)=x^4-4x^3$. מצאו את הנקודות שבהן $f''(x)=0$. האם בכולן יש נקודת פיתול?

12 $f(x)=x^4$. הראו ש-$f''(0)=0$ אך $(0,0)$ אינה נקודת פיתול.

13 $f(x)=(x-1)^3+2$. מצאו את נקודת הפיתול. האם היא גם נקודת קיצון?

14 $f(x)=x^3+ax^2+5$. לגרף $f(x)$ נקודת פיתול ב-$x=1$. מצאו את a ואת נקודת הפיתול.

15 $f(x)=ax^3+bx^2$. לגרף $f(x)$ נקודת פיתול $(1,-2)$. מצאו את a ואת b.

16 $f(x)=\frac{x}{x^2+a}$ כאשר $a>0$. אחת מנקודות הפיתול של $f(x)$ היא ב-$x=3$. מצאו את a ואת כל נקודות הפיתול.

17 $f(x)=x+\frac{a}{x}$. לאילו ערכי a הגרף קעור כלפי מטה לכל $x>0$?

18 $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$. מצאו את $f''(x)$ וקבעו את תחומי הקעירות.

19 $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$. מצאו את נקודות הפיתול של $f(x)$ (כולל נקודה בראשית).

20 $f(x)=\frac{x^3}{x^2+3}$. מצאו את נקודות הפיתול של $f(x)$. רמז: $f''(x)=\frac{6x(9-x^2)}{(x^2+3)^3}$.

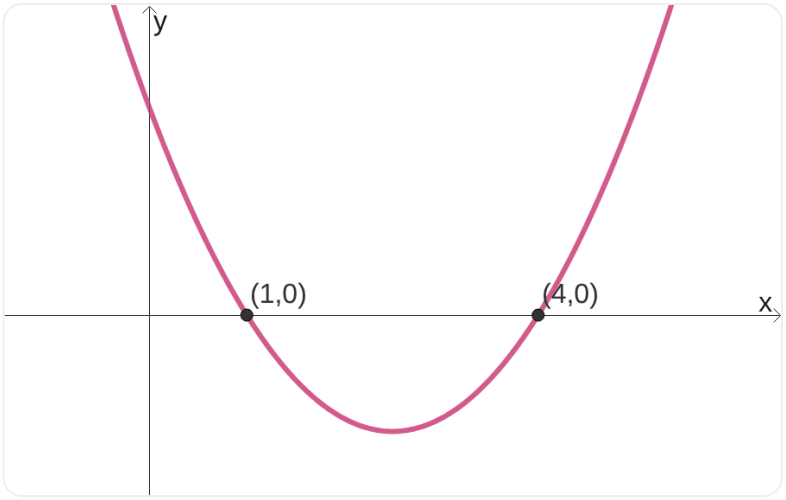
21 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$. מצאו את תחומי הקעירות. הסבירו מדוע אין לגרף נקודת פיתול.

22 $f(x)=x^3-12x$. מצאו את נקודות הקיצון והפיתול, וסרטטו סקיצה.

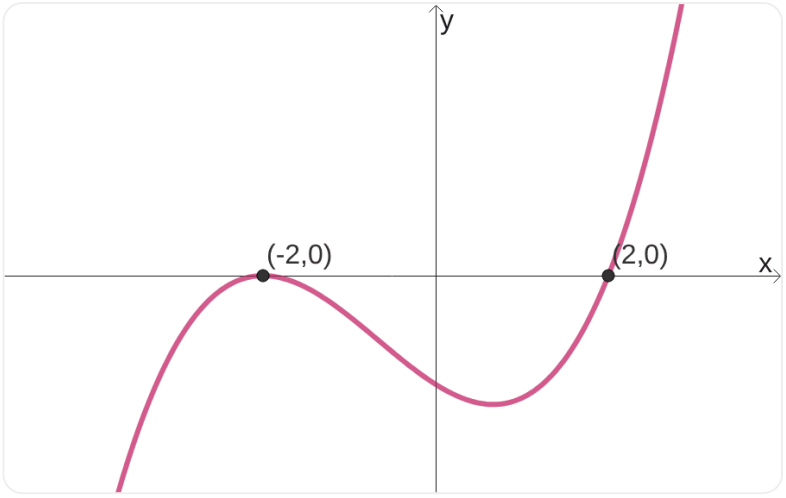
23 $f(x)=-x^3+3x^2+1$. מצאו את תחומי הקעירות של $f(x)$.

24 $f(x)=x^4-4x^3+6x^2$. הראו שהגרף קעור כלפי מעלה לכל x.

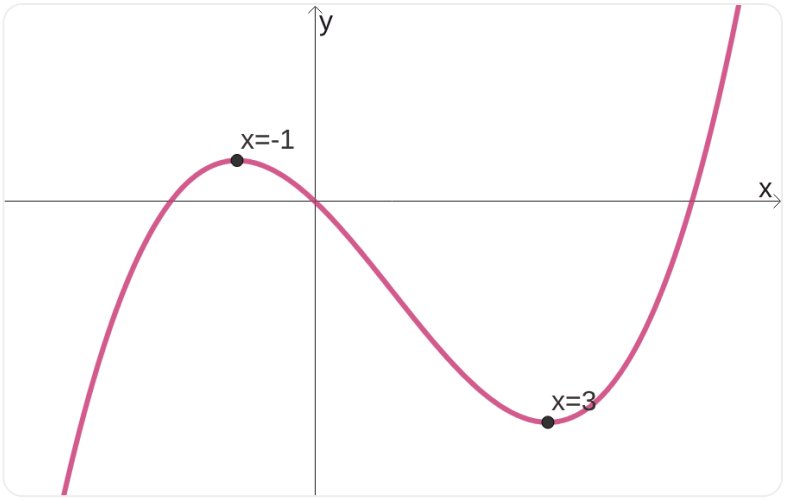
25 בציור גרף הפונקציה $f''(x)$ (הנגזרת השנייה). היעזרו בגרף ומצאו את תחומי הקעירות של $f(x)$ ואת שיעורי ה-x של נקודות הפיתול.



26 בציור גרף הפונקציה $f''(x)$. ב-$x=-2$ הגרף משיק לציר x. מצאו את שיעורי ה-x של נקודות הפיתול של $f(x)$. האם ב-$x=-2$ יש נקודת פיתול?



27 בציור גרף הנגזרת $f'(x)$. נקודות הקיצון של $f'(x)$ הן $x=-1$ ו-$x=3$. מה ניתן לומר על הפונקציה $f(x)$ בנקודות אלה? מצאו את תחומי הקעירות של $f(x)$.



28 $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$. מצאו את $f''(x)$, את תחומי הקעירות, והראו שאין לגרף נקודות פיתול.

29 $f(x)=\frac{4}{x^2+4x+5}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת תחומי הקעירות של $f(x)$. רמז: הפיתול ב-$x=-2\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

30 פונקציה $f(x)$ מקיימת: $f''(x)>0$ עבור $x<2$, ו-$f''(x)<0$ עבור $x>2$, ו-$f(2)=5$. מהי נקודת הפיתול? סרטטו סקיצה אפשרית.

31 $f(x)=x^5-5x^4$. מצאו את נקודות הפיתול של $f(x)$. שימו לב לנקודה שבה $f''(x)$ לא מחליפה סימן.

✔ תשובות סופיות – נושא 16.3

1	$f''(x)=\frac{2}{x^3}$; קעורה כלפי מעלה ∪: $x>0$; קעורה כלפי מטה ∩: $x<0$; אין – $x=0$ לא בתחום
2	קעורה כלפי מעלה ∪: $x<0$, $x>0$; קעורה כלפי מטה ∩: אין
3	קעורה כלפי מעלה ∪: $-3<x<0$, $x>3$; קעורה כלפי מטה ∩: $x<-3$, $0<x<3$; פיתול: $(-3,-\frac{1}{4})$, $(0,0)$, $(3,\frac{1}{4})$
4	$(-2,\frac{3}{4})$, $(2,\frac{3}{4})$
5	קעורה כלפי מעלה ∪: $x<-1$, $x>1$; קעורה כלפי מטה ∩: $-1<x<1$; פיתול: $(-1,\frac{3}{2})$, $(1,\frac{3}{2})$
6	קעורה כלפי מעלה: $x>0$
7	$f''(x)=\frac{4}{(x-1)^3}$; קעורה כלפי מעלה ∪: $x>1$; קעורה כלפי מטה ∩: $x<1$
8	קעורה כלפי מעלה ∪: $x>1$; קעורה כלפי מטה ∩: $x<1$; פיתול: $(1,-2)$
9	$(-1,-5)$, $(1,-5)$
10	$(1,5)$ מקסימום, $(3,1)$ מינימום ; פיתול: $(2,3)$
11	$x=0$, $x=2$; פיתול בשתיהן: $(0,0)$, $(2,-16)$
12	$f''(x)=12x^2\geq 0$ – אין החלפת קעירות
13	פיתול: $(1,2)$; לא – זו נקודת פיתול עם משיק אופקי
14	$a=-3$; $(1,3)$
15	$a=1$, $b=-3$
16	$a=3$; $(-3,-\frac{1}{4})$, $(0,0)$, $(3,\frac{1}{4})$
17	$a<0$
18	$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$; קעורה כלפי מעלה ∪: $x>1$; קעורה כלפי מטה ∩: $x<1$
19	$(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$, $(0,0)$, $(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$
20	$(-3,-\frac{9}{4})$, $(0,0)$, $(3,\frac{9}{4})$

21 קעורה כלפי מעלה $\cup$: $x<-1$, $x>1$; קעורה כלפי מטה $\cap$: $-1<x<1$; הקעירות מתחלפת רק באסימפטוטות

22 $(-2,16)$ מקסימום, $(2,-16)$ מינימום ; פיתול: $(0,0)$

23 קעורה כלפי מעלה $\cup$: $x<1$; קעורה כלפי מטה $\cap$: $x>1$

24 $f''(x)=12(x-1)^2\geq 0$; אין נקודות פיתול

25 קעורה כלפי מעלה $\cup$: $x<1$, $x>4$; קעורה כלפי מטה $\cap$: $1<x<4$; פיתול ב-$x=1$ ו-$x=4$

26 פיתול רק ב-$x=2$; ב-$x=-2$ אין פיתול ($f''(x)$ לא מחליפה סימן)

27 ב-$x=-1$ ו-$x=3$ נקודות פיתול של $f(x)$; $\cup$: $x<-1$, $x>3$; $\cap$: $-1<x<3$

28 $f''(x)=-\frac{2}{x^3}$; קעורה כלפי מעלה $\cup$: $x<0$; קעורה כלפי מטה $\cap$: $x>0$

29 $(-2,4)$ מקסימום ; $\cap$: $-2-\frac{1}{\sqrt{3}}<x<-2+\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cup$ מחוץ לקטע

30 $(2,5)$; משמאל $\cup$ ומימין $\cap$

31 פיתול: $(3,-162)$; ב-$x=0$ אין פיתול

16.4 הטרנספורמציה $\frac{1}{f(x)}$

$g(x)=\frac{1}{f(x)}$: באפסים של $f(x)$ – אסימפטוטות אנכיות של $g(x)$; כאשר $f(x)\to\pm\infty$ – $g(x)\to 0$; מקסימום של $f(x)$ (שאינו על ציר x) הופך למינימום של $g(x)$ ולהפך; תחומי העלייה והירידה מתהפכים; הסימן של $g(x)$ זהה לסימן של $f(x)$.

צפו לפני שמתחילים:



הטרנספורמציה 1/f(x) – איך משרטטים "אחת חלקי" פונקציה?
YouTube · 9:40



טרנספורמציות – אחת חלקי f(x)
YouTube · 17:04



קדם אנליזה – פונקציית מנה (1 חלקי הפונקציה)
YouTube · 19:20

1 $f(x)=x^2-4$ ו- $g(x)=\frac{1}{f(x)}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטות של $g(x)$.

2 $f(x)=x^2+2x+5$ ו- $g(x)=\frac{1}{f(x)}$. הראו ש- $f(x)>0$ לכל x. מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)$ ואת תחום הערכים שלה.

3 $f(x)=x^2-6x+8$ ו- $g(x)=\frac{1}{f(x)}$. מצאו את האסימפטוטות האנכיות של $g(x)$ ואת נקודת הקיצון שלה. מה סוג הקיצון?

4 $f(x)=4-x^2$ ו- $g(x)=\frac{1}{f(x)}$. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$, והשוו לתחומים של $f(x)$.

5 $f(x)=(x-1)^2$ ו- $g(x)=\frac{1}{f(x)}$. הנקודה $(1,0)$ היא מינימום של $f(x)$. מה קורה בה לגרף $g(x)$?

6 $f(x)=x^2+1$ ו- $g(x)=\frac{1}{f(x)}$. מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)$, את האסימפטוטה ואת תחום הערכים.

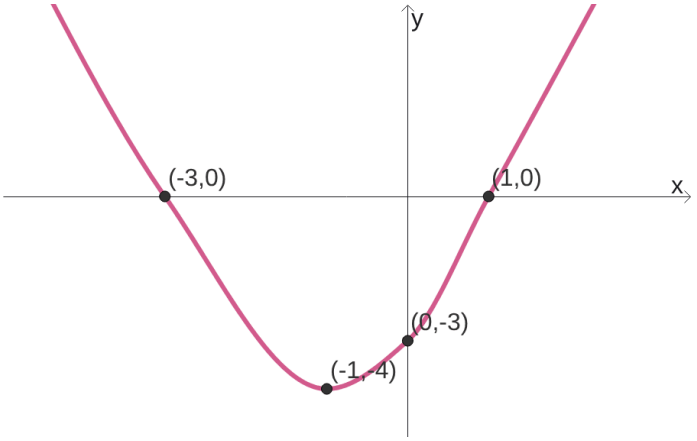
7 $f(x)=x^3-x$ ו- $g(x)=\frac{1}{f(x)}$. כמה אסימפטוטות אנכיות יש ל- $g(x)$? מצאו אותן.

8 $f(x)=x^2-2x$ ו- $g(x)=\frac{1}{f(x)}$. מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$, את נקודת הקיצון ואת התחומים שבהם $g(x)>0$.

9 $f(x)=x^2+4x+3$ ו- $g(x)=\frac{1}{f(x)}$. מצאו את נקודת החיתוך של $g(x)$ עם ציר y. האם $g(x)$ חותכת את ציר x?

10 $f(x)=2x-6$ ו- $g(x)=\frac{1}{f(x)}$. מצאו את האסימפטוטות של $g(x)$, והסבירו מדוע ל-$g(x)$ אין קיצון.

תרגילים 11–15 בציור גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x; בשני הקצוות הגרף עולה לאינסוף. בתרגילים הבאים $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.



גרף הפונקציה $f(x)$

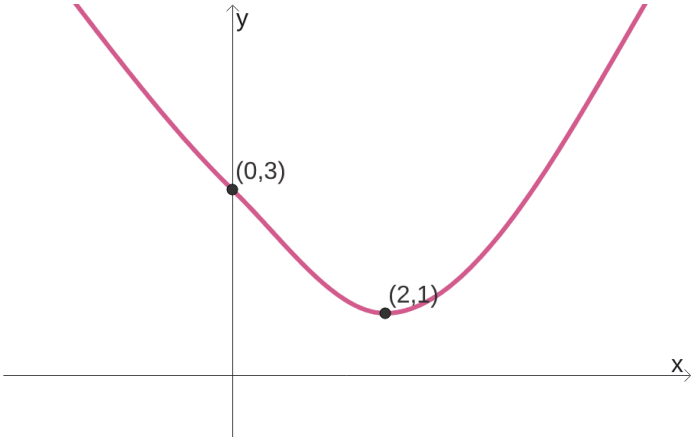
11 מצאו את האסימפטוטות של $g(x)$.

12 מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ וקבעו את סוגה.

13 מצאו את נקודת החיתוך של $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ עם ציר y.

14 מצאו את תחומי העלייה והירידה של $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

15 באילו תחומים $g(x)=\frac{1}{f(x)}<0$? סרטטו סקיצה של $g(x)$.



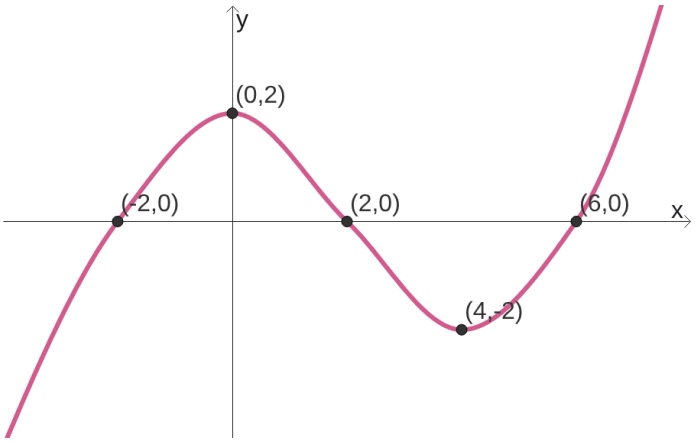
גרף הפונקציה $f(x)$

תרגילים 16–18 בציור גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x; נקודת המינימום שלה $(2,1)$, ובשני הקצוות הגרף עולה לאינסוף. $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

16 מהו תחום ההגדרה של $g(x)$? מצאו את נקודת הקיצון שלה.

17 מהו תחום הערכים של $g(x)=\frac{1}{f(x)}$? מהי האסימפטוטה שלה?

18 מצאו את נקודת החיתוך של $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ עם ציר y, ואת הנקודות שבהן $f(x)=g(x)$.



גרף הפונקציה $f(x)$

תרגילים 19–23 בציור גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x; משמאל הגרף יורד למינוס אינסוף ומימין עולה לאינסוף. $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

19 מצאו את האסימפטוטות האנכיות של $g(x)$.

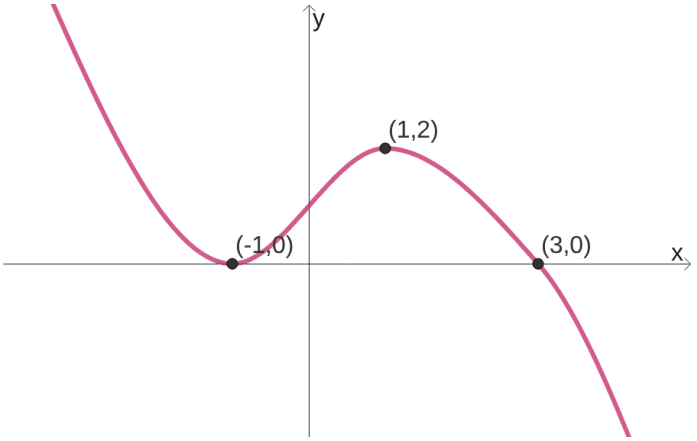
20 מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ וקבעו את סוגן.

21 מצאו את תחומי העלייה של $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

22 לאן שואפת $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ כאשר $x\to\infty$ וכאשר $x\to-\infty$? מצד איזה ציר?

23 כמה פתרונות יש למשוואה $g(x)=2$ כאשר $g(x)=\frac{1}{f(x)}$? היעזרו ב-$f(x)=\frac{1}{2}$.

תרגילים 24–27 בציור גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x; ב-$(-1,0)$ הגרף משיק לציר x. $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.



גרף הפונקציה $f(x)$

24 מצאו את האסימפטוטות האנכיות של $g(x)$. במה שונה ההתנהגות סביב כל אחת?

25 מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ וקבעו את סוגה.

26 מצאו את תחומי הירידה של $g(x)=\frac{1}{f(x)}$, וסרטטו סקיצה שלה.

27 באילו תחומים $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ חיובית?

28 $f(x)$ היא פונקציה שנקודת המקסימום שלה $(3,-2)$ (כלומר $f(x)<0$ לכל x). מה ניתן לומר על נקודת הקיצון של $g(x)=\frac{1}{f(x)}$?

29 ל-$f(x)$ נקודת מינימום $(5,4)$ ונקודת מקסימום $(1,\frac{1}{2})$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ וקבעו את סוגן.

30 $f(x)=x^2-4x+a$, ו-$g(x)=\frac{1}{f(x)}$. לאילו ערכי a אין ל-$g(x)$ אסימפטוטה אנכית? מה נקודת הקיצון של $g(x)$ עבור $a=5$?

31 $f(x)=x^2+bx+9$, ו-$g(x)=\frac{1}{f(x)}$. מצאו את b אם ל-$g(x)$ יש אסימפטוטה אנכית אחת בלבד, $x=3$.

✔ תשובות סופיות – נושא 16.4

1	תחום: $x \neq -2,\ 2$; אנכיות: $x=-2$, $x=2$; אופקית: $y=0$
2	מקסימום $\left(-1,\frac{1}{4}\right)$; $0<y\leq\frac{1}{4}$
3	$x=2$, $x=4$; מקסימום $(3,-1)$
4	עולה: $0<x<2$, $x>2$; יורדת: $x<-2$, $-2<x<0$; הפוכים לאלה של $f(x)$
5	ב-$x=1$ אסימפטוטה אנכית של $g(x)$; $g(x)\to\infty$ משני הצדדים
6	מקסימום $(0,1)$; $y=0$; $0<y\leq 1$
7	שלוש: $x=-1$, $x=0$, $x=1$
8	תחום: $x\neq 0,\ 2$; מקסימום $(1,-1)$; $g(x)>0$: $x<0$ או $x>2$
9	$\left(0,\frac{1}{3}\right)$; לא – $\frac{1}{f(x)}\neq 0$ תמיד
10	אנכית: $x=3$; אופקית: $y=0$; $f(x)$ ישר ללא קיצון
11	אנכיות: $x=-3$, $x=1$; אופקית: $y=0$
12	מקסימום $\left(-1,-\frac{1}{4}\right)$
13	$\left(0,-\frac{1}{3}\right)$
14	עולה: $x<-3$, $-1<x<1$; יורדת: $-3<x<-1$, $x>1$
15	$-3<x<1$
16	כל x ; מקסימום $(2,1)$
17	$0<y\leq 1$; $y=0$
18	$\left(0,\frac{1}{3}\right)$; $(2,1)$ – רק בה $f(x)=1$
19	$x=-2$, $x=2$, $x=6$
20	מקסימום $\left(4,-\frac{1}{2}\right)$, מינימום $\left(0,\frac{1}{2}\right)$
21	$0<x<2$, $2<x<4$
22	$g(x)\to 0$; מימין מעל ציר x , משמאל מתחתיו
23	3 פתרונות

24	$x=-1$: $g(x)\to\infty$ משני הצדדים ; $x=3$: ∞ משמאל ו-$-\infty$ מימין
25	$\left(1,\frac{1}{2}\right)$ מינימום
26	$-1<x<1$ בלבד
27	$x<-1$, $-1<x<3$
28	$\left(3,-\frac{1}{2}\right)$ מינימום
29	$\left(5,\frac{1}{4}\right)$ מקסימום, $(1,2)$ מינימום
30	$a>4$; $(2,1)$ מקסימום
31	$b=-6$

פרק 16 סיכומון סוף פרק – חקירת פונקציית מנה

תחום הגדרה

- המכנה שונה מאפס: פותרים מכנה $= 0$ ומוציאים את הפתרונות מהתחום.
- את התחום קובעים **לפני** כל צמצום.

אסימפטוטה אנכית או חור?

- מאפסים את המכנה ומציבים במונה: מונה $\neq 0$ – **אסימפטוטה אנכית**.
- גם המונה מתאפס – מצמצמים את הגורם המשותף. אם הוא נעלם מהמכנה, זו **נקודת אי-רציפות (חור)**.
- את ה-y של החור מוצאים מהפונקציה המצומצמת.

אסימפטוטה אופקית

- מעלת המונה קטנה ממעלת המכנה: $y = 0$.
- המעלות שוות: y שווה למקדם המוביל במונה חלקי המקדם המוביל במכנה.
- מעלת המונה גדולה יותר: אין אסימפטוטה אופקית.

נגזרת של מנה

- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- המכנה v^2 תמיד חיובי, ולכן הסימן של $f'(x)$ נקבע לפי המונה בלבד.
- קיצון: $f'(x) = 0$, ובטבלה מסמנים גם את האסימפטוטות האנכיות.

פרמטרים

- את a מוצאים מאסימפטוטה אופקית נתונה, לפי היחס בין המקדמים המובילים.
- את b במכנה מוצאים מאסימפטוטה אנכית נתונה: מציבים את ה-x שלה במכנה ומשווים לאפס.

נגזרת שנייה, קעירות ופיתול

- $f''(x) > 0$ – קעורה כלפי מעלה $\cup$, ו-$f''(x) < 0$ – קעורה כלפי מטה $\cap$.
- נקודת פיתול: $f''(x)$ מחליפה סימן בנקודה שבתחום ההגדרה.

הטרנספורמציה $\frac{1}{f(x)}$

- אפס של $f(x)$ הופך לאסימפטוטה אנכית של $\frac{1}{f(x)}$.
- כאשר $f(x) \to \pm\infty$, הפונקציה $\frac{1}{f(x)} \to 0$.
- הסימן נשמר, עלייה הופכת לירידה, ומקסימום הופך למינימום (ולהפך).

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לצמצם לפני שקובעים תחום הגדרה, וכך "לאבד" את החור.
- לכתוב אסימפטוטה אנכית במקום שבו יש בעצם חור (גם המונה מתאפס).
- לקרוא לנקודה שבה $f''(x)$ מחליפה סימן באסימפטוטה "נקודת פיתול".

💡 **הטיפ של אילון:** לפני שגוזרים, תעשו לעצמכם סקיצה מהאסימפטוטות והחיתוכים. ברוב המקרים היא כבר מגלה איפה הקיצון ואיזה סוג הוא, והנגזרת רק מאשרת.

פרק 17

חקירת פונקציית שורש

תחום הגדרה, נגזרת, קיצון קצה – והטרנספורמציות $\sqrt{f(x)}$ ו-$|f(x)|$

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

17.1	תחום הגדרה ונגזרת של פונקציית שורש	34 תרגילים
17.2	חקירת פונקציות שורש ושורש מכפלה	32 תרגילים
17.3	הטרנספורמציות $\sqrt{f(x)}$ ו-$\|f(x)\|$	31 תרגילים

סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



חקירת פונקציית שורש – חקירה מלאה

YouTube · 10:57



חקירת פונקציית שורש – תחום הגדרה

YouTube · 15:15



חקירת פונקציית שורש – נגזרת

YouTube · 11:33



טרנספורמציה – שורש לפונקציה

YouTube · 8:20

המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף



$sqrt{f(x)}\$ ו-$|f(x)|$

בחרו פרבולה $f(x)$ והחליפו בין $\sqrt{f(x)}$ ל-$|f(x)|$: מה נמחק, מה משתקף ואיפה נוצרים קיצונים חדשים.

17.1 תחום הגדרה ונגזרת של פונקציית שורש

שורש ריבועי מוגדר רק כאשר הביטוי שבתוכו ≥ 0; שורש במכנה – רק כאשר הביטוי > 0. נגזרת: $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$. בקצוות התחום הנגזרת לרוב אינה מוגדרת.

צפו לפני שמתחילים:



חקירת פונקציית שורש – תחום הגדרה
YouTube · 15:15



חקירת פונקציית שורש – נגזרת
YouTube · 11:33



חקירת פונקציית שורש
YouTube · 15:58

1 $f(x) = \sqrt{x-3}$. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$.

2 $f(x) = \sqrt{6-2x}$. מצאו את תחום ההגדרה. שימו לב לכיוון אי-השוויון כשמחלקים במספר שלילי.

3 $f(x) = \sqrt{x^2-9}$. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$.

4 $f(x) = \sqrt{16-x^2}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת נקודות החיתוך עם הצירים.

5 $f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$. מצאו את תחום ההגדרה בעזרת סקיצה של הפרבולה x^2-5x+6.

6 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$. מצאו את תחום ההגדרה. מדוע הנקודה $x=1$ אינה בתחום?

7 $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$. מצאו את תחום ההגדרה (שני השורשים צריכים להיות מוגדרים יחד).

8 $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. הראו שהפונקציה מוגדרת לכל x, ומצאו את נקודת החיתוך עם ציר y.

9 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$.

10 $f(x)=\sqrt{x^3-4x}$. מצאו את תחום ההגדרה (היעזרו בטבלת סימנים של $x(x-2)(x+2)$).

11 $f(x)=\sqrt{2x+5}$. גזרו את $f(x)$.

12 $f(x)=\sqrt{x^2+9}$. גזרו את $f(x)$ ומצאו את $f'(4)$.

13 $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$. כתבו את $f(x)$ כחזקה וגזרו.

14 $f(x)=\sqrt{x}\,(x-6)$. גזרו בכלל המכפלה, ומצאו היכן $f'(x)=0$.

15 $f(x)=4\sqrt{x}$. מצאו את $f'(x)$ ואת שיפוע המשיק בנקודה שבה $x=4$.

16 $f(x)=\sqrt{x}-x$. מצאו את הנקודה שבה $f'(x)=0$.

17 $f(x)=\sqrt{25-x^2}$. גזרו את $f(x)$ ומצאו את $f'(3)$.

18 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. כתבו את $f(x)$ כחזקה שלילית וגזרו.

19 $f(x)=\sqrt{3x+1}$. מצאו את משוואת המשיק לגרף $f(x)$ בנקודה שבה $x=5$.

20 $f(x)=\sqrt{x}$. באיזו נקודה שיפוע המשיק לגרף $f(x)$ הוא $\frac{1}{4}$?

21 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$. גזרו את $f(x)$, ומצאו היכן $f'(x)=0$.

22 $f(x)=x\sqrt{x+3}$. גזרו את $f(x)$ והביאו למכנה משותף.

23 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{8-x}$. גזרו את $f(x)$, ופתרו את המשוואה $f'(x)=0$.

24 $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x}}$. גזרו בכלל המנה ופשטו.

25 $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת $f'(x)$.

26 $f(x)=\sqrt{ax+1}$, וידוע ש-$f'(4)=\frac{1}{3}$ (כאשר $a>0$). מצאו את a. (רמז: $f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax+1}}$)

27 $f(x)=\sqrt{x+a}$. גרף $f(x)$ עובר בנקודה $(5,3)$. מצאו את a ואת תחום ההגדרה.

28 $f(x)=\sqrt{a-x^2}$. תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא $-3\le x\le 3$. מצאו את a ואת $f'(x)$.

29 $f(x)=\sqrt{x}$ ו- $g(x)=\frac{x}{2}$. מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים.

30 $f(x)=\sqrt{x+5}$. לאילו ערכי x מתקיים $f(x)<3$? היעזרו בתחום ההגדרה.

31 $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת $f'(x)$. האם הנגזרת מוגדרת בקצוות התחום?

32 $f(x)=-\sqrt{x}+2x$. מצאו את שיפוע המשיק בנקודה $x=\frac{1}{16}$. מה מיוחד בנקודה הזו?

33 $f(x)=\sqrt{-x^2+4x}$. מצאו את תחום ההגדרה, את $f'(x)$ ואת $f'(1)$.

34 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$. גזרו ומצאו את הנקודה שבה $f'(x)=0$.

✔ תשובות סופיות – נושא 17.1

1	$x \geq 3$
2	$x \leq 3$
3	$x \leq -3$ או $x \geq 3$
4	$-4 \leq x \leq 4$; ציר x: $(-4,0)$,$(4,0)$; ציר y: $(0,4)$
5	$x \leq 2$ או $x \geq 3$
6	$x > 1$; המכנה מתאפס
7	$0 \leq x \leq 4$
8	כל x ($x^2+1>0$) ; $(0,1)$
9	$-3 < x < 3$
10	$-2 \leq x \leq 0$ או $x \geq 2$
11	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$
12	$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$; $f'(4) = \frac{4}{5}$
13	$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
14	$f'(x) = \frac{3x-6}{2\sqrt{x}}$; $x = 2$
15	$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$; 1
16	$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$
17	$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$; $f'(3) = -\frac{3}{4}$
18	$f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$
19	$y = \frac{3x}{8} + \frac{17}{8}$
20	$(4,2)$
21	$f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$; $x = 1$
22	$f'(x) = \frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$
23	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{8-x}}$; $x = 4$

24	$f'(x)=\frac{x-2}{2x\sqrt{x}}$
25	$f'(x)=\frac{2-x}{2x^2\sqrt{x-1}}$; $x\geq 1$
26	$a=2$
27	$x\geq -4$; $a=4$
28	$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$; $a=9$
29	$(4,2)$,$(0,0)$
30	$-5\leq x<4$
31	$x\leq 0$ או $x\geq 4$; $f'(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}$; לא
32	0 - משיק אופקי
33	$0\leq x\leq 4$; $f'(x)=\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}$; $f'(1)=\frac{\sqrt{3}}{3}$
34	$\left(1,\frac{1}{2}\right)$; $f'(x)=\frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$

17.2 חקירת פונקציות שורש ושורש מכפלה

בחקירת שורש תמיד בודקים גם את **נקודות הקצה** של התחום – הן יכולות להיות נקודות קיצון ("קיצון קצה"). סוג קיצון הקצה נקבע לפי העלייה או הירידה בסמוך לקצה.

צפו לפני שמתחילים:



חקירת פונקציית שורש – חקירה מלאה

YouTube · 10:57



חקירת פונקציית שורש – נקודות קיצון קצה

YouTube · 3:44



חקירת פונקציית שורש – אסימפטוטה אופקית

YouTube · 7:44

1 $f(x)=\sqrt{x}\,(x-3)$. חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון (כולל קצה) ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

2 $f(x)=x\sqrt{x+3}$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ (כולל קצה) וקבעו את סוגן.

3 $f(x)=-2\sqrt{x}+x$. חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון (כולל קצה) ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

4 $f(x)=\sqrt{x}-\frac{x}{4}$. מצאו את נקודות הקיצון ואת תחום הערכים של $f(x)$.

5 $f(x)=\sqrt{x^2-4x+8}$. הראו שהפונקציה מוגדרת לכל x, ומצאו את נקודת הקיצון שלה.

6 $f(x)=\sqrt{9-x^2}$. מצאו את נקודות הקיצון (כולל קצה). איזו צורה גאומטרית מתקבלת?

7 $f(x)=\sqrt{x^2-6x}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

8 $f(x)=x+\sqrt{4-x}$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ (כולל קצה).

9 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{8-x}$. חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון (כולל קצה) ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

10 $f(x)=x\sqrt{8-x^2}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת נקודות הקיצון הפנימיות של $f(x)$.

11 $f(x)=x^2\sqrt{5-x}$. חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון (כולל קצה) ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

12 $f(x)=\sqrt{-x^2+4x}$. מצאו את נקודות הקיצון (כולל קצה) ואת תחום הערכים של $f(x)$.

13 $f(x)=\sqrt{x}\,(12-x)$. מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודת המקסימום של $f(x)$.

14 $f(x)=-\frac{x}{2}+\sqrt{x+4}$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ (כולל קצה).

15 $f(x)=-x+2\sqrt{x+1}$. חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון (כולל קצה) ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

16 $f(x)=-x+\sqrt{x^2+9}$. הראו ש-$f'(x)<0$ לכל x. מה ניתן להסיק על נקודות קיצון?

17 $f(x)=x^{\frac{3}{2}}-3x$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ (כולל קצה) ואת נקודות החיתוך עם ציר x.

18 $f(x)=\sqrt{-x^2+6x-5}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת נקודת המקסימום של $f(x)$.

19 $f(x)=\sqrt{10-x}+\sqrt{x-2}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת נקודות הקיצון של $f(x)$ (כולל קצה).

20 $f(x)=\sqrt{1-x}\,(x+2)$. חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון (כולל קצה) ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

21 $f(x)=\sqrt{x}+ax$. לפונקציה נקודת קיצון ב-$x=1$. מצאו את a ואת סוג הקיצון.

22 $f(x)=\sqrt{x^2+a}$ כאשר $a>0$. הערך המינימלי של $f(x)$ הוא 3. מצאו את a.

23 $f(x)=a\sqrt{x}-x$. לפונקציה נקודת קיצון ב-$x=4$. מצאו את a, את הנקודה ואת סוגה.

24 $f(x)=\sqrt{x}(x-a)$ כאשר $a>0$. ל-$f(x)$ נקודת קיצון ב-$x=2$. מצאו את a ואת ערך המינימום.

25 $f(x)=\sqrt{x}\,(x-3)$. לאילו ערכי k למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שני פתרונות? היעזרו בנקודות הקיצון.

26 $f(x)=\sqrt{16-x^2}$. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=2$? ולמשוואה $f(x)=4$?

27 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+10}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת תחום הערכים של $f(x)$.

28 $f(x)=\frac{x}{2}+\sqrt{1-x}$. מצאו את נקודות הקיצון (כולל קצה) ואת תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

29 $f(x)=(x-9)\sqrt{x+3}$. חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון (כולל קצה) ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

30 $f(x)=\sqrt{-x^2+2x}$. הראו שגרף $f(x)$ הוא חצי מעגל, ומצאו את מרכזו ואת רדיוסו.

31 $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-3}$. מצאו את תחום ההגדרה והראו ש-$f(x)$ יורדת בכל התחום. מהו הערך הגדול ביותר שלה?

32 $f(x)=-x^{\frac{3}{2}}+3\sqrt{x}$. חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון (כולל קצה) ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

✔ תשובות סופיות – נושא 17.2

1. תחום: $x \geq 0$; ציר x: $(0,0)$, $(3,0)$; ציר y: $(0,0)$; קיצון: $(0,0)$ מקסימום (קצה), $(1,-2)$ מינימום ; עולה: $x > 1$; יורדת: $0 < x < 1$
2. $(-3,0)$ מקסימום (קצה), $(-2,-2)$ מינימום
3. תחום: $x \geq 0$; ציר x: $(0,0)$, $(4,0)$; ציר y: $(0,0)$; קיצון: $(0,0)$ מקסימום (קצה), $(1,-1)$ מינימום ; עולה: $x > 1$; יורדת: $0 < x < 1$
4. $(0,0)$ מינימום (קצה), $(4,1)$ מקסימום ; $y \leq 1$
5. $(2,2)$ מינימום
6. $(-3,0)$ מינימום (קצה), $(0,3)$ מקסימום, $(3,0)$ מינימום (קצה) ; חצי מעגל
7. $x \leq 0$ או $x \geq 6$; עולה: $x > 6$; יורדת: $x < 0$
8. $(\frac{15}{4}, \frac{17}{4})$ מקסימום, $(4,4)$ מינימום (קצה)
9. תחום: $0 \leq x \leq 8$; ציר x: אין ; ציר y: $(0,2\sqrt{2})$; קיצון: $(0,2\sqrt{2})$ מינימום (קצה), $(4,4)$ מקסימום, $(8,2\sqrt{2})$ מינימום (קצה) ; עולה: $0 < x < 4$; יורדת: $4 < x < 8$
10. $-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$; $(-2,-4)$ מינימום, $(2,4)$ מקסימום
11. תחום: $x \leq 5$; ציר x: $(0,0)$, $(5,0)$; ציר y: $(0,0)$; קיצון: $(0,0)$ מינימום, $(4,16)$ מקסימום, $(5,0)$ מינימום (קצה) ; עולה: $0 < x < 4$; יורדת: $x < 0$, $4 < x < 5$
12. $(0,0)$ מינימום (קצה), $(2,2)$ מקסימום, $(4,0)$ מינימום (קצה) ; $0 \leq y \leq 2$
13. ציר x: $(0,0)$, $(12,0)$; ציר y: $(0,0)$; $(4,16)$ מקסימום
14. $(-4,2)$ מינימום (קצה), $(-3,\frac{5}{2})$ מקסימום
15. תחום: $x \geq -1$; ציר x: $(2+2\sqrt{2},0)$; ציר y: $(0,2)$; קיצון: $(-1,1)$ מינימום (קצה), $(0,2)$ מקסימום ; עולה: $-1 < x < 0$; יורדת: $x > 0$
16. אין נקודות קיצון ; $f(x)$ יורדת לכל x
17. $(0,0)$ מקסימום (קצה), $(4,-4)$ מינימום ; ציר x: $(0,0)$, $(9,0)$; ציר y: $(0,0)$
18. $1 \leq x \leq 5$; $(3,2)$ מקסימום
19. $2 \leq x \leq 10$; $(2,2\sqrt{2})$ מינימום (קצה), $(6,4)$ מקסימום, $(10,2\sqrt{2})$ מינימום (קצה)

20 תחום: $x \leq 1$; ציר x: $(-2,0)$, $(1,0)$; ציר y: $(0,2)$; קיצון: $(0,2)$ מקסימום, $(1,0)$ מינימום (קצה) ; עולה: $x < 0$; יורדת: $0 < x < 1$

21 $a = -\frac{1}{2}$; $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ מקסימום

22 $a = 9$

23 $a = 4$; $(4,4)$ מקסימום

24 $a = 6$; $f(2) = -4\sqrt{2}$

25 $-2 < k \leq 0$

26 שני פתרונות ; פתרון אחד

27 $(1,3)$ מינימום ; $y \geq 3$

28 $(0,1)$ מקסימום, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ מינימום (קצה) ; עולה: $x < 0$; יורדת: $0 < x < 1$

29 תחום: $x \geq -3$; ציר x: $(-3,0)$, $(9,0)$; ציר y: $(0,-9\sqrt{3})$; קיצון: $(-3,0)$ מקסימום (קצה), $(1,-16)$ מינימום ; עולה: $x > 1$; יורדת: $-3 < x < 1$

30 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$; מרכז $(1,0)$, רדיוס 1

31 $x \geq 3$; $f(3) = \sqrt{3}$

32 תחום: $x \geq 0$; ציר x: $(0,0)$, $(3,0)$; ציר y: $(0,0)$; קיצון: $(0,0)$ מינימום (קצה), $(1,2)$ מקסימום ; עולה: $0 < x < 1$; יורדת: $x > 1$

17.3 הטרנספורמציות $\sqrt{f(x)}$ ו-$|f(x)|$

$\sqrt{f(x)}$: מוגדרת רק היכן ש-$f(x)\geq 0$; האפסים נשארים; קיצון עם $y>0$ נשאר מאותו סוג (וה-y עובר שורש); העלייה והירידה נשמרות. $|f(x)|$: החלקים שמתחת לציר x משתקפים מעלה; מינימום שלילי הופך למקסימום; בנקודות החיתוך עם ציר x נוצרות נקודות מינימום (לרוב "שפיץ").

צפו לפני שמתחילים:



טרנספורמציה – שורש לפונקציה
YouTube · 8:20



פונקציית השורש – טרנספורמציה: הזזות, מתיחות ושיקופים
YouTube · 4:53



טרנספורמציית ערך מוחלט בפונקציות
YouTube · 4:42



טרנספורמציה ערך מוחלט
YouTube · 3:20

1 $f(x)=x^2-4x+3$ ו-$g(x)=\sqrt{f(x)}$. מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$ ואת נקודות הקיצון שלה (כולל קצה).

2 $f(x)=x^2+2x+5$ ו-$g(x)=\sqrt{f(x)}$. מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)$. מה הקשר לקודקוד הפרבולה?

3 $f(x)=4-x^2$ ו-$g(x)=\sqrt{f(x)}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת תחום הערכים של $g(x)$.

4 $f(x)=x^3-x^2$ ו-$g(x)=\sqrt{f(x)}$. מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$. שימו לב לנקודה מבודדת!

5 $f(x)=-x^2+6x-5$ ו-$g(x)=\sqrt{f(x)}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת נקודת המקסימום של $g(x)$.

6 $f(x)=x^2-4$ ו-$g(x)=|f(x)|$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגן.

7 $f(x)=x^2-2x-3$ ו-$g(x)=|f(x)|$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ ואת תחומי העלייה שלה.

8 $f(x)=x^2-2x-3$ ו-$g(x)=|f(x)|$. לאילו ערכי k למשוואה $g(x)=k$ יש בדיוק ארבעה פתרונות?

9 $f(x)=2x-4$ ו-$g(x)=|f(x)|$. סרטטו את $g(x)$, מצאו את נקודת הקיצון שלה, והסבירו מדוע $g(x)$ אינה גזירה בנקודה זו.

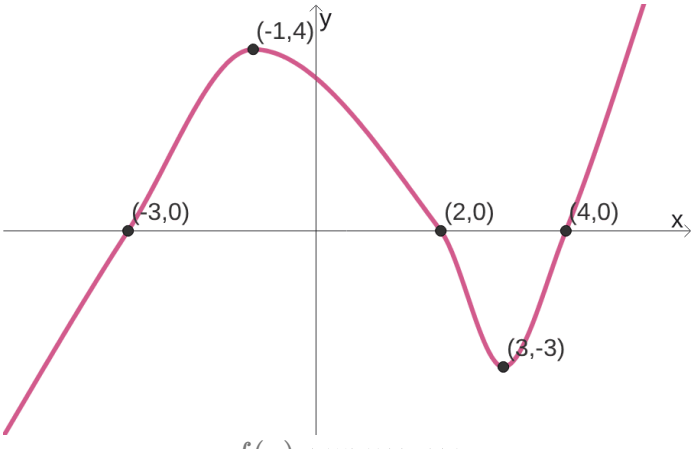
10 $f(x)=x^2+1$. האם יש הבדל בין $f(x)$ לבין $|f(x)|$? נמקו.

11 $f(x)=x^3-9x$ ו-$g(x)=|f(x)|$. מצאו את נקודות החיתוך של $g(x)$ עם ציר x. האם $g(x)$ שלילית אי-פעם?

12 $f(x)=x^2-6x+5$. פתרו את המשוואה $|f(x)|=3$. כמה פתרונות יש?

13 $f(x)=x^2-6x+8$ ו-$g(x)=\sqrt{f(x)}$. מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$, את תחומי העלייה והירידה, והסבירו מדוע ל-$g(x)$ אין מקסימום פנימי.

תרגילים 14–19 בציור גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x; משמאל הגרף יורד למינוס אינסוף ומימין עולה לאינסוף.
בתרגילים הבאים $g(x)=\sqrt{f(x)}$ ו-$h(x)=|f(x)|$.



גרף הפונקציה $f(x)$

14 מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$.

15 מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)=\sqrt{f(x)}$ (כולל קצה) וקבעו את סוגן.

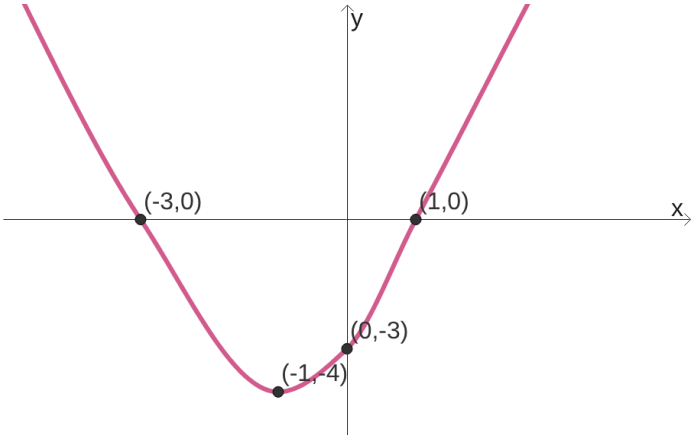
16 $h(x)=|f(x)|$. מצאו את נקודות הקיצון של $h(x)$ וקבעו את סוגן.

17 $h(x)=|f(x)|$. כמה פתרונות יש למשוואה $h(x)=3$? ולמשוואה $h(x)=5$?

18 מצאו את תחומי העלייה של $h(x)=|f(x)|$.

19 סרטטו סקיצה של $g(x)=\sqrt{f(x)}$ ושל $h(x)=|f(x)|$ במערכות צירים נפרדות.
היכן שני הגרפים נפגשים עם הגרף של $f(x)$?

תרגילים 20–24 בציור גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x; בשני הקצוות הגרף עולה לאינסוף. בתרגילים הבאים $g(x)=\sqrt{f(x)}$ ו-$h(x)=|f(x)|$.



גרף הפונקציה $f(x)$

20 מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$. האם $(0,-3)$ שייכת לגרף $g(x)$?

21 מצאו את תחומי העלייה והירידה של $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

22 $h(x)=|f(x)|$. מצאו את נקודת המקסימום של $h(x)$ ואת נקודת החיתוך שלה עם ציר y.

23 $h(x)=|f(x)|$. לאילו ערכי k למשוואה $h(x)=k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?

24 פתרו את אי-השוויון $|f(x)|>f(x)$.

25 ל-$f(x)$ נקודת מינימום $(2,9)$ (והיא חיובית לכל x). מהי נקודת הקיצון של $\sqrt{f(x)}$ ושל $|f(x)|$?

26 ל-$f(x)$ נקודת מינימום $(1,-4)$. מהי הנקודה המתאימה בגרף $|f(x)|$? איזה סוג קיצון היא שם?

27 $f(x)=x^2-4x$. פתרו את אי-השוויון $\sqrt{f(x)}<\sqrt{5}$.

28 $f(x)=|x-3|$. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$ ואת נקודת הקיצון. היכן הגרף אינו גזיר?

29 $f(x)=|x^2-1|$. כתבו את $f(x)$ ללא סימן ערך מוחלט בכל אחד מהתחומים.

30 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+a}$. לאילו ערכי a הפונקציה מוגדרת לכל x? עבור $a=5$ מצאו את נקודת הקיצון.

31 $f(x)=|x^2+bx|$, וידוע ש-$(2,4)$ היא נקודת מקסימום של $f(x)$. מצאו את b.

✔ תשובות סופיות – נושא 17.3

1	$x \le 1$ או $x \ge 3$; $(1,0)$ מינימום (קצה), $(3,0)$ מינימום (קצה)
2	$(-1,2)$ מינימום ; אותו x, ו-y הוא שורש של 4
3	$-2 \le x \le 2$; $0 \le y \le 2$
4	$x = 0$ או $x \ge 1$
5	$1 \le x \le 5$; $(3,2)$ מקסימום
6	$(-2,0)$ מינימום, $(0,4)$ מקסימום, $(2,0)$ מינימום
7	$(-1,0)$ מינימום, $(1,4)$ מקסימום, $(3,0)$ מינימום ; עולה: $-1 < x < 1$, $x > 3$
8	$0 < k < 4$
9	$(2,0)$ מינימום ; "שפיץ" – שיפוע -2 משמאל ו-2 מימין
10	אין הבדל – $f(x) > 0$ לכל x
11	$(-3,0)$, $(0,0)$, $(3,0)$; לא – $g(x) \ge 0$
12	$x = 2$, $x = 4$, $x = 3 \pm \sqrt{7}$; ארבעה פתרונות
13	$x \le 2$ או $x \ge 4$; עולה: $x > 4$; יורדת: $x < 2$; הקודקוד $(3,-1)$ מחוץ לתחום
14	$-3 \le x \le 2$ או $x \ge 4$
15	$(-3,0)$ מינימום (קצה), $(-1,2)$ מקסימום, $(2,0)$ מינימום (קצה), $(4,0)$ מינימום (קצה)
16	$(-3,0)$ מינימום, $(-1,4)$ מקסימום, $(2,0)$ מינימום, $(3,3)$ מקסימום, $(4,0)$ מינימום
17	$h(x) = 3$: חמישה פתרונות ; $h(x) = 5$: שני פתרונות
18	$-3 < x < -1$, $2 < x < 3$, $x > 4$
19	$g(x) = f(x)$ כאשר $f(x) = 0$ או $f(x) = 1$; $h(x) = f(x)$ כאשר $f(x) \ge 0$
20	$x \le -3$ או $x \ge 1$; לא
21	יורדת: $x < -3$; עולה: $x > 1$
22	$(-1,4)$ מקסימום ; $(0,3)$
23	$k = 4$

24	$-3 < x < 1$
25	$\sqrt{f(x)}$: מינימום $(2,3)$; $\lvert f(x)\rvert$: מינימום $(2,9)$
26	מקסימום $(1,4)$
27	$-1 < x \leq 0$ או $4 \leq x < 5$
28	יורדת: $x < 3$; עולה: $x > 3$; מינימום $(3,0)$; לא גזיר ב-$x = 3$
29	$x^2 - 1$ עבור $x \leq -1$ או $x \geq 1$; $1 - x^2$ עבור $-1 < x < 1$
30	מינימום $(1,2)$; $a \geq 1$
31	$b = -4$

פרק 17 סיכומון סוף פרק – חקירת פונקציית שורש

תחום הגדרה

- $\sqrt{g(x)}$ מוגדרת כאשר $g(x) \geq 0$, ופותרים אי-שוויון (לרוב בעזרת פרבולה או טבלת סימנים).
- שורש במכנה מחייב $g(x) > 0$ (חזק).
- התחום עלול להיות קטע סגור, וזה יוצר **נקודות קצה**.

נגזרת של שורש

- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\left(\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$ (נגזרת פנימית!)
- $(u\sqrt{v})' = u'\sqrt{v} + u \cdot \frac{v'}{2\sqrt{v}}$, ואחר כך מכנה משותף $2\sqrt{v}$.

סימן הנגזרת

- המכנה $2\sqrt{g(x)}$ חיובי, ולכן הסימן של $f'(x)$ נקבע לפי המונה.
- בנקודת קצה שבה $g(x) = 0$ הנגזרת לא מוגדרת, והמשיק שם אנכי.

קיצון וקיצון קצה

- קיצון פנימי: $f'(x) = 0$ עם החלפת סימן.
- נקודת קצה של התחום היא **קיצון קצה**: עלייה אחריה – מינימום, ירידה אחריה – מקסימום.
- תחום ערכים: משווים בין ערכי הקיצון, הקצוות וההתנהגות באינסוף.

סדר חקירה

- תחום, חיתוכים, נגזרת, טבלת עלייה וירידה, קיצון (כולל קצה), ואחר כך סקיצה.
- מחשבים את ערכי הפונקציה בנקודות הקצה, כי הן חלק מהגרף.

הטרנספורמציה $\sqrt{f(x)}$

- קיימת רק איפה ש-$f(x) \geq 0$. החלקים שמתחת לציר x נעלמים.
- אפסים נשמרים, וכאן $\sqrt{f(x)}$ "נוגעת" בציר.
- תחומי עלייה וירידה ומיקום הקיצון נשמרים, אבל $y \to \sqrt{y}$.

הטרנספורמציה $|f(x)|$

- החלקים שמתחת לציר x **משתקפים** כלפי מעלה, והחלקים שמעל לציר נשארים.
- מינימום שלילי של $f(x)$ הופך למקסימום, ובאפסים נוצרות נקודות מינימום ("שפיץ").

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לשכוח את הנגזרת הפנימית: $\left(\sqrt{3x-1}\right)' \neq \frac{1}{2\sqrt{3x-1}}$.
- לפספס קיצון קצה, שהוא נקודת קיצון לכל דבר.
- לכתוב $\geq$ בתחום כשהשורש נמצא במכנה.
- ב-$|f(x)|$ לשכוח שבאפסים של $f(x)$ נוצרות נקודות מינימום חדשות.

💡 **הטיפ של אילון:** בפונקציית שורש, תמיד תתחילו מתחום ההגדרה ותסמנו אותו על ציר ה-x. חצי מהשאלות נפתרות רק מזה: הקצוות, הקיצון והסקיצה.

פרק 18

חקירת שורש מנה

כשהשורש והשבר נפגשים: תחום בטבלת סימנים, אסימפטוטות משני הכיוונים ונקודות קצה

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

18.1 **חקירת שורש מנה – תחום, אסימפטוטות, חורים, משיק ופרמטרים** 36 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



חקירת פונקציית שורש מנה

YouTube · 26:27



חור או אסימפטוטה? איך יודעים בפונקציית מנה

YouTube · 6:11



חקירת פונקציית שורש מנה – סיכום

YouTube · 24:08

18.1 חקירת שורש מנה – תחום, אסימפטוטות, חורים, משיק ופרמטרים

ב-$\sqrt{\frac{u}{v}}$ התחום הוא $\frac{u}{v}\geq 0$ (טבלת סימנים!) והמכנה שונה מאפס. ב-$\frac{u}{\sqrt{v}}$ – $v>0$. שימו לב: $\sqrt{x^2}=|x|$, ולכן ייתכנו **שתי אסימפטוטות אופקיות שונות** – אחת כאשר $x\to\infty$ ואחת כאשר $x\to-\infty$.

צפו לפני שמתחילים:

חקירת פונקציית שורש מנה
YouTube · 26:27

חקירת פונקציית שורש מנה – סיכום
YouTube · 24:08

חקירת פונקציית שורש – אסימפטוטה אופקית
YouTube · 7:44

1 $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-2}}$. מצאו את תחום ההגדרה בעזרת טבלת סימנים של $\frac{x}{x-2}$. מדוע $x=2$ לא בתחום ו-$x=0$ כן?

2 $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-2}}$. מצאו את האסימפטוטות של $f(x)$ ואת נקודת הקיצון שלה.

3 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. מצאו את האסימפטוטות האופקיות. מדוע יש שתיים שונות?

4 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. הראו ש-$f(x)$ עולה לכל x, ומצאו את תחום הערכים שלה.

5 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-4}$. חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, אסימפטוטות, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון (כולל קצה) ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

6 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$. מצאו את תחום ההגדרה, את האסימפטוטה האנכית ואת נקודת הקיצון.

7 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$. מצאו את משוואת המשיק לגרף $f(x)$ בנקודה שבה $x=5$.

8 $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$. חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, אסימפטוטות, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון (כולל קצה) ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

9 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. מצאו את תחום ההגדרה, את האסימפטוטות האנכיות ואת תחום הערכים של $f(x)$.

10 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת כל האסימפטוטות של $f(x)$.

11 $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. מצאו את תחום ההגדרה. האם יש לגרף אסימפטוטה אנכית? מצאו את נקודות הקיצון (קצה).

12 $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת האסימפטוטות האופקיות של $f(x)$.

13 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ (כולל קצה) ואת האסימפטוטה האופקית.

14 $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$. הראו ש-$f(x)$ עולה בכל תחום הגדרתה, ומצאו את האסימפטוטה האנכית.

15 $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}}{x}$. חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, אסימפטוטות, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון (כולל קצה) ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

16 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטות. הראו שהגרף סימטרי ביחס לראשית.

17 $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$. מצאו את האסימפטוטות האופקיות ואת נקודת הפיתול של $f(x)$.

18 $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטות. לאן שואף $f(x)$ כאשר $x\to -1^-$?

19 $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$. חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, אסימפטוטות, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון (כולל קצה) ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

20 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2+3}$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ (כולל קצה) ואת תחום הערכים שלה.

21 $f(x)=\frac{x+4}{\sqrt{x}}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת תחום הערכים של $f(x)$.

22 $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x+1}}$. מצאו את $f'(x)$ והראו שאין לפונקציה נקודות קיצון.

23 $f(x)=\frac{\sqrt{2-x}}{x-1}$. מצאו את תחום ההגדרה, את האסימפטוטות ואת נקודת הקיצון (קצה).

24 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+2}}$. מצאו את הנקודה שבה $f'(x)=0$. האם היא בתחום ההגדרה? מה המסקנה?

25 $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$. מצאו את האסימפטוטות של $f(x)$. האם יש לה נקודות קיצון?

26 $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-4}{x-2}}$. מצאו את תחום ההגדרה. האם ב-$x=2$ יש אסימפטוטה או נקודת אי-רציפות?

27 $f(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}$. פשטו את הביטוי, ומצאו את תחום ההגדרה. האם יש לגרף אסימפטוטה אנכית?

28 $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x^2+2x+5}}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת תחום הערכים של $f(x)$.

29 $f(x)=\sqrt{\frac{x+a}{x-b}}$. האסימפטוטה האנכית של $f(x)$ היא $x=3$, ותחום ההגדרה הוא $x\le -1$ או $x>3$. מצאו את a ואת b.

30 $f(x)=\frac{ax}{\sqrt{x^2+b}}$ כאשר $a,b>0$. האסימפטוטה האופקית של $f(x)$ כאשר $x\to\infty$ היא $y=2$, ו-$f(2)=1$. מצאו את a ואת b.

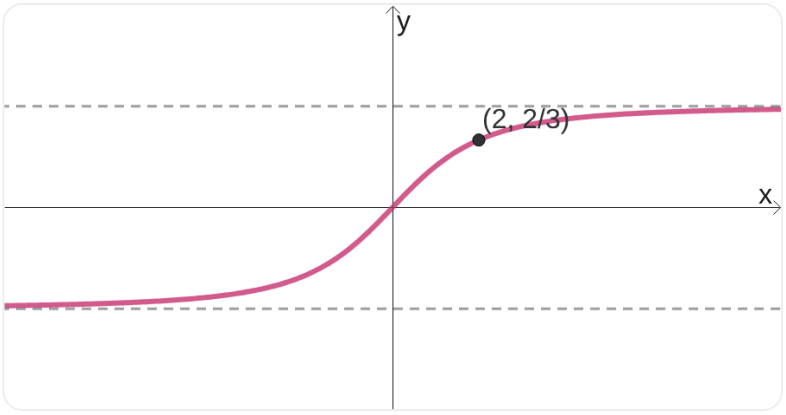
31 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+a}$ כאשר $a>0$. ל-$f(x)$ נקודת מקסימום ב-$x=1$. מצאו את a ואת ערך המקסימום.

32 $f(x)=\frac{x+a}{\sqrt{x}}$. ל-$f(x)$ נקודת קיצון $(4,4)$. מצאו את a וקבעו את סוג הקיצון.

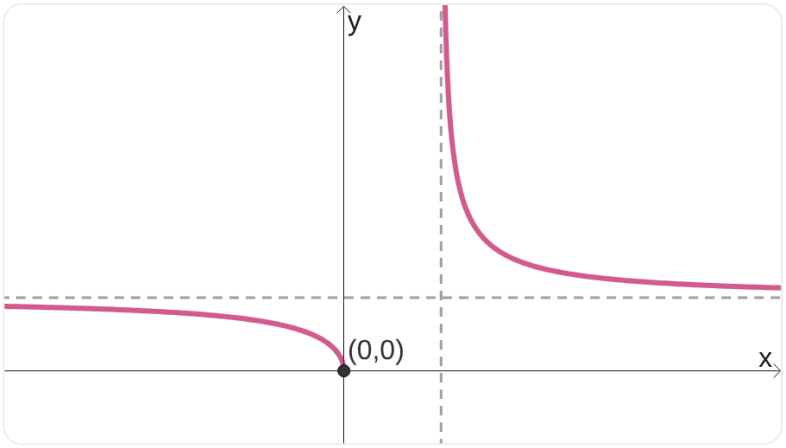
33 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. לאילו ערכי k למשוואה $f(x)=k$ יש פתרון?

34 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$. מצאו את משוואת המשיק לגרף $f(x)$ בנקודת המקסימום. מה מיוחד בו?

35 בציור גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}$ ושתי אסימפטוטות אופקיות (בקו מקווקו). הגרף עובר בנקודה $(2,\frac{2}{3})$ (כאשר $a>0$). מצאו את a ואת משוואות האסימפטוטות.



36 בציור גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-c}}$ והאסימפטוטות שלה (בקו מקווקו). מצאו את c ואת תחום ההגדרה, והסבירו מה קורה לגרף בנקודה $(0,0)$.



✔ תשובות סופיות – נושא 18.1

1	$x \le 0$ או $x > 2$; ב-$x = 2$ המכנה מתאפס, ב-$x = 0$ השורש מתאפס
2	אנכית: $x = 2$; אופקית: $y = 1$; $(0,0)$ מינימום (קצה)
3	$y = 1$ (כאשר $x \to \infty$), $y = -1$ (כאשר $x \to -\infty$) ; $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$, ולכן הסימן תלוי בכיוון
4	עולה: כל x ; יורדת: אין ; $-1 < y < 1$
5	תחום: $0 \le x < 4$ או $x > 4$; אנכית: $x = 4$; אופקית: $y = 0$ (כאשר $x \to \infty$) ; ציר x: $(0,0)$; ציר y: $(0,0)$; קיצון: $(0,0)$ מקסימום (קצה) ; עולה: אין ; יורדת: $0 < x < 4$, $x > 4$
6	$x > 1$; $x = 1$; $(2,2)$ מינימום
7	$y = \frac{3x}{16} + \frac{25}{16}$
8	תחום: $x \le -1$ או $x > 3$; אנכית: $x = 3$; אופקית: $y = 1$; ציר x: $(-1,0)$; ציר y: אין ; קיצון: $(-1,0)$ מינימום (קצה) ; עולה: אין ; יורדת: $x < -1$, $x > 3$
9	$-2 < x < 2$; $x = -2$, $x = 2$; $y \ge \frac{1}{2}$
10	$x < -1$ או $x > 1$; אנכית: $x = -1$, $x = 1$; אופקית: $y = 1$ (כאשר $x \to \infty$), $y = -1$ (כאשר $x \to -\infty$)
11	$x \le -1$ או $x \ge 1$; אין אסימפטוטה אנכית ; $(-1,0)$ מקסימום (קצה), $(1,0)$ מינימום (קצה)
12	$(2,\sqrt{2})$ מקסימום ; $y = 1$ (כאשר $x \to \infty$), $y = -1$ (כאשר $x \to -\infty$)
13	$(0,0)$ מינימום (קצה), $(1,\frac{1}{2})$ מקסימום ; $y = 0$ (כאשר $x \to \infty$)
14	עולה: $x > 0$; יורדת: אין ; $x = 0$
15	תחום: $x < 0$ או $-3 \le x < 0$; אנכית: $x = 0$; אופקית: $y = 0$ (כאשר $x \to \infty$) ; ציר x: $(-3,0)$; ציר y: אין ; קיצון: $(-3,0)$ מקסימום (קצה) ; עולה: אין ; יורדת: $x > 0$, $-3 < x < 0$
16	$-3 < x < 3$; $x = -3$, $x = 3$; $f(-x) = -f(x)$
17	$y = 2$ (כאשר $x \to \infty$), $y = -2$ (כאשר $x \to -\infty$) ; פיתול: $(0,0)$
18	$x < -1$ או $x \ge 1$; אנכית: $x = -1$; אופקית: $y = 1$; $f(x) \to \infty$

19 תחום: $x<-2$ או $x>2$; אנכית: $x=-2$, $x=2$; אופקית: אין אסימפטוטה אופקית ; ציר x: אין ; ציר y: אין ; קיצון: $(-2\sqrt{2},4)$ מינימום, $(2\sqrt{2},4)$ מינימום ; עולה: $-2<x<-2\sqrt{2}$, $2<x<2\sqrt{2}$; יורדת: $x>2\sqrt{2}$, $x<-2\sqrt{2}$

20 $(0,0)$ מינימום (קצה), $(1,\frac{1}{4})$ מקסימום ; $0\le y\le\frac{1}{4}$

21 $(4,4)$ מינימום ; $y\ge 4$

22 $f'(x)=\frac{x+5}{2(x+1)\sqrt{x+1}}>0$ בכל התחום

23 $x<1$ או $1<x\le 2$; אנכית: $x=1$; אופקית: $y=0$ (כאשר $x\to-\infty$) ; $(2,0)$ מינימום (קצה)

24 $x=-4$ - לא בתחום ; אין נקודות קיצון, $f(x)$ עולה

25 אנכית: $x=0$; אופקית: $y=1$ (כאשר $x\to\infty$), $y=-1$ (כאשר $x\to-\infty$) ; אין נקודות קיצון

26 $-2\le x<2$ או $x>2$; חור $(2,2)$

27 $f(x)=(x+1)\sqrt{x-1}$; $x>1$; אין אסימפטוטה

28 $(-1,2)$ מקסימום ; $0<y\le 2$

29 $a=1$, $b=3$

30 $a=2$, $b=12$

31 $a=1$; $f(1)=\frac{1}{2}$

32 $a=4$; מינימום

33 $-1<k<1$

34 $y=\frac{1}{2}$ - משיק אופקי

35 $a=5$; $y=1$, $y=-1$

36 $c=2$; $x\le 0$ או $x>2$; $(0,0)$ מינימום (קצה)

פרק 18 סיכומון סוף פרק – חקירת שורש מנה

תחום הגדרה – טבלת סימנים

- $\sqrt{\frac{p(x)}{q(x)}}$: דורשים $\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0$ וגם $q(x) \neq 0$.
- מסמנים על ציר את האפסים של המונה ושל המכנה, ובודקים סימן בכל תחום.
- אפס של המונה נכלל בתחום (נקודת קצה), אפס של המכנה לא נכלל.

$\frac{\sqrt{p(x)}}{q(x)}$ לעומת $\sqrt{\frac{p(x)}{q(x)}}$

- שורש רק במונה: $p(x) \geq 0$ וגם $q(x) \neq 0$, כל תנאי בנפרד.
- שורש על כל השבר: תנאי אחד על הסימן של כל המנה.

אסימפטוטות

- אנכית: אפס של המכנה שצמוד לתחום ושלא מתאפס גם במונה.
- אופקית: בודקים **בנפרד** את $x \to \infty$ ואת $x \to -\infty$, רק אם התחום ממשיך לשם.
- $\sqrt{x^2} = |x|$, ולכן לפעמים מתקבלות שתי אסימפטוטות שונות, למשל $y = 1$ ו-$y = -1$.

חורים וצמצום

- גורם משותף שמתבטל: התחום נקבע לפני הצמצום, והחור נשאר.
- את ה-y של החור מציבים בפונקציה המצומצמת.

נגזרת ומשיק

- $\left(\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$, כש-$g(x)$ היא המנה ו-$g'(x)$ לפי נגזרת מנה.
- משיק בנקודה x_0: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
- בנקודת קצה שבה המנה מתאפסת, המשיק לרוב אנכי.

פרמטרים

- נתונה אסימפטוטה או נקודת קצה: מציבים ומשווים.
- בודקים שהפרמטר שהתקבל לא "מקלקל" את התחום.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- להכניס לתחום את האפס של המכנה (שבר עם מכנה אפס לא מוגדר).
- למצוא אסימפטוטה אופקית רק ב-$+\infty$ ולשכוח את $-\infty$.
- לבדוק אסימפטוטה בכיוון שבו הפונקציה בכלל לא מוגדרת.
- לצמצם לפני קביעת התחום.

💡 **הטיפ של אילון:** בשורש מנה, טבלת הסימנים היא מפת הדרכים שלכם. תשרטטו אותה פעם אחת ותשתמשו בה גם לתחום, גם לאסימפטוטות וגם לסקיצה.

פרק 19

חקירה טריגונומטרית

רדיאנים, משוואות בתחום, נגזרות וחקירה מלאה של פונקציות סינוס, קוסינוס וטנגנס

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

19.1 **רדיאנים, תחום הגדרה ומשוואות טריגונומטריות בתחום סגור** — 41 תרגילים

19.2 **נגזרת וחקירה של פונקציות טריגונומטריות** — 39 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

מעבר ממעלות לרדיאנים ולהפך
YouTube · 5:16

פתרון משוואות טריגונומטריות בתחום
YouTube · 9:30

פונקציה טריגונומטרית – נגזרת
YouTube · 7:10

חקירת פונקציה טריגונומטרית – תרגיל מסכם
YouTube · 18:02

🎛️ המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

מעבדת הסינוס והקוסינוס

שנו את a, b, c, d ב-$a\sin(b(x-c))+d$ וראו בזמן אמת את המחזור, המשרעת וערכי המקסימום והמינימום.

19.1 רדיאנים, תחום הגדרה ומשוואות טריגונומטריות בתחום סגור

תזכורת: $180^\circ = \pi$ רדיאנים. בפתרון משוואה בתחום סגור – מוצאים את הפתרון הכללי ואז מציבים $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ולוקחים רק פתרונות שנמצאים בתחום (כולל הקצוות!). בתחום הגדרה – מוציאים ערכים שמאפסים מכנה, שבהם $\tan x$ לא מוגדר, או שתחת שורש שלילי.

צפו לפני שמתחילים:

מעבר ממעלות לרדיאנים ולהפך
YouTube · 5:16

פתרון משוואות טריגונומטריות עם רדיאנים
YouTube · 13:41

פתרון משוואות טריגונומטריות בתחום
YouTube · 9:30

משוואות טריגונומטריות – עם זהות זווית כפולה
YouTube · 14:33

1. המירו לרדיאנים: 150°.

2. המירו למעלות: $\frac{7\pi}{4}$.

3. המירו לרדיאנים: 72° (זווית שאינה מהזוויות המוכרות).

4. זווית של 1 רדיאן – בערך כמה מעלות היא? (עגלו לעשירית)

5. המירו למעלות: $-\frac{2\pi}{3}$, ומצאו זווית חיובית בתחום $0 \le x < 2\pi$ שיש לה אותו סינוס ואותו קוסינוס.

6. סדרו מהקטנה לגדולה: $\frac{5\pi}{6}$, 2.5, $\frac{3\pi}{4}$ (בלי מחשבון, בעזרת $\pi \approx 3.14$).

7. $f(x) = \tan x$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le 2\pi$. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$ (אילו ערכי x יש להוציא).

8 $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ מוגדרת בתחום $0\le x\le 2\pi$. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$ (אילו ערכי x יש להוציא).

9 $f(x)=\frac{3}{2\cos x-1}$ מוגדרת בתחום $0\le x\le 2\pi$. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$ (אילו ערכי x יש להוציא).

10 $f(x)=\frac{1}{\sin 2x}$ מוגדרת בתחום $0\le x\le \pi$. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$ (אילו ערכי x יש להוציא).

11 $f(x)=\tan 2x$ מוגדרת בתחום $0\le x\le \pi$. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$ (אילו ערכי x יש להוציא).

12 $f(x)=\frac{2}{\sin x-\cos x}$ מוגדרת בתחום $0\le x\le 2\pi$. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$ (אילו ערכי x יש להוציא).

13 $f(x)=\frac{5}{1+\cos x}$ מוגדרת בתחום $-\pi\le x\le \pi$. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$ (אילו ערכי x יש להוציא).

14 $f(x)=\frac{\cos x}{2\sin x+\sqrt{3}}$ מוגדרת בתחום $0\le x\le 2\pi$. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$ (אילו ערכי x יש להוציא).

15 האם הפונקציה $f(x)=\frac{1}{2+\sin x}$ מוגדרת לכל x? נמקו.

16 $f(x)=\sqrt{\sin x}$ בתחום $0\le x\le 2\pi$. מצאו את תחום ההגדרה.

17 פתרו בתחום $0\le x\le 2\pi$: $\sin x=\frac{1}{2}$

18 פתרו בתחום $0\le x\le 2\pi$: $2\cos x+\sqrt{3}=0$

19 פתרו בתחום $0\le x\le 2\pi$: $\tan x=-1$

20 פתרו בתחום $0\le x\le \pi$: $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (שימו לב: הזווית כפולה!)

21 פתרו בתחום $0\le x\le 2\pi$: $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

22 פתרו בתחום $0\le x\le 2\pi$: $2\sin^2 x-\sin x-1=0$ (משתנה עזר)

23 פתרו בתחום $-\pi \le x \le \pi$: $\sin x = \cos x$

24 פתרו בתחום $0 \le x \le 2\pi$: $\sin 2x = \cos x$ (זהות זווית כפולה)

25 פתרו בתחום $0 \le x \le 2\pi$: $\cos 2x = \sin x$

26 פתרו בתחום $0 \le x \le \pi$: $3\tan^2 x = 1$

27 פתרו בתחום $0 \le x \le \pi$: $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$

28 פתרו בתחום $0 \le x \le \pi$: $\sin 3x = 0$

29 פתרו בתחום $0 \le x \le \pi$: $\sin^2 x = 3\cos^2 x$

30 פתרו בתחום $0 \le x \le 2\pi$: $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

31 פתרו בתחום $0 \le x \le 2\pi$: $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

32 פתרו בתחום $0 \le x \le 3\pi$: $\cos x = -1$ – כמה פתרונות יש בתחום?

33 פתרו בתחום $0 \le x \le 2\pi$: $\sin x + \cos 2x = 1$

34 פתרו בתחום $0 \le x \le 2\pi$: $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

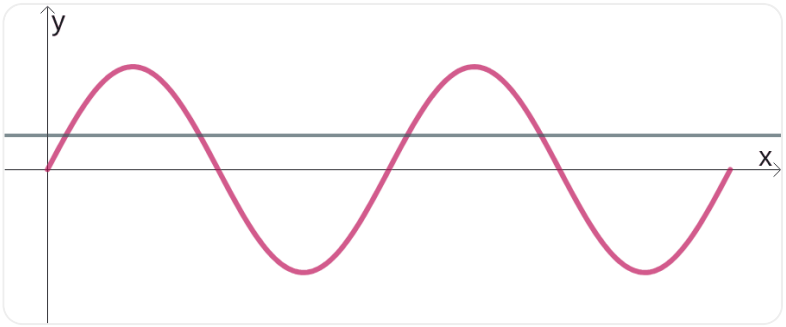
35 פתרו בתחום $0 \le x \le 2\pi$: $\sin x = 2$ – הסבירו את התשובה.

36 פתרו בתחום $0 \le x \le 2\pi$: $\cos 2x + \cos x = 0$

37 פתרו בתחום $0 \le x \le \pi$: $2\sin x \cos x - \sin x = 0$ (הוצאת גורם משותף)

38 פתרו בתחום $-\pi \le x \le 2\pi$: $\tan x = \sqrt{3}$

39 מצאו את מספר הפתרונות של המשוואה $\sin x = \frac{1}{3}$ בתחום $0 \le x \le 4\pi$ (אין צורך למצוא אותם). (בציור: גרף $\sin x$ והישר $y = \frac{1}{3}$)



40 פתרו בתחום $0 \le x \le 2\pi$ את אי-השוויון $\sin x > \frac{1}{2}$, בעזרת מעגל היחידה.

41 מצאו את נקודות החיתוך של $f(x) = \sin x$ ו-$g(x) = \cos x$ בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

✔ תשובות סופיות – נושא 19.1

1. $\frac{5\pi}{6}$
2. 315°
3. $\frac{2\pi}{5}$
4. $\approx 57.3^\circ$
5. $\frac{4\pi}{3}$; -120°
6. $\frac{3\pi}{4} < 2.5 < \frac{5\pi}{6}$
7. כל x בתחום פרט ל- $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$
8. כל x בתחום פרט ל- $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$
9. כל x בתחום פרט ל- $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{5\pi}{3}$
10. כל x בתחום פרט ל- $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$
11. כל x בתחום פרט ל- $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{3\pi}{4}$
12. כל x בתחום פרט ל- $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{5\pi}{4}$
13. כל x בתחום פרט ל- $x=-\pi$, $x=\pi$
14. כל x בתחום פרט ל- $x=\frac{4\pi}{3}$, $x=\frac{5\pi}{3}$
15. כן – $2+\sin x \geq 1 > 0$ תמיד
16. $0 \leq x \leq \pi$ או $x=2\pi$
17. $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{5\pi}{6}$
18. $x=\frac{5\pi}{6}$, $x=\frac{7\pi}{6}$
19. $x=\frac{3\pi}{4}$, $x=\frac{7\pi}{4}$
20. $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{3}$
21. $x=\frac{5\pi}{6}$, $x=\frac{11\pi}{6}$
22. $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{7\pi}{6}$, $x=\frac{11\pi}{6}$
23. $x=-\frac{3\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}$

24 $x=\frac{\pi}{6}\ ,x=\frac{\pi}{2}\ ,x=\frac{5\pi}{6}\ ,x=\frac{3\pi}{2}$

25 $x=\frac{\pi}{6}\ ,x=\frac{5\pi}{6}\ ,x=\frac{3\pi}{2}$

26 $x=\frac{\pi}{6}\ ,x=\frac{5\pi}{6}$

27 $x=\frac{\pi}{12}\ ,x=\frac{5\pi}{12}$

28 $x=0\ ,x=\frac{\pi}{3}\ ,x=\frac{2\pi}{3}\ ,x=\pi$

29 $x=\frac{\pi}{3}\ ,x=\frac{2\pi}{3}$

30 $x=\frac{2\pi}{3}\ ,x=\pi\ ,x=\frac{4\pi}{3}$

31 $x=0\ ,x=\pi\ ,x=2\pi$

32 $x=\pi\ ,x=3\pi$

33 $x=0\ ,x=\frac{\pi}{6}\ ,x=\frac{5\pi}{6}\ ,x=\pi\ ,x=2\pi$

34 $x=\frac{\pi}{3}\ ,x=\frac{4\pi}{3}$

35 אין פתרונות בתחום

36 $x=\frac{\pi}{3}\ ,x=\pi\ ,x=\frac{5\pi}{3}$

37 $x=0\ ,x=\frac{\pi}{3}\ ,x=\pi$

38 $x=-\frac{2\pi}{3}\ ,x=\frac{\pi}{3}\ ,x=\frac{4\pi}{3}$

39 4 פתרונות

40 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}$

41 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ ,\left(\frac{5\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

19.2 נגזרת וחקירה של פונקציות טריגונומטריות

נגזרות יסוד: $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, ובפונקציה $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, מורכבת – כופלים בנגזרת הפנימית. בחקירה בתחום סגור בודקים גם את נקודות הקצה.

צפו לפני שמתחילים:

פונקציה טריגונומטרית – נגזרת
YouTube · 7:10

חקירת פונקציה טריגונומטרית – תרגיל מסכם
YouTube · 18:02

מעגל היחידה – ההיגיון, הזהויות והבסיס לפתרון משוואות
YouTube · 15:17

1 גזרו: $f(x) = \sin 3x$

2 גזרו: $f(x) = \cos^2 x$

3 גזרו: $f(x) = x \sin x$

4 גזרו: $f(x) = \tan 2x$

5 גזרו: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

6 גזרו: $f(x) = \sqrt{\cos x}$

7 גזרו: $f(x) = \sin^3(2x)$

8 גזרו: $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

9 גזרו: $f(x) = \cos\left(x^2\right)$

10 הראו ש-$f'(x) = 0$ עבור $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$. מה המשמעות לגבי הגרף?

11 מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\sin x$ בנקודה שבה $x=\pi$.

12 מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=2\cos x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{2}$.

13 מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\tan x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$.

14 מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=x+\cos 2x$ בנקודה שבה $x=0$.

15 מצאו את הנקודות בתחום $0\le x\le 2\pi$ שבהן המשיק לגרף $f(x)=\sin x$ מקביל לישר $y=\frac{1}{2}x$.

16 נתונה הפונקציה $f(x)=\sin x+\cos x$ בתחום $0\le x\le 2\pi$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ (כולל נקודות קצה) וקבעו את סוגן.

17 נתונה הפונקציה $f(x)=\sin x+\cos x$ בתחום $0\le x\le 2\pi$. מצאו את נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר x.

18 נתונה הפונקציה $f(x)=x+2\cos x$ בתחום $0\le x\le 2\pi$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ (כולל נקודות קצה) וקבעו את סוגן.

19 נתונה הפונקציה $f(x)=\sin^2 x$ בתחום $0\le x\le \pi$. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

20 נתונה הפונקציה $f(x)=\cos 2x+2\sin x$ בתחום $0\le x\le \pi$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ (כולל נקודות קצה) וקבעו את סוגן.

21 נתונה הפונקציה $f(x)=\sin x\cos x$ בתחום $0\le x\le \pi$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ (כולל נקודות קצה) וקבעו את סוגן.

22 נתונה הפונקציה $f(x)=\tan x-2x$ בתחום $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן.

23 נתונה הפונקציה $f(x)=\tan x-2x$ בתחום $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

24 נתונה הפונקציה $f(x)=x-\sin x$ בתחום $0\le x\le 2\pi$. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

25 נתונה הפונקציה $f(x)=2\sin x-\sin 2x$ בתחום $0\le x\le 2\pi$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ (כולל נקודות קצה) וקבעו את סוגן.

26 נתונה הפונקציה $f(x)=\cos^2 x-\cos x$ בתחום $0\le x\le 2\pi$. מצאו את נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר x.

27 נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ בתחום $0\le x\le 2\pi$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ (כולל נקודות קצה) וקבעו את סוגן.

28 $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ בתחום $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$. מצאו את האסימפטוטות האנכיות של $f(x)$.

29 $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ בתחום $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$. מצאו את נקודת הקיצון וקבעו את סוגה, ומצאו את תחום הערכים.

30 $f(x)=a\sin x+\cos x$, ול-$f(x)$ יש נקודת קיצון ב-$x=\frac{\pi}{4}$. מצאו את a.

31 $f(x)=\sin 2x+ax$, ול-$f(x)$ יש נקודת קיצון ב-$x=\frac{\pi}{6}$. מצאו את a.

32 $f(x)=\sin x+\cos x$ בתחום $0\le x\le 2\pi$. מצאו את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של $f(x)$, ומצאו את תחום הערכים.

33 $f(x)=\cos 2x+2\sin x$ בתחום $0\le x\le \pi$. היעזרו בנקודות הקיצון של $f(x)$: לאילו ערכי k יש למשוואה $f(x)=k$ בדיוק ארבעה פתרונות? ולאיזה ערך של k יש בדיוק שני פתרונות?

34 הראו ש-$f(x)=x\sin x$ זוגית, ומצאו את משוואת המשיק לגרף $f(x)$ ב-$x=\frac{\pi}{2}$.

35 $f(x)=\sin x-\frac{x}{2}$ בתחום $0\le x\le \pi$. מצאו את נקודת הקיצון הפנימית וקבעו את סוגה.

36 סרטטו סקיצה של $f(x)=\sin x+\cos x$ בתחום $0\le x\le 2\pi$ בעזרת הסעיפים שמצאתם (קיצון וחיתוכים).

37 $f(x)=2\sin^2 x$. הראו ש-$f'(x)=2\sin 2x$, ומצאו את נקודות הקיצון בתחום $0<x<\pi$.

38 $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$ בתחום $0\le x\le 2\pi$. מצאו את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון הפנימיות.

39 נתונה $f(x)=\sin x$ בתחום $0\le x\le 2\pi$, ו-$g(x)=f(x)+1$. מצאו את נקודת החיתוך של $g(x)$ עם ציר x, ואמרו אם הגרף חותך או משיק.

✔ תשובות סופיות – נושא 19.2

1	$f'(x)=3\cos 3x$
2	$f'(x)=-2\sin x\cos x=-\sin 2x$
3	$f'(x)=\sin x+x\cos x$
4	$f'(x)=\frac{2}{\cos^2 2x}$
5	$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$
6	$f'(x)=-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$
7	$f'(x)=6\sin^2(2x)\cos 2x$
8	$f'(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$
9	$f'(x)=-2x\sin\left(x^2\right)$
10	$f'(x)=0$ – כי $f(x)=1$, ישר אופקי
11	$y=\pi-x$
12	$y=\pi-2x$
13	$y=2x-\frac{\pi}{2}+1$
14	$y=x+1$
15	$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
16	$(0,1)$ מינימום (קצה), $\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$ מקסימום, $\left(\frac{5\pi}{4},-\sqrt{2}\right)$ מינימום, $(2\pi,1)$ מקסימום (קצה)
17	$\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$, $\left(\frac{7\pi}{4},0\right)$
18	$(0,2)$ מינימום (קצה), $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$ מקסימום, $\left(\frac{5\pi}{6},-\sqrt{3}+\frac{5\pi}{6}\right)$ מינימום, $(2\pi,2+2\pi)$ מקסימום (קצה)
19	עלייה: $0<x<\frac{\pi}{2}$; ירידה: $\frac{\pi}{2}<x<\pi$
20	$(0,1)$ מינימום (קצה), $\left(\frac{\pi}{6},\frac{3}{2}\right)$ מקסימום, $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ מינימום, $\left(\frac{5\pi}{6},\frac{3}{2}\right)$ מקסימום, $(\pi,1)$ מינימום (קצה)
21	$(0,0)$ מינימום (קצה), $\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$ מקסימום, $\left(\frac{3\pi}{4},-\frac{1}{2}\right)$ מינימום, $(\pi,0)$ מקסימום (קצה)

22 $\left(-\frac{\pi}{4},-1+\frac{\pi}{2}\right)$ מקסימום, $\left(\frac{\pi}{4},1-\frac{\pi}{2}\right)$ מינימום

23 עלייה: $-\frac{\pi}{2}<x<-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$; ירידה: $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$

24 עלייה: $0<x<2\pi$; ירידה: אין

25 $(0,0)$ מינימום (קצה), $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ מקסימום, $\left(\frac{4\pi}{3},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ מינימום, $(2\pi,0)$ מקסימום (קצה)

26 $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$, $(2\pi,0)$

27 $(0,-1)$ מינימום (קצה), $\left(\frac{2\pi}{3},2\right)$ מקסימום, $\left(\frac{5\pi}{3},-2\right)$ מינימום, $(2\pi,-1)$ מקסימום (קצה)

28 $x=\frac{\pi}{2}$ (ואסימפטוטות בקצוות: $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$)

29 $(0,1)$ מינימום ; $y\geq 1$

30 $a=1$

31 $a=-1$

32 $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}\leq y\leq\sqrt{2}$

33 ארבעה פתרונות: $1<k<\frac{3}{2}$; שני פתרונות: $k=\frac{3}{2}$

34 $f(-x)=f(x)$; $y=x$

35 $\left(\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ מקסימום

36 עובר ב-$(0,1)$, מקסימום $\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$, חיתוכים $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, מינימום $\left(\frac{5\pi}{4},-\sqrt{2}\right)$, מסתיים ב-$(2\pi,1)$

37 $\left(\frac{\pi}{2},2\right)$ מקסימום

38 $x=\frac{2\pi}{3}$, $x=\pi$, $x=\frac{4\pi}{3}$

39 $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ - משיק

פרק 19 סיכומון סוף פרק – חקירה טריגונומטרית

רדיאנים

- π רדיאנים $= 180°$. ממעלות לרדיאנים כופלים ב- $\frac{\pi}{180}$, ומרדיאנים למעלות ב- $\frac{180}{\pi}$.
- $30° = \frac{\pi}{6}$, $45° = \frac{\pi}{4}$, $60° = \frac{\pi}{3}$, $90° = \frac{\pi}{2}$.

משוואות בסיסיות

- $\sin x = a$: $x = \alpha + 2\pi k$ או $x = \pi - \alpha + 2\pi k$.
- $\cos x = a$: $x = \pm\alpha + 2\pi k$.
- $\tan x = a$: $x = \alpha + \pi k$.
- בתחום סגור מציבים $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ ומשאירים רק פתרונות בתוך התחום.

תחום הגדרה

- $\tan x$ לא מוגדרת ב- $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.
- מכנה טריגונומטרי: פותרים מכנה $= 0$ ומוציאים מהתחום.
- שורש: הביטוי שבתוכו ≥ 0.

נגזרות

- $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)$, נגזרת פנימית.
- $(\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$

חקירה בתחום סגור

- גוזרים ופותרים $f'(x) = 0$ בתוך התחום.
- טבלה: נקודות הקצה, נקודות שבהן $f'(x) = 0$, ונקודות אי-הגדרה.
- נקודות הקצה הן קיצון קצה, כמו בכל תחום סגור.
- לסקיצה מחשבים ערכים מדויקים (למשל $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$).

מחזוריות וזוגיות

- $\sin x$ ו- $\cos x$ מחזוריות ב- 2π, ו- $\tan x$ ב- π. ל- $\sin(bx)$ המחזור הוא $\frac{2\pi}{b}$.
- $\cos x$ זוגית, $\sin x$ ו- $\tan x$ אי-זוגיות.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לערבב מעלות ורדיאנים באותה משוואה. כשהתחום ברדיאנים, עובדים ברדיאנים.
- לשכוח את הפתרון השני של $\sin x = a$, כלומר $\pi - \alpha$.
- לחלק ב- $\sin x$ או ב- $\cos x$ ו"לאבד" פתרונות. עדיף להוציא גורם משותף.
- לשכוח את נקודות הקצה בטבלה של תחום סגור.

💡 **הטיפ של אילון:** בכל משוואה טריגונומטרית, תשרטטו מעגל יחידה קטן בצד ותסמנו עליו את הזוויות. ככה לא תפספסו אף פתרון.

פרק 20

סיכום לפרק החקירות

חזקת n, טרנספורמציות כפולות, פרמטרים, זוגיות, פונקציה יורשת ושרטוט מראש

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

20.1 פונקציה בחזקת n, טכניקות גזירה וטרנספורמציות כפולות — 34 תרגילים

20.2 חקירה עם פרמטר, פונקציה יורשת, זוגיות ושרטוט מראש — 37 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

חקירת פונקציה בחזקת n
YouTube · 18:40

חקירת פונקציית פולינום עם פרמטר
YouTube · 14:16

פונקציה זוגית ואי-זוגית
YouTube · 11:29

קשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת
YouTube · 16:24

🎛️ המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

מעבדת הטרנספורמציות

שלבו כמה טרנספורמציות יחד – $a \cdot f(b(x-h))+k$ – וראו לאן עוברת כל נקודת קיצון.

20.1 פונקציה בחזקת n, טכניקות גזירה וטרנספורמציות כפולות

גזירת $(g(x))^n$: $n\cdot(g(x))^{n-1}\cdot g'(x)$. בחזקה זוגית הגורם לא מחליף סימן – לכן לא תמיד יש קיצון במקום שבו הנגזרת מתאפסת! בטרנספורמציה כפולה $a\cdot f(b(x-h))+k$ – כל נקודה (x,y) עוברת ל-$\left(\frac{x}{b}+h,\ ay+k\right)$.

צפו לפני שמתחילים:

חקירת פונקציה בחזקת n
YouTube · 18:40

חקירת פונקציות – נגזרת מורכבת
YouTube · 3:04

טרנספורמציות בפונקציות – הזזות, מתיחות ושילובים
YouTube · 12:52

טרנספורמציה – הפונקציה בריבוע
YouTube · 5:40

1. גזרו ופשטו ככל האפשר: $f(x)=\frac{3}{x^4}$
2. גזרו ופשטו ככל האפשר: $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$
3. גזרו ופשטו ככל האפשר: $f(x)=(x^2-3x)^5$
4. גזרו ופשטו ככל האפשר: $f(x)=x^3\sqrt{x}$
5. גזרו ופשטו ככל האפשר: $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$
6. גזרו ופשטו ככל האפשר: $f(x)=\sqrt{x^2+9}$
7. גזרו ופשטו ככל האפשר: $f(x)=\frac{1}{(2x+1)^3}$
8. גזרו ופשטו ככל האפשר: $f(x)=x^2(x-1)^3$
9. גזרו ופשטו ככל האפשר: $f(x)=\sin^2(3x)$
10. גזרו ופשטו ככל האפשר: $f(x)=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$

11 נתונה הפונקציה $f(x)=(x^2-4)^3$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן. האם ב-$x=\pm 2$ יש קיצון?

12 נתונה הפונקציה $f(x)=(x^2-2x)^2$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן.

13 נתונה הפונקציה $f(x)=(3-x)^5$. הראו ש-$f(x)$ יורדת לכל x. האם יש לה נקודת קיצון?

14 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2}$. מצאו את נקודת הקיצון וקבעו את סוגה, ומצאו את האסימפטוטה האופקית.

15 נתונה הפונקציה $f(x)=(x-1)^2(x+2)^3$. מצאו את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן.

16 לאילו ערכים טבעיים של n יש לפונקציה $f(x)=x^n$ נקודת מינימום בראשית? ולאילו אין לה קיצון כלל?

17 נתונה $f(x)=(x^2-1)^n$ כאשר n זוגי. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן.

18 נתונה $f(x)=(x^2-1)^n$ כאשר n אי-זוגי. מצאו את נקודת הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגה.

19 מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=(2x-1)^4$ בנקודה שבה $x=1$.

20 נתונה $f(x)=(x^2+ax)^2$. מצאו את a אם ידוע ש-$f(x)$ יש נקודת מקסימום ב-$x=1$.

21 נתונה $f(x)=(x-3)^2(x+1)^2$. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

22 נתונה $f(x)=\sqrt{(x-2)^2+5}$. מצאו את נקודת הקיצון של $f(x)$ ואת תחום הערכים שלה.

23 לפונקציה $f(x)$ (המוגדרת לכל x) יש נקודת מקסימום $(2,5)$ ונקודת מינימום $(-1,-3)$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)=2f(x)+1$ וקבעו את סוגן.

24 לפונקציה $f(x)$ (המוגדרת לכל x) יש נקודת מקסימום $(2,5)$ ונקודת מינימום $(-1,-3)$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)=-f(x)+4$ וקבעו את סוגן.

25 לפונקציה $f(x)$ (המוגדרת לכל x) יש נקודת מקסימום $(2,5)$ ונקודת מינימום $(-1,-3)$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)=f(x-3)-5$ וקבעו את סוגן.

26 לפונקציה $f(x)$ (המוגדרת לכל x) יש נקודת מקסימום $(2,5)$ ונקודת מינימום $(-1,-3)$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)=3f(x+1)$ וקבעו את סוגן.

27 לפונקציה $f(x)$ (המוגדרת לכל x) יש נקודת מקסימום $(2,5)$ ונקודת מינימום $(-1,-3)$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)=-2f(x-1)+3$ וקבעו את סוגן.

28 לפונקציה $f(x)$ (המוגדרת לכל x) יש נקודת מקסימום $(2,5)$ ונקודת מינימום $(-1,-3)$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)=f(2x)-1$ וקבעו את סוגן.

29 לפונקציה $f(x)$ (המוגדרת לכל x) יש נקודת מקסימום $(2,5)$ ונקודת מינימום $(-1,-3)$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)=\frac{1}{2}f(-x)$ וקבעו את סוגן.

30 לפונקציה $f(x)$ אסימפטוטה אנכית $x=2$ ואסימפטוטה אופקית $y=-1$. מצאו את האסימפטוטות של $g(x)=3f(x-4)+2$.

31 לפונקציה $f(x)$ אסימפטוטה אנכית $x=-3$ ואסימפטוטה אופקית $y=2$. מצאו את האסימפטוטות של $g(x)=-f(2x)+5$.

32 ל-$f(x)$ נקודת מקסימום $(1,4)$ ונקודת מינימום $(3,0)$, ו-$f(x)\geq 0$ לכל x. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)=(f(x))^2$ ואת סוגן.

33 ל-$f(x)$ נקודת מינימום $(0,-4)$, והיא חותכת את ציר x רק ב-$x=\pm 2$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)=|f(x)|$ (סרטטו סקיצה של $f(x)$ ושל $g(x)$).

34 נתון: $g(x)=f(x-a)+b$, ונקודת המקסימום $(2,5)$ של $f(x)$ עברה לנקודה $(-1,8)$. מצאו את a ואת b.

✔ תשובות סופיות – נושא 20.1

1	$f'(x)=-\frac{12}{x^5}$
2	$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
3	$f'(x)=5(x^2-3x)^4(2x-3)$
4	$f'(x)=\frac{7}{2}x^2\sqrt{x}$
5	$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$
6	$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$
7	$f'(x)=-\frac{6}{(2x+1)^4}$
8	$f'(x)=x(x-1)^2(5x-2)$
9	$f'(x)=3\sin 6x$
10	$f'(x)=-\frac{2(x+1)}{x^3}$
11	$(0,-64)$ מינימום ; ב-$x=\pm 2$ אין קיצון (הנגזרת לא מחליפה סימן)
12	$(0,0)$ מינימום, $(1,1)$ מקסימום, $(2,0)$ מינימום
13	$f'(x)=-5(3-x)^4\le 0$; אין קיצון
14	$(0,1)$ מקסימום ; $y=0$
15	$x=-\frac{1}{5}$ מקסימום, $x=1$ מינימום ; ב-$x=-2$ אין קיצון
16	n זוגי – מינימום $(0,0)$; n אי-זוגי ($n\ge 3$) – אין קיצון
17	$(-1,0)$ מינימום, $(0,1)$ מקסימום, $(1,0)$ מינימום
18	$(0,-1)$ מינימום
19	$y=8x-7$
20	$a=-2$
21	עלייה: $-1<x<1$, $x>3$; ירידה: $x<-1$, $1<x<3$
22	$(2,\sqrt{5})$ מינימום ; $y\ge\sqrt{5}$
23	$(-1,-5)$ מינימום, $(2,11)$ מקסימום

24 $(-1,7)$ מקסימום, $(2,-1)$ מינימום

25 $(2,-8)$ מינימום, $(5,0)$ מקסימום

26 $(-2,-9)$ מינימום, $(1,15)$ מקסימום

27 $(0,9)$ מקסימום, $(3,-7)$ מינימום

28 $(-\frac{1}{2},-4)$ מינימום, $(1,4)$ מקסימום

29 $(-2,\frac{5}{2})$ מקסימום, $(1,-\frac{3}{2})$ מינימום

30 $x=6$, $y=-1$

31 $x=-\frac{3}{2}$, $y=3$

32 $(1,16)$ מקסימום, $(3,0)$ מינימום

33 $(0,4)$ מקסימום, $(-2,0)$ ו-$(2,0)$ מינימום

34 $a=-3$, $b=3$

20.2 חקירה עם פרמטר, פונקציה יורשת, זוגיות ושרטוט מראש

פרמטר: מציבים את הנתון (נקודה על הגרף – בפונקציה, קיצון – בנגזרת). פונקציה זוגית: $f(-x)=f(x)$ – סימטרית לציר y; אי-זוגית: $f(-x)=-f(x)$ – סימטרית לראשית. "שרטוט מראש": מסיקים את צורת הגרף מהנגזרת ומהנתונים – עוד לפני שמוצאים את הפונקציה.

צפו לפני שמתחילים:



איך מוצאים פרמטר בפונקציה? כל השיטות
YouTube · 6:41



איך מסווגים נקודת קיצון עם פרמטר?
YouTube · 12:32



פונקציה זוגית ואי-זוגית
YouTube · 11:29



קשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת
YouTube · 7:17

1 לפונקציה $f(x)=x^3+ax^2+bx$ יש נקודת קיצון $(1,-2)$. מצאו את a ואת b, וקבעו את סוג הקיצון.

2 לפונקציה $f(x)=ax^3-3x$ יש נקודת קיצון ב-$x=2$. מצאו את a.

3 לפונקציה $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ יש נקודת קיצון ב-$x=1$. מצאו את a ואת סוג הקיצון.

4 $f(x)=\frac{x^2+a}{x-1}$. מצאו את a שעבורו אין לגרף אסימפטוטה אנכית אלא "חור". מהי נקודת אי-הרציפות?

5 $f(x)=\frac{ax+2}{x-b}$, ולגרף אסימפטוטה אופקית $y=2$ ואסימפטוטה אנכית $x=3$. מצאו את a ואת b.

6 לאילו ערכי a אין לפונקציה $f(x)=x^3+ax$ נקודות קיצון?

7 כמה נקודות קיצון יש לפונקציה $f(x)=x^4-2ax^2$? הבחינו בין $a>0$ ל-$a\le 0$.

8 המשיק לגרף $f(x)=x^2+ax$ בנקודה שבה $x=1$ מקביל לישר $y=5x$. מצאו את a.

9 לפונקציה $f(x)=a\sqrt{x}+x$ יש נקודת קיצון ב-$x=4$. מצאו את a, ואת שיעור ה-y של הקיצון.

10 לפונקציה $f(x)=a\sin x+x$ יש נקודת קיצון ב-$x=\frac{\pi}{3}$. מצאו את a.

11 $f(x)=x^3-3a^2x$ כאשר $a>0$. הביעו באמצעות a את נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן.

12 $f(x)=(x-a)^2(x+a)$ כאשר $a>0$. הביעו באמצעות a את נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן.

13 ל-$f(x)$ נקודת מקסימום $(2,3)$, ו-$g(x)=f(x)+5$. הראו ש-$g'(x)=f'(x)$, ומצאו את נקודת המקסימום של $g(x)$.

14 ידוע ש-$F'(x)=f'(x)$ לכל x, ו-$F(0)=f(0)+2$. מהו $F(x)-f(x)$? נמקו.

15 $f(x)>0$ לכל x, ול-$f(x)$ נקודת מינימום יחידה $(1,2)$. מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)=(f(x))^2$ ואת סוגה.

16 ל-$f(x)$ נקודת מקסימום $(3,16)$, ו-$f(x)\geq 0$. מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)=\sqrt{f(x)}$ ואת סוגה.

17 $f(x)>0$ לכל x, ול-$f(x)$ נקודת מקסימום $(-1,4)$. מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ ואת סוגה.

18 ל-$f(x)$ נקודת מקסימום ב-$x=6$. באיזה x יש ל-$g(x)=f(2x)$ נקודת מקסימום?

19 ל-$f(x)$ נקודת מינימום $(0,-1)$. מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)=-3f(x)$ ואת סוגה.

20 קבעו אם הפונקציה $f(x)=x^4-3x^2$ זוגית, אי-זוגית או לא זו ולא זו. הוכיחו.

21 קבעו אם הפונקציה $f(x)=x^3-x$ זוגית, אי-זוגית או לא זו ולא זו. הוכיחו.

22 קבעו אם הפונקציה $f(x)=x^2+x$ זוגית, אי-זוגית או לא זו ולא זו. הוכיחו.

23 קבעו אם הפונקציה $f(x)=x^2\sin x$ זוגית, אי-זוגית או לא זו ולא זו. הוכיחו.

24 קבעו אם הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ זוגית, אי-זוגית או לא זו ולא זו. הוכיחו.

25 קבעו אם הפונקציה $f(x)=\cos x+x^2$ זוגית, אי-זוגית או לא זו ולא זו. הוכיחו.

26 $f(x)$ זוגית. עבור $x\geq 0$ ידוע שיש לה נקודת מקסימום $(2,5)$ ונקודת מינימום $(0,1)$. מצאו את כל נקודות הקיצון של $f(x)$.

27 $f(x)$ אי-זוגית ומוגדרת לכל x, ויש לה נקודת מקסימום $(1,3)$. מצאו נקודת קיצון נוספת, ואת $f(0)$.

28 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ היא פונקציה אי-זוגית. מה ניתן לומר על a ועל c?

29 $f(x)=ax^4+(a-2)x^3+x^2$ היא פונקציה זוגית. מצאו את a.

30 נתון $f'(x)=(x-1)^2(x+3)$. בלי למצוא את $f(x)$, קבעו את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של $f(x)$ ואת סוגן.

31 נתון $f'(x)=x(x-2)(x+2)$. בלי למצוא את $f(x)$, קבעו את נקודות הקיצון (שיעורי x) ואת סוגן.

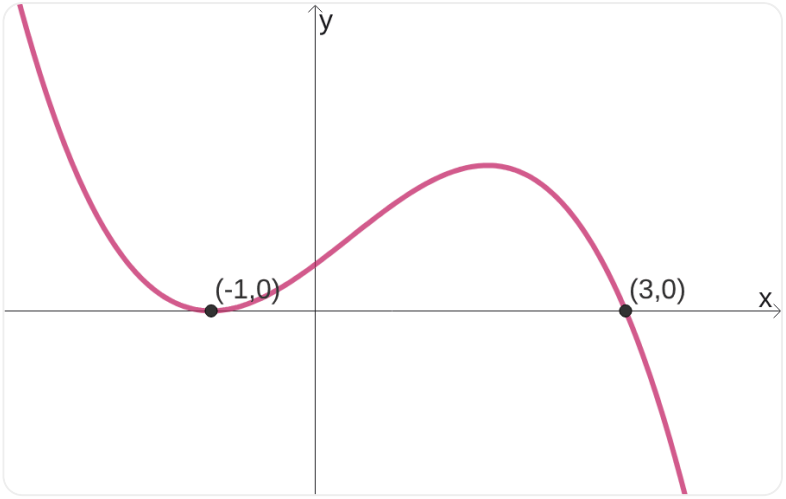
32 $f(x)$ מוגדרת לכל x, $f'(x)>0$ לכל x, ו-$f(0)=0$. כמה נקודות חיתוך יש לגרף עם ציר x? נמקו.

33 $f(x)=x^3-3x+k$. לאילו ערכי k יש לגרף בדיוק שלוש נקודות חיתוך עם ציר x?

34 $f(x)=x^4-4x^3$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$, והראו שב-$x=0$ אין קיצון. סרטטו סקיצה.

35 $f(x)=x+\frac{1}{x}$. הראו ש-$f(x)$ אי-זוגית, מצאו את נקודות הקיצון ואת האסימפטוטה האנכית.

36 בציור גרף **הנגזרת** $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x (זה לא הגרף של $f(x)$!). קבעו את שיעור ה-x של נקודת הקיצון של $f(x)$ ואת סוגה. האם ב-$x=-1$ יש ל-$f(x)$ קיצון? נמקו.



37 לפי גרף הנגזרת $f'(x)$ מהתרגיל הקודם: מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$, וסרטטו סקיצה אפשרית של $f(x)$.

✔ תשובות סופיות – נושא 20.2

1	$a=0$, $b=-3$; מינימום
2	$a=\frac{1}{4}$
3	$a=2$; מינימום
4	$a=-1$; $(1,2)$
5	$a=2$, $b=3$
6	$a\geq 0$
7	$a>0$: שלוש ; $a\leq 0$: אחת
8	$a=3$
9	$a=-4$; $y=-4$
10	$a=-2$
11	$(-a,2a^3)$ מקסימום, $(a,-2a^3)$ מינימום
12	$(-\frac{a}{3},\frac{32a^3}{27})$ מקסימום, $(a,0)$ מינימום
13	$(2,8)$
14	$F(x)-f(x)=2$ לכל x
15	$(1,4)$ מינימום
16	$(3,4)$ מקסימום
17	$(-1,\frac{1}{4})$ מינימום
18	$x=3$
19	$(0,3)$ מקסימום
20	זוגית
21	אי-זוגית
22	לא זוגית ולא אי-זוגית
23	אי-זוגית

24	אי-זוגית
25	זוגית
26	$(-2,5)$ מקסימום, $(0,1)$ מינימום, $(2,5)$ מקסימום
27	$(-1,-3)$ מינימום ; $f(0)=0$
28	$a=0$, $c=0$
29	$a=2$
30	$x=-3$ מינימום ; ב-$x=1$ אין קיצון
31	$x=-2$ מינימום, $x=0$ מקסימום, $x=2$ מינימום
32	נקודה אחת - $(0,0)$
33	$-2<k<2$
34	$(3,-27)$ מינימום ; ב-$x=0$ אין קיצון
35	$(-1,-2)$ מקסימום, $(1,2)$ מינימום ; $x=0$
36	$x=3$ מקסימום ; ב-$x=-1$ אין קיצון ($f'(x)$ לא מחליפה סימן)
37	עלייה: $x<3$; ירידה: $x>3$

פרק 20 סיכומון סוף פרק – סיכום לפרק החקירות

כל טכניקות הגזירה

- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- מכפלה: $(uv)' = u'v + uv'$. מנה: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- מורכבת: $(g(x)^n)' = n\,g(x)^{n-1} \cdot g'(x)$

פונקציה בחזקת n

- $(g(x))^n$: אפסים של $g(x)$ נשמרים. n זוגי – הגרף לא שלילי ומשיק בציר, n אי-זוגי – הסימן נשמר.
- הקיצון של $g(x)$ נשמר, ונוספים קיצונים באפסים כש-n זוגי.

טרנספורמציות כפולות

- מבצעים את הטרנספורמציות **אחת אחרי השנייה** על הנקודות המיוחדות.
- $a \cdot f(x-h) + k$: קודם הזזה אופקית, אחר כך מתיחה, ובסוף הזזה אנכית.
- בשילוב עם $\frac{1}{f(x)}$, $|f(x)|$, $\sqrt{f(x)}$ – מבצעים לפי הסדר שבו הן נבנות.

חקירה עם פרמטר

- נתון (קיצון, משיק, אסימפטוטה, נקודה על הגרף) הוא משוואה בפרמטר.
- קיצון ב-x_0: $f'(x_0) = 0$. נקודה על הגרף: $f(x_0) = y_0$.
- אחרי מציאת הפרמטר בודקים שהוא באמת מקיים את כל התנאים.

זוגית ואי-זוגית

- זוגית: $f(-x) = f(x)$, סימטרית לציר y.
- אי-זוגית: $f(-x) = -f(x)$, סימטרית לראשית.
- בפונקציה זוגית מספיק לחקור $x \geq 0$ ולשקף.

פונקציה יורשת ושרטוט מראש

- $g(x)$ שנבנית מ-$f(x)$ יורשת תכונות: אפסים, קיצון, תחומי עלייה וירידה.
- שרטוט מראש: אסימפטוטות וחיתוכים מראים את צורת הגרף לפני הגזירה.
- מגרף $f'(x)$: מעל הציר – $f(x)$ עולה, אפס עם החלפת סימן – קיצון.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- בטרנספורמציה כפולה לבצע את הפעולות בסדר הלא נכון.
- למצוא פרמטר מ-$f'(x_0) = 0$ ולא לבדוק שזו באמת נקודת קיצון.
- לבלבל בין גרף $f'(x)$ לגרף $f(x)$ בשאלות קשר גרף-נגזרת.
- להכריז על פונקציה "זוגית" רק לפי דוגמה מספרית אחת.

💡 **הטיפ של אילון:** בפרק הסיכום לא לומדים חומר חדש, אלא מחברים. לפני שאתם מתחילים, תשאלו: מאיזו פונקציה בסיס זה נבנה? ומה היא מורישה?

פרק 21

אינטגרלים

פונקציה קדומה, טכניקות, חישובי שטחים, זיהוי נגזרת פנימית ואינטגרל צובר

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

21.1 פונקציה קדומה וטכניקות אינטגרציה — 38 תרגילים

21.2 חישוב שטחים בעזרת אינטגרלים – כל המצבים — 32 תרגילים

21.3 זיהוי נגזרת פנימית ואינטגרל צובר — 33 תרגילים

סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

כל טכניקות האינטגרל – הסבר וסיכום מלא לבגרות
YouTube · 10:04

אינטגרל – שטח כלוא בין פונקציה לציר האיקס
YouTube · 6:18

אינטגרל זיהוי נגזרת פנימית – הסבר ברור לבגרות
YouTube · 5:36

אינטגרל צובר שטח – ההסבר המלא
YouTube · 5:24

המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

שטח מתחת לגרף

הזיזו את a ו-b, הגדילו את מספר המלבנים, וראו איך סכום המלבנים מתקרב לאינטגרל – ומה ההבדל בין אינטגרל לשטח.

21.1 פונקציה קדומה וטכניקות אינטגרציה

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (לכל $n \neq -1$), $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$,
$\int \sin(ax)\,dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + C$, $\int \cos(ax)\,dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C$,
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$. בדיקה תמיד: גוזרים את התשובה ומקבלים את מה שבתוך האינטגרל.

צפו לפני שמתחילים:

כל טכניקות האינטגרל – הסבר וסיכום מלא לבגרות
YouTube · 10:04

אינטגרלים – מציאת פונקציה קדומה
YouTube · 5:13

האינטגרל הלא מסוים – פונקציית שורש
YouTube · 4:09

האינטגרל הלא מסוים – פונקציה טריגונומטרית
YouTube · 5:00

1. מצאו את האינטגרל: $\int \left(3x^2 - 4x + 5\right) dx$
2. מצאו את האינטגרל: $\int \left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right) dx$
3. מצאו את האינטגרל: $\int \left(\sqrt{x}\right) dx$
4. מצאו את האינטגרל: $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$
5. מצאו את האינטגרל: $\int \left((2x+1)^5\right) dx$
6. מצאו את האינטגרל: $\int \left(\frac{1}{(3x-2)^2}\right) dx$
7. מצאו את האינטגרל: $\int \left(\sqrt{4x+1}\right) dx$
8. מצאו את האינטגרל: $\int \left(\sin 2x\right) dx$
9. מצאו את האינטגרל: $\int \left(\cos \frac{x}{3}\right) dx$

10 מצאו את האינטגרל: $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$

11 מצאו את האינטגרל: $\int \left(\frac{4}{\cos^2 2x}\right) dx$

12 מצאו את האינטגרל: $\int \left((x+1)^2\right) dx$ (שתי דרכים: פתיחת סוגריים או כלל ההרכבה)

13 מצאו את האינטגרל: $\int \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) dx$ (חלקו כל איבר במכנה)

14 מצאו את האינטגרל: $\int \left((\sqrt{x}+1)^2\right) dx$ (פתחו סוגריים קודם)

15 מצאו את האינטגרל: $\int \left(x(x-3)\right) dx$

16 מצאו את האינטגרל: $\int \left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) dx$

17 מצאו את האינטגרל: $\int \left(\sin x + \cos x\right) dx$

18 מצאו את האינטגרל: $\int \left(\sin^2 x\right) dx$ (רמז: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$)

19 מצאו את האינטגרל: $\int \left(\frac{6}{(2x+1)^4}\right) dx$

20 מצאו את האינטגרל: $\int \left(\frac{x^4+2x}{x}\right) dx$

21 מצאו את הפונקציה הקדומה של $f(x) = 3x^2 - 2$ שגרפה עובר בנקודה $(1,4)$.

22 ידוע ש-$f'(x) = 6x$ ו-$f(2) = 10$. מצאו את $f(x)$.

23 ידוע ש-$f'(x) = \cos x$ ו-$f(\pi) = 2$. מצאו את $f(x)$.

24 ידוע ש-$f''(x) = 6x$, $f'(1) = 0$ ו-$f(1) = 2$. מצאו את $f(x)$.

25 שיפוע המשיק לגרף $f(x)$ בכל נקודה הוא $2x - 4$, והגרף עובר בנקודה $(0,3)$. מצאו את $f(x)$ ואת נקודת הקיצון שלה.

26 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$, והגרף של $f(x)$ עובר בנקודה $(1,5)$. מצאו את $f(x)$.

27 $F'(x)=x^2$, והישר $y=4x-3$ משיק לגרף $F(x)$ בנקודה שבה $x=2$. מצאו את $F(x)$.

28 $F'(x)=2x-6$, וערך המינימום של $F(x)$ הוא 1. מצאו את $F(x)$.

29 מצאו את a אם ידוע ש-$F(x)=ax^3+2x$ היא פונקציה קדומה של $f(x)=6x^2+2$.

30 הראו ש-$F(x)=\sin^2 x$ היא פונקציה קדומה של $f(x)=\sin 2x$. האם גם $G(x)=-\cos^2 x$ היא פונקציה קדומה שלה? נמקו.

31 חשבו: $\int_0^2(3x^2+1)\,dx$

32 חשבו: $\int_1^4\sqrt{x}\,dx$

33 חשבו: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$

34 חשבו: $\int_{-1}^1 x^3\,dx$ (מה הקשר לפונקציה אי-זוגית?)

35 חשבו: $\int_1^2\frac{1}{x^2}\,dx$

36 חשבו: $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

37 חשבו: $\int_0^1(2x+1)^3\,dx$

38 מצאו את $a>0$ שעבורו $\int_0^a 2x\,dx=9$.

✔ תשובות סופיות – נושא 21.1

1	x^3-2x^2+5x+C
2	$\frac{x^4}{4}+\frac{1}{x}+C$
3	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$
4	$2\sqrt{x}+C$
5	$\frac{(2x+1)^6}{12}+C$
6	$-\frac{1}{3(3x-2)}+C$
7	$\frac{(4x+1)\sqrt{4x+1}}{6}+C$
8	$-\frac{1}{2}\cos 2x+C$
9	$3\sin\frac{x}{3}+C$
10	$\tan x+C$
11	$2\tan 2x+C$
12	$\frac{(x+1)^3}{3}+C$
13	$x+\frac{1}{x}+C$
14	$\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x+C$
15	$\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+C$
16	$-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$
17	$-\cos x+\sin x+C$
18	$\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$
19	$-\frac{1}{(2x+1)^3}+C$
20	$\frac{x^4}{4}+2x+C$
21	$F(x)=x^3-2x+5$
22	$f(x)=3x^2-2$
23	$f(x)=\sin x+2$

24 $f(x)=x^3-3x+4$

25 $f(x)=x^2-4x+3$; $(2,-1)$ מינימום

26 $f(x)=2\sqrt{x+3}+1$

27 $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{7}{3}$

28 $F(x)=x^2-6x+10$

29 $a=2$

30 כן לשתיהן - הן נבדלות בקבוע: $\sin^2 x-(-\cos^2 x)=1$

31 10

32 $\frac{14}{3}$

33 1

34 0

35 $\frac{1}{2}$

36 1

37 10

38 $a=3$

21.2 חישוב שטחים בעזרת אינטגרלים – כל המצבים

שטח בין גרף לציר x – מחשבים כל חלק בנפרד (שטח מתחת לציר יוצא שלילי באינטגרל – לוקחים ערך מוחלט). שטח בין שני גרפים: $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$, כאשר $f(x)$ היא הפונקציה העליונה ו-$g(x)$ התחתונה בתחום. תמיד מתחילים בנקודות החיתוך!

צפו לפני שמתחילים:

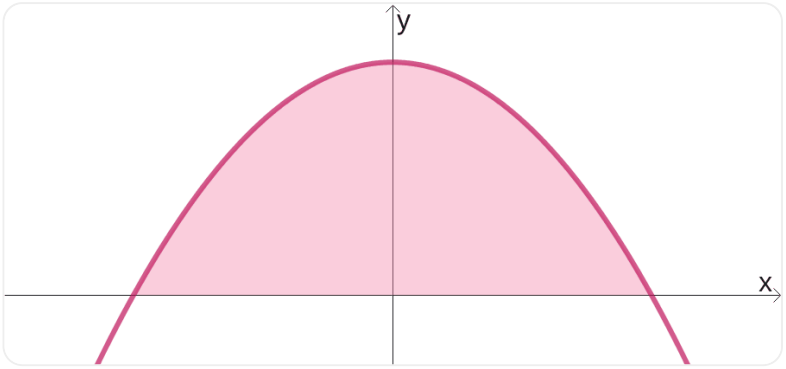
אינטגרל – שטח כלוא בין פונקציה לציר האיקס
YouTube · 6:18

אינטגרלים – שטח כלוא בין פונקציות ושטח מפוצל
YouTube · 5:32

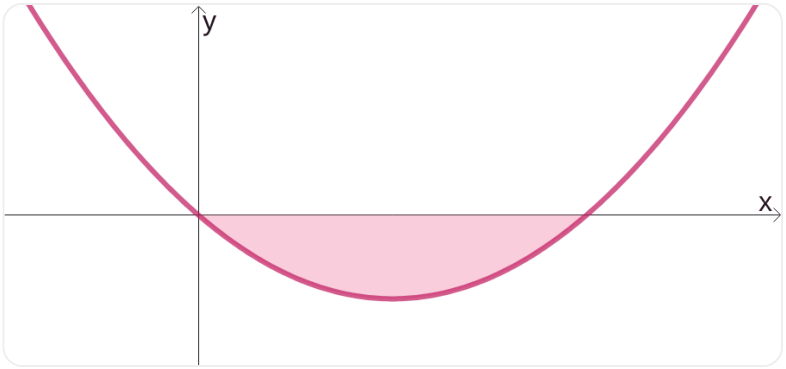
אינטגרלים – מציאת שטח מורכב
YouTube · 5:05

אינטגרל – עבודה עם פרמטר
YouTube · 3:31

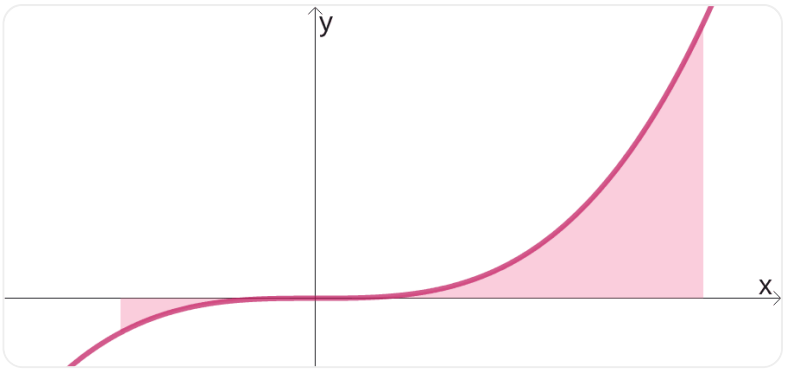
1 בציור גרף הפונקציה $f(x)=-x^2+4$. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה לבין ציר x.



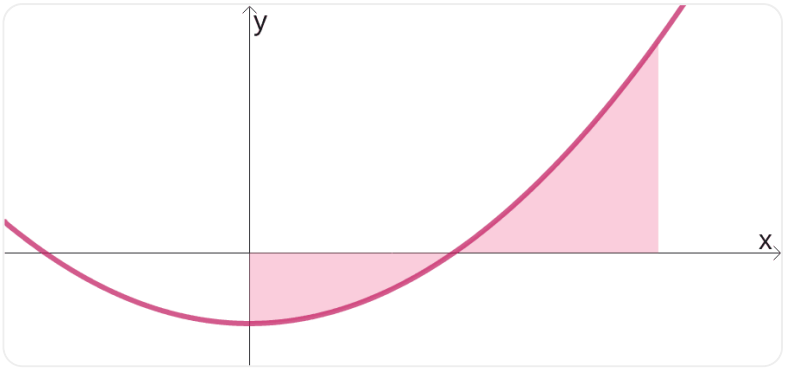
2 בציור גרף הפונקציה $f(x)=x^2-2x$. חשבו את השטח הכלוא בין הגרף לציר x (שימו לב: השטח מתחת לציר!).



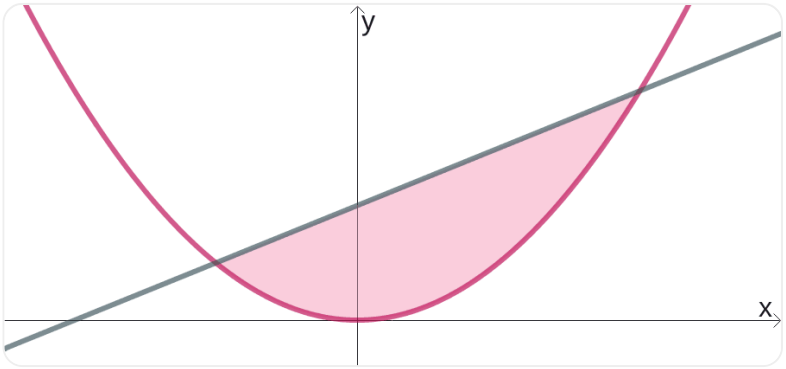
3 בציור גרף הפונקציה $f(x)=x^3$. חשבו את השטח המוגבל בין הגרף, ציר x והישרים $x=-1$ ו-$x=2$ (שטח מפוצל).



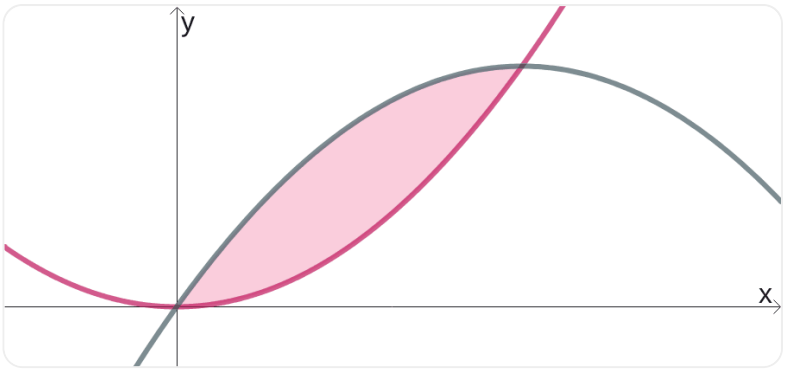
4 בציור גרף הפונקציה $f(x)=x^2-1$. חשבו את השטח המוגבל בין הגרף, ציר x, ציר y והישר $x=2$.



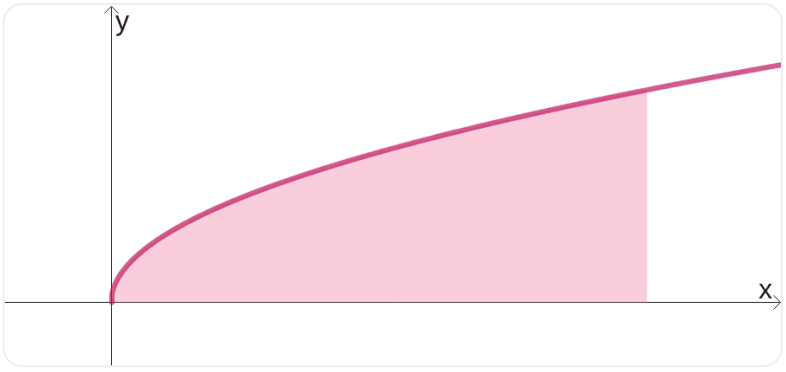
5 בציור הגרפים של $f(x)=x^2$ ו-$g(x)=x+2$. מצאו את נקודות החיתוך וחשבו את השטח הכלוא בין הגרפים.



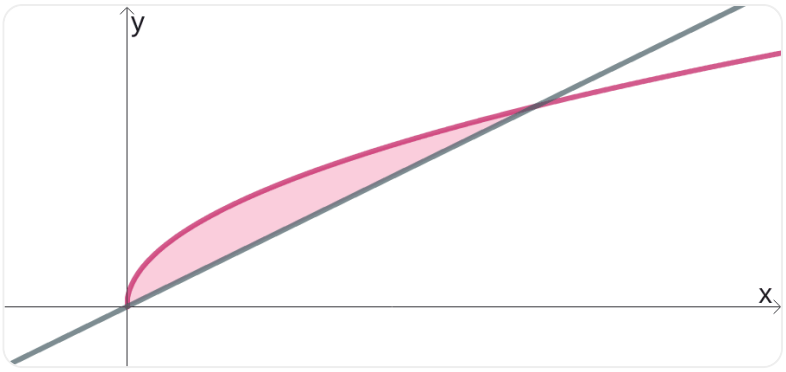
6 בציור הגרפים של $f(x)=x^2$ ו-$g(x)=4x-x^2$. חשבו את השטח הכלוא בין הגרפים.



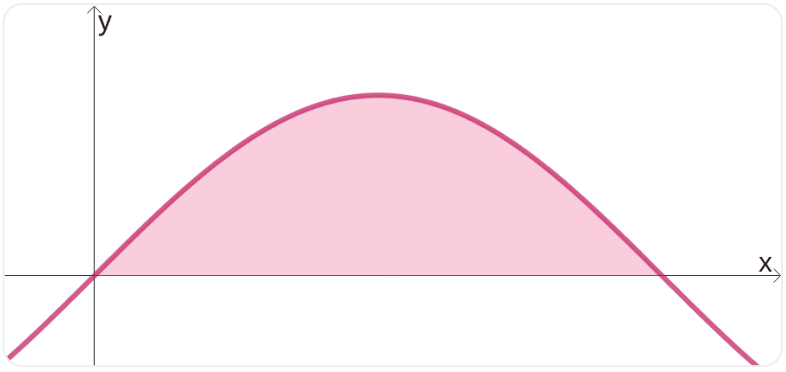
7 בציור גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$. חשבו את השטח המוגבל בין הגרף, ציר x והישר $x=4$.



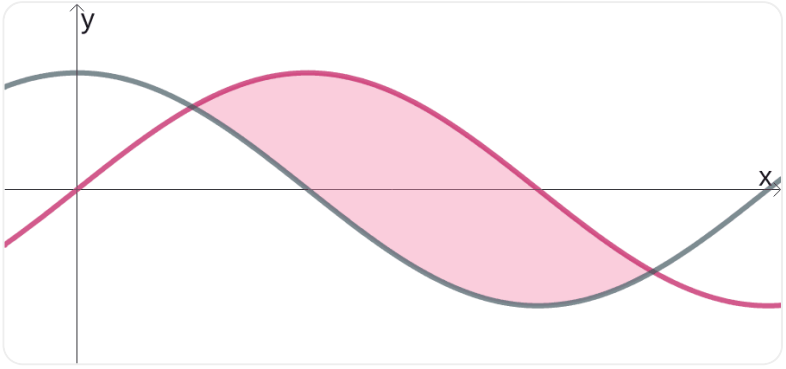
8 בציור הגרפים של $f(x)=\sqrt{x}$ ו-$g(x)=x$. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.



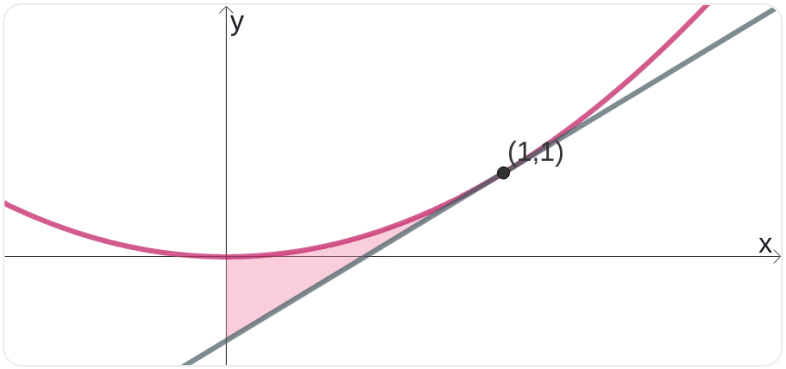
9 בציור גרף הפונקציה $f(x)=\sin x$ בתחום $0\le x\le \pi$. חשבו את השטח הכלוא בין הגרף לציר x.



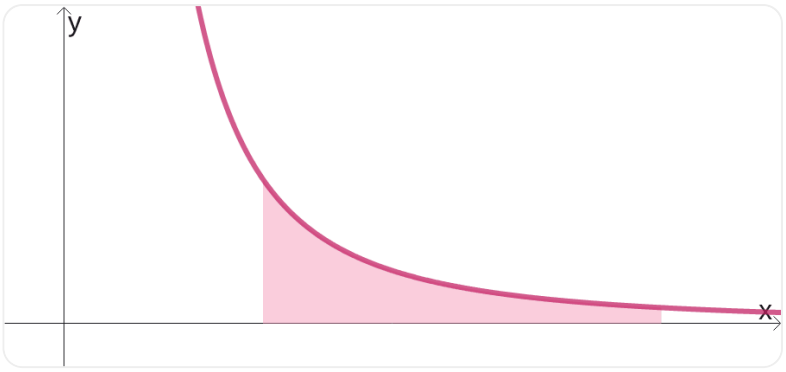
10 בציור הגרפים של $f(x)=\sin x$ ו-$g(x)=\cos x$. חשבו את השטח הכלוא ביניהם בין $x=\frac{\pi}{4}$ ל-$x=\frac{5\pi}{4}$.



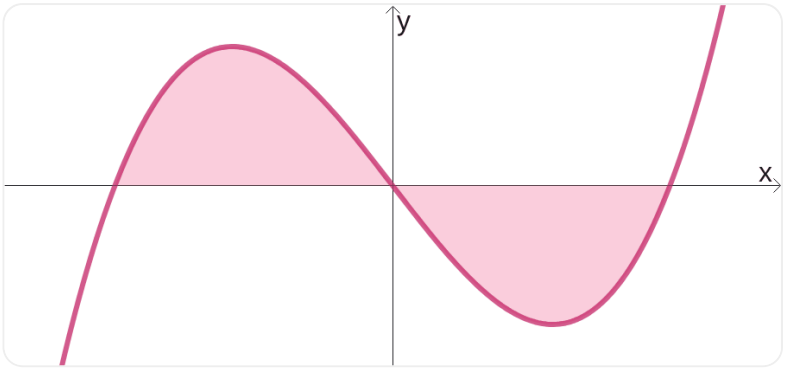
11 בציור גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ והמשיק לגרף בנקודה שבה $x=1$. מצאו את משוואת המשיק, וחשבו את השטח המוגבל בין הגרף, המשיק וציר y.



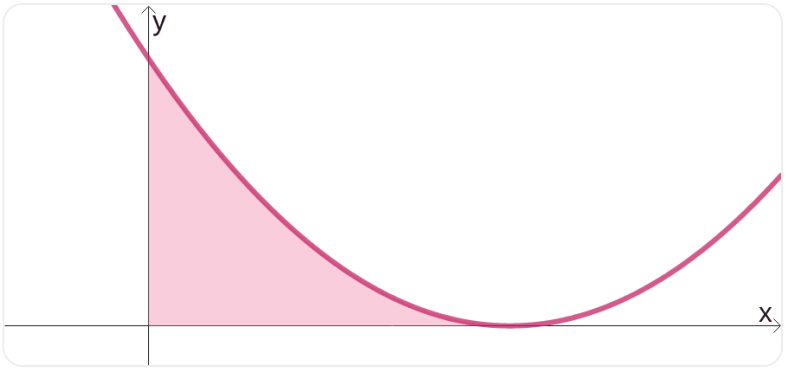
12 בציור גרף הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2}$. חשבו את השטח המוגבל בין הגרף, ציר x והישרים $x=1$ ו-$x=3$.



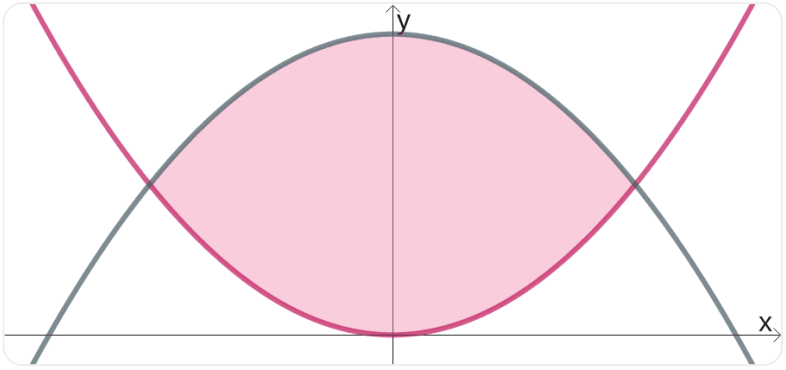
13 בציור גרף הפונקציה $f(x)=x^3-4x$. חשבו את סכום השטחים הכלואים בין הגרף לציר x.



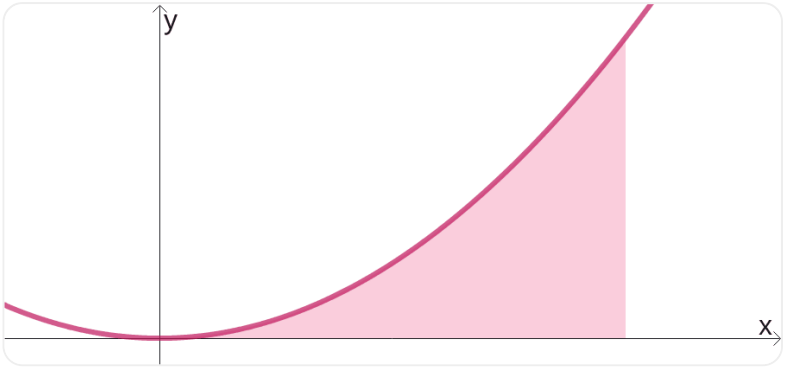
14 בציור גרף הפונקציה $f(x)=(x-2)^2$. חשבו את השטח המוגבל בין הגרף לבין שני הצירים.



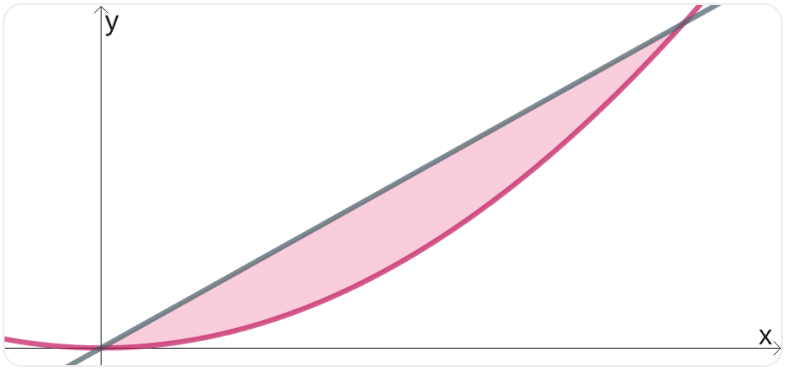
15 בציור הגרפים של $f(x)=x^2$ ו- $g(x)=8-x^2$. חשבו את השטח הכלוא בין הגרפים.



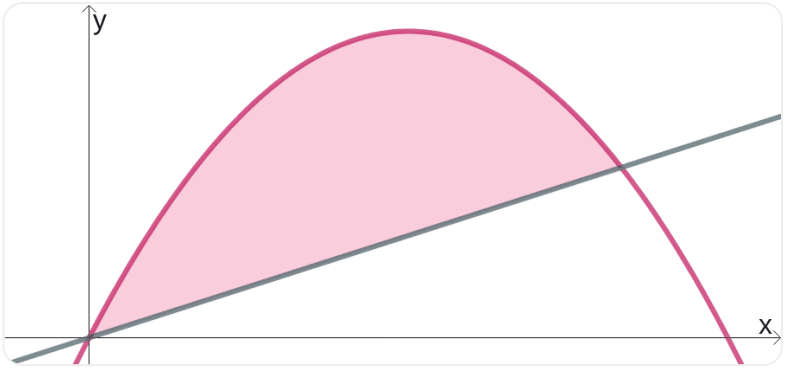
16 בציור גרף הפונקציה $f(x)=x^2$. השטח המוגבל בין הגרף, ציר x והישר $x=a$ ($a>0$) הוא 9. מצאו את a.



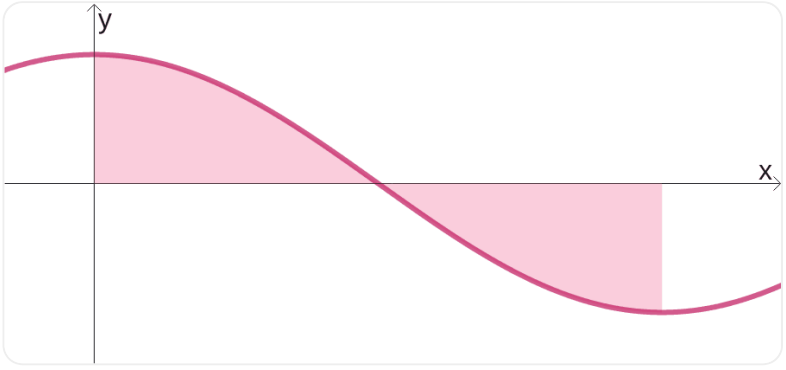
17 בציור גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ והישר $y=ax$ ($a>0$). השטח הכלוא ביניהם הוא 36. מצאו את a.



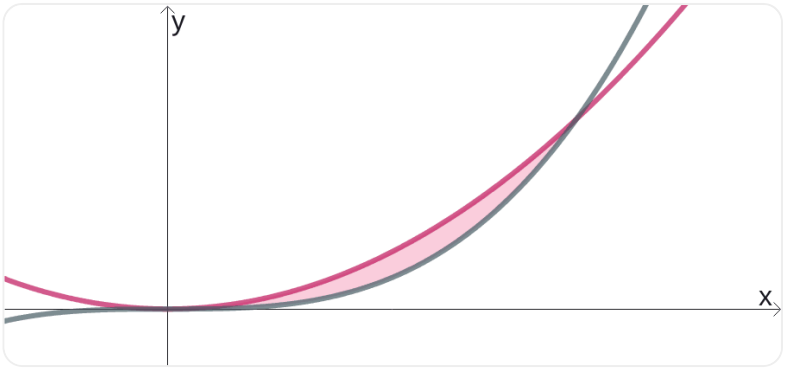
18 בציור הגרפים של $f(x)=-x^2+6x$ ו-$g(x)=x$. חשבו את השטח הכלוא בין הגרפים.



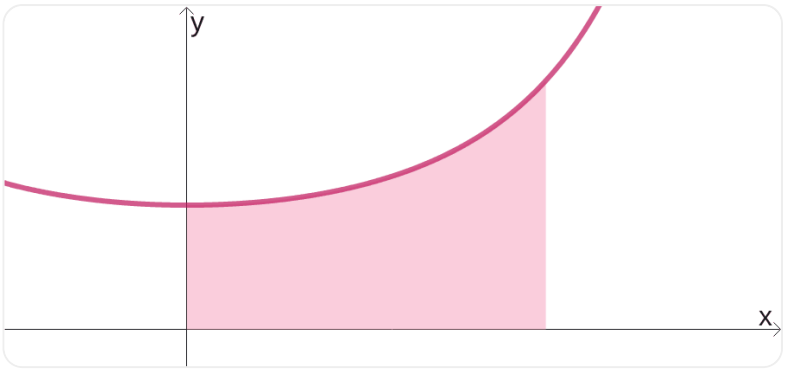
19 בציור גרף הפונקציה $f(x)=\cos x$ בתחום $0\le x\le \pi$. חשבו את השטח הכלוא בין הגרף, ציר x והישרים $x=0$ ו-$x=\pi$.



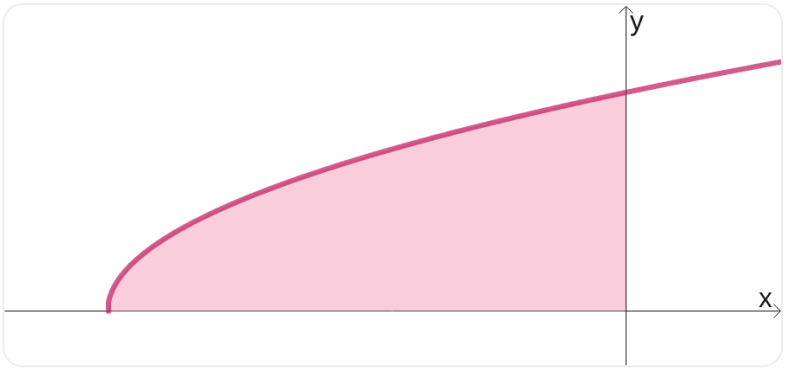
20 בציור הגרפים של $f(x)=x^2$ ו- $g(x)=x^3$. חשבו את השטח הכלוא ביניהם בתחום $0\le x\le 1$.



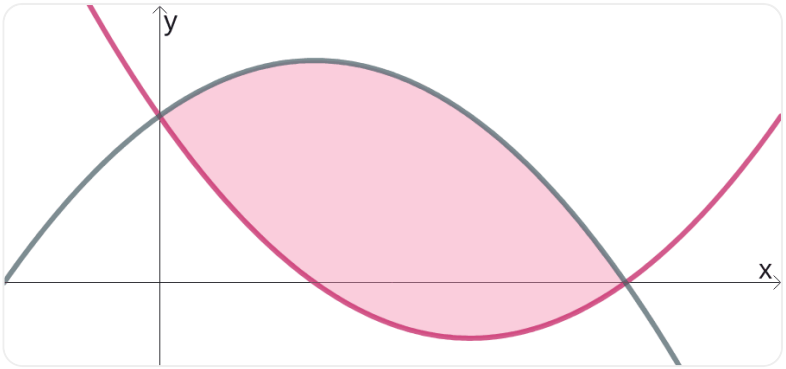
21 בציור גרף הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$. חשבו את השטח המוגבל בין הגרף, הצירים והישר $x=\frac{\pi}{4}$.



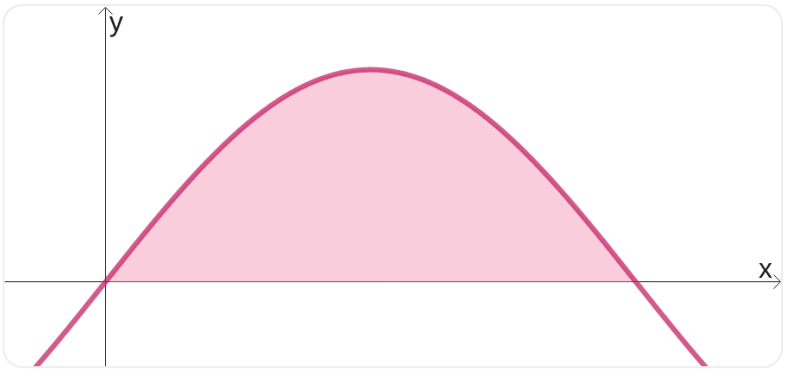
22 בציור גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{x+4}$. חשבו את השטח המוגבל בין הגרף לבין שני הצירים.



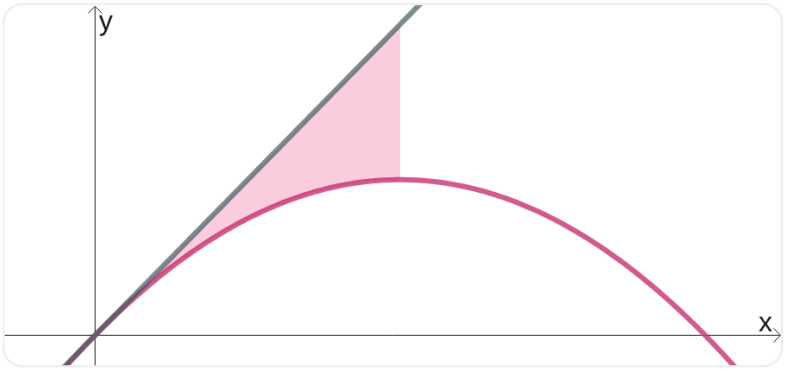
23 בציור הגרפים של $f(x)=x^2-4x+3$ ו-$g(x)=-x^2+2x+3$. חשבו את השטח הכלוא בין הגרפים.



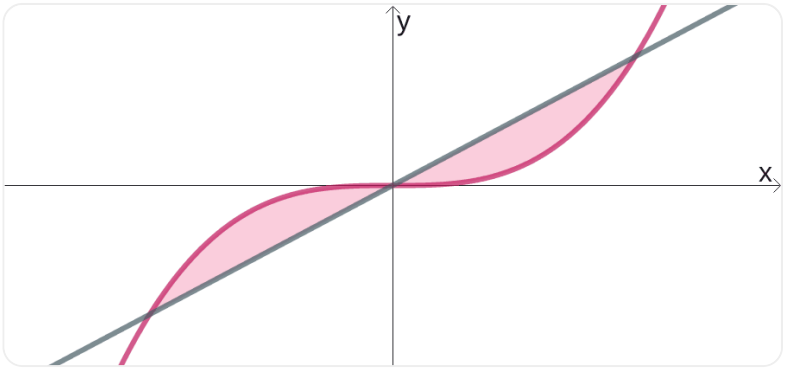
24 בציור גרף הפונקציה $f(x)=\sin 2x$ בתחום $0\le x\le \frac{\pi}{2}$. חשבו את השטח הכלוא בין הגרף לציר x.



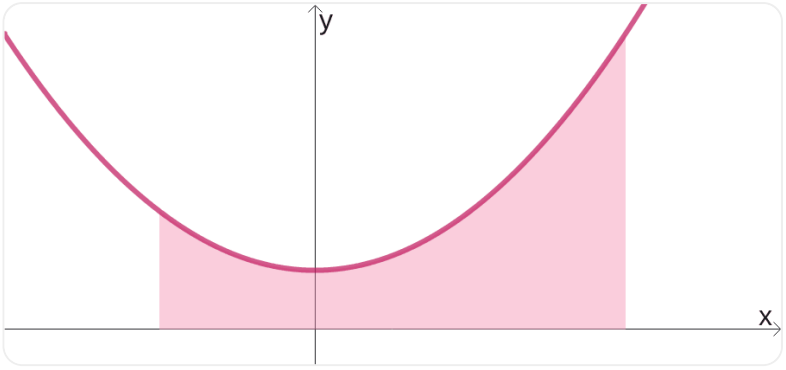
25 בציור גרף הפונקציה $f(x)=-x^2+4x$ והמשיק לגרף בראשית הצירים. מצאו את משוואת המשיק, וחשבו את השטח המוגבל בין הגרף, המשיק והישר $x=2$.



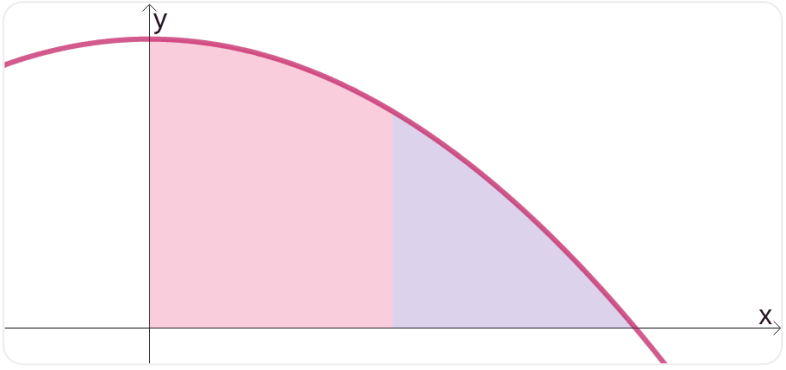
26 בציור הגרפים של $f(x)=x^3$ ו-$g(x)=x$. חשבו את סכום השטחים הכלואים בין שני הגרפים.



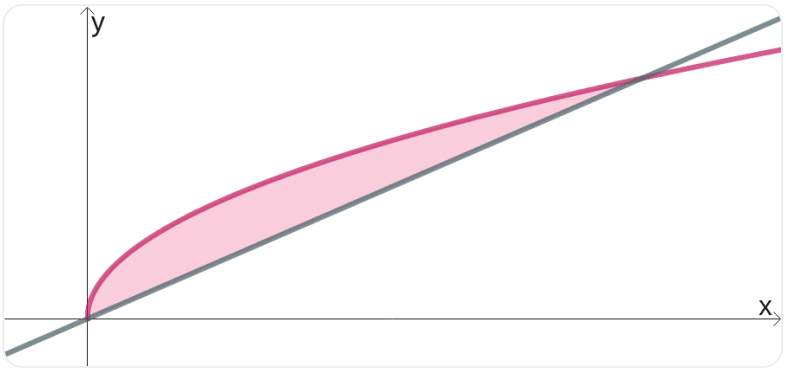
27 בציור גרף הפונקציה $f(x)=x^2+1$. חשבו את השטח המוגבל בין הגרף, ציר x והישרים $x=-1$ ו-$x=2$.



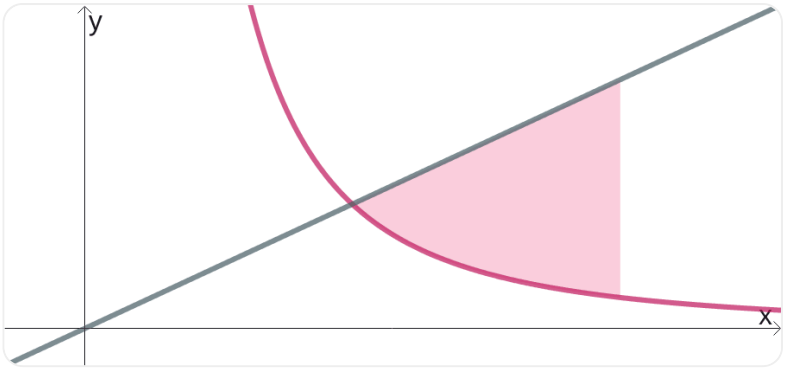
28 בציור גרף הפונקציה $f(x)=4-x^2$ ברביע הראשון. הישר $x=1$ מחלק את השטח שבין הגרף לצירים לשני חלקים. מצאו את היחס בין השטח השמאלי לשטח הימני.



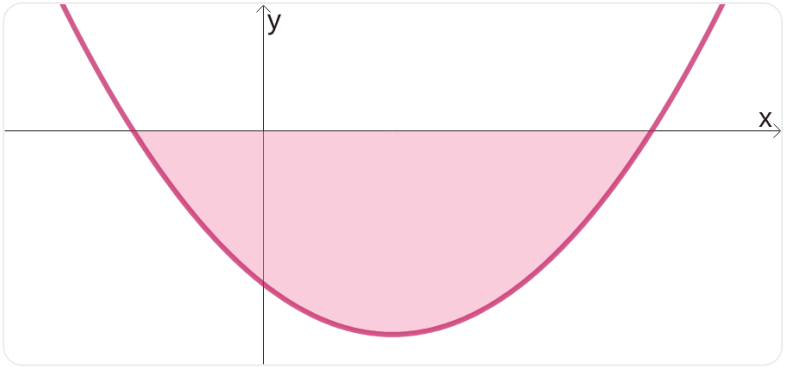
29 בציור הגרפים של $f(x)=\sqrt{x}$ ו-$g(x)=\frac{x}{2}$. חשבו את השטח הכלוא ביניהם.



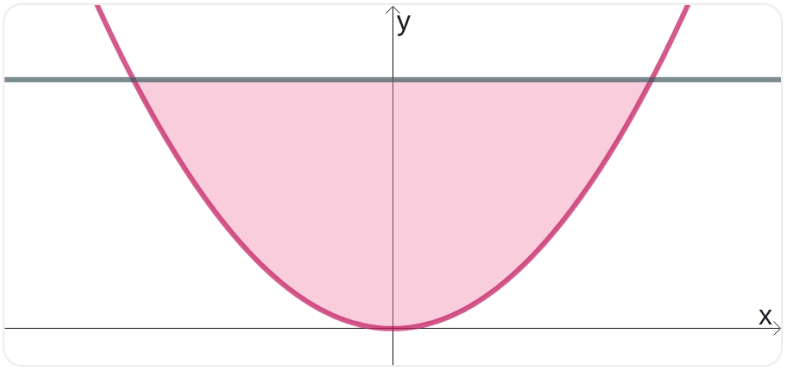
30 בציור הגרפים של $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ו-$g(x)=x$. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים והישר $x=2$.



31 בציור גרף הפונקציה $f(x)=x^2-2x-3$. חשבו את השטח הכלוא בין הגרף לציר x.



32 בציור גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ והישר $y=4$. חשבו את השטח הכלוא בין הגרף לישר.



✔ תשובות סופיות – נושא 21.2

1	$\frac{32}{3}$
2	$\frac{4}{3}$
3	$\frac{17}{4}$
4	2
5	$(-1,1)$, $(2,4)$; $\frac{9}{2}$
6	$\frac{8}{3}$
7	$\frac{16}{3}$
8	$\frac{1}{6}$
9	2
10	$2\sqrt{2}$
11	$y=2x-1$; $\frac{1}{3}$
12	$\frac{2}{3}$
13	8
14	$\frac{8}{3}$
15	$\frac{64}{3}$
16	$a=3$
17	$a=6$
18	$\frac{125}{6}$
19	2
20	$\frac{1}{12}$
21	1
22	$\frac{16}{3}$
23	9

24 1

25 $y = 4x \ ; \ \frac{8}{3}$

26 $\frac{1}{2}$

27 6

28 $\frac{11}{3} : \frac{5}{3} = 11 : 5$

29 $\frac{4}{3}$

30 1

31 $\frac{32}{3}$

32 $\frac{32}{3}$

21.3 זיהוי נגזרת פנימית ואינטגרל צובר

זיהוי נגזרת פנימית: אם באינטגרל יש $(g(x))^n \cdot g'(x)$ – התשובה $\frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C$.
אינטגרל צובר: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ מקיים $F(a) = 0$ ו-$F'(x) = f(x)$ – לכן נקודות הקיצון של $F(x)$ הן היכן ש-$f(x)$ מחליפה סימן.

צפו לפני שמתחילים:



אינטגרל זיהוי נגזרת פנימית – הסבר ברור לבגרות
YouTube · 5:36



אינטגרל צובר שטח – ההסבר המלא
YouTube · 5:24



סעיפי חשיבה אינטגרלים 5 יחידות
YouTube · 26:13

1. מצאו את האינטגרל בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית: $\int 2x(x^2+1)^3\,dx$
2. מצאו את האינטגרל בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית: $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
3. מצאו את האינטגרל בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית: $\int 3x^2(x^3-2)^5\,dx$
4. מצאו את האינטגרל בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית: $\int x(x^2-4)^2\,dx$
5. מצאו את האינטגרל בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית: $\int \sin x \cos^2 x\,dx$
6. מצאו את האינטגרל בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית: $\int \cos x \sin^3 x\,dx$
7. מצאו את האינטגרל בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית: $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$
8. מצאו את האינטגרל בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית: $\int \frac{2x+1}{(x^2+x)^2}\,dx$
9. מצאו את האינטגרל בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית: $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx$
10. מצאו את האינטגרל בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית: $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$

11 מצאו את האינטגרל בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית: $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx$

12 מצאו את האינטגרל בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית: $\int x\cos\left(x^2\right)\,dx$

13 מצאו את האינטגרל בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית: $\int \frac{x^2}{(x^3+1)^2}\,dx$

14 מצאו את האינטגרל בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית: $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)^2}\,dx$

15 מצאו את האינטגרל בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית: $\int \sin 2x\cos 2x\,dx$

16 מצאו את האינטגרל בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית: $\int (6x^2-2)(x^3-x)^4\,dx$

17 מצאו את האינטגרל בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית: $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx$

18 חשבו: $\int_0^1 2x(x^2+1)^2\,dx$

19 חשבו: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx$

20 חשבו: $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$

21 $F(x)=\int_1^x (3t^2-2t)\,dt$. מצאו את $F(x)$ באופן מפורש, ובדקו ש-$F(1)=0$.

22 $F(x)=\int_0^x (t^2-4)\,dt$. מצאו את $F'(x)$, ואת נקודות הקיצון של $F(x)$ וסוגן.

23 $F(x)=\int_2^x f(t)\,dt$ כאשר $f(x)$ רציפה. מהו $F(2)$? ומהי $F'(x)$?

24 $G(x)=\int_0^x \sin t\,dt$. מצאו את $G(x)$ ואת הערך הגדול ביותר שלה.

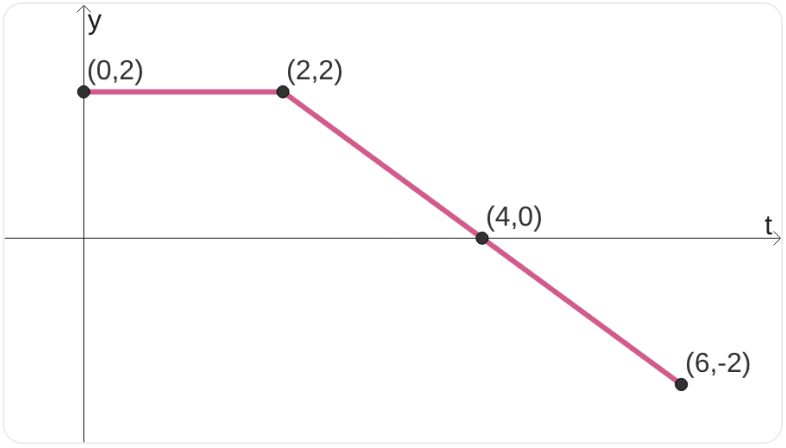
25 ידוע ש-$\int_a^x 2t\,dt = x^2-9$ לכל x. מצאו את ערכי a האפשריים.

26 $F(x)=\int_1^x \sqrt{t}\,dt$. חשבו את $F(4)$, ואת $F'(4)$.

27 $F(x)=\int_0^x (t-1)(t-3)\,dt$. מצאו את נקודות הקיצון של $F(x)$ ואת סוגן.

28 $F(x)=\int_{-1}^{x}(t^2+1)\,dt$. הראו ש-$F(x)$ עולה לכל x, ומצאו את נקודת החיתוך היחידה של $F(x)$ עם ציר x.

29 בציור גרף הפונקציה $f(t)$ בתחום $0\le t\le 6$ (הגרף בנוי מקטעים ישרים). נגדיר $F(x)=\int_{0}^{x}f(t)\,dt$. חשבו את $F(2)$, $F(4)$ ו-$F(6)$ בעזרת שטחים בלבד.



30 לפי הגרף של $f(t)$ שבתרגיל הקודם, ו-$F(x)=\int_{0}^{x}f(t)\,dt$: באיזה x הפונקציה $F(x)$ מקבלת את ערכה הגדול ביותר? נמקו בעזרת $F'(x)=f(x)$.

31 לפי הגרף של $f(t)$ שבתרגיל הקודם, ו-$F(x)=\int_{0}^{x}f(t)\,dt$: מצאו את תחומי העלייה והירידה של $F(x)$ בתחום $0<x<6$.

32 לפי הגרף של $f(t)$ שבתרגיל הקודם, ו-$F(x)=\int_{0}^{x}f(t)\,dt$: מהו הערך הקטן ביותר של $F(x)$ בתחום $0\le x\le 6$, ובאיזה x הוא מתקבל?

33 לפי הגרף של $f(t)$ שבתרגיל הקודם, ו-$F(x)=\int_{0}^{x}f(t)\,dt$: מהו השיפוע של גרף $F(x)$ ב-$x=1$ וב-$x=5$?

✔ תשובות סופיות – נושא 21.3

1	$\frac{(x^2+1)^4}{4}+C$
2	$\sqrt{x^2+1}+C$
3	$\frac{(x^3-2)^6}{6}+C$
4	$\frac{(x^2-4)^3}{6}+C$
5	$-\frac{\cos^3 x}{3}+C$
6	$\frac{\sin^4 x}{4}+C$
7	$-\frac{1}{\sin x}+C$
8	$-\frac{1}{x^2+x}+C$
9	$\frac{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}{3}+C$
10	$\frac{1}{2\cos^2 x}+C$
11	$\frac{\tan^2 x}{2}+C$
12	$\frac{\sin\left(x^2\right)}{2}+C$
13	$-\frac{1}{3(x^3+1)}+C$
14	$-\frac{2}{\sqrt{x}+1}+C$
15	$\frac{\sin^2 2x}{4}+C$
16	$\frac{2(x^3-x)^5}{5}+C$
17	$\sqrt{x^2+4x}+C$
18	$\frac{7}{3}$
19	$\frac{1}{2}$
20	$3-\sqrt{5}$
21	$F(x)=x^3-x^2$
22	$F'(x)=x^2-4$; $\left(-2,\frac{16}{3}\right)$ מקסימום, $\left(2,-\frac{16}{3}\right)$ מינימום

23 $F'(x)=f(x)\ ;\ F(2)=0$

24 $G(x)=1-\cos x$; ערך מקסימלי 2

25 $a=3$ או $a=-3$

26 $F(4)=\frac{14}{3}\ ;\ F'(4)=2$

27 $(1,\frac{4}{3})$ מקסימום, $(3,0)$ מינימום

28 $F'(x)=x^2+1>0\ ;\ (-1,0)$

29 $F(2)=4\ ,F(4)=6\ ,F(6)=4$

30 $x=4$ (שם $f(x)$ מחליפה סימן מחיובי לשלילי), $F(4)=6$

31 עלייה: $0<x<4$; ירידה: $4<x<6$

32 $x=0$ ב-0,

33 $F'(1)=2\ ,F'(5)=-1$

פרק 21 סיכומון סוף פרק – אינטגרלים

פונקציות קדומות בסיסיות

- $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (כש-$n \neq -1$)
- $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$,
  $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$,
  $\int \cos x\,dx = \sin x + C$,
  $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$

טכניקות

- לפני שמבצעים אינטגרל, פותחים סוגריים ומפרקים שבר לסכום.
- ביטוי לינארי פנימי:
  $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$
- מציאת $f(x)$ מ-$f'(x)$ ונקודה: מבצעים אינטגרל ומוצאים את C מהנקודה.

אינטגרל מסוים

- $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$
- שטח הוא תמיד חיובי. מתחת לציר x האינטגרל שלילי, ולכן לוקחים ערך מוחלט.

חישוב שטחים – כל המצבים

- בין גרף לציר x: מחלקים בנקודות החיתוך עם הציר.
- בין שני גרפים: $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$, כש-$f(x)$ הגרף העליון, $g(x)$ התחתון, והגבולות הם נקודות החיתוך.
- שטח מורכב: מחלקים לחלקים לפי נקודות שבהן "העליון" מתחלף.
- שטח עם פרמטר: בונים משוואה (אינטגרל = שטח נתון) ופותרים.

זיהוי נגזרת פנימית

- $\int g'(x)\,(g(x))^n\,dx = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C$
- $\int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\,dx = 2\sqrt{g(x)} + C$
- $\int \sin^n x \cos x\,dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C$
- בודקים את התשובה בגזירה חוזרת.

אינטגרל צובר

- $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, ולכן $F'(x) = f(x)$ ו-$F(a) = 0$.
- $f(t)$ חיובית – $F(x)$ עולה. אפס של $f(t)$ עם החלפת סימן – קיצון של $F(x)$.
- ערך של $F(x)$ = השטח המסומן (מעל הציר בחיוב, מתחת לציר בשלילה).

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לשכוח את $+C$ באינטגרל לא מסוים.
- לחשב שטח שחלקו מתחת לציר באינטגרל אחד, וכך החלקים "מבטלים" זה את זה.
- לא לחלק במקדם של הביטוי הפנימי $ax + b$.
- לבלבל בין "עליון" ל"תחתון" ולקבל שטח שלילי.

💡 **הטיפ של אילון:** תמיד תשרטטו את השטח לפני שאתם כותבים אינטגרל. שרטוט של 10 שניות חוסך את הטעות הנפוצה ביותר בפרק – גבולות לא נכונים.

פרק 22

בעיות קיצון

איך מוצאים את הגדול ביותר, הקטן ביותר, הקצר ביותר והחסכוני ביותר – בעזרת נגזרת

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

22.1 בעיות קיצון אלגבריות וגרפיות — 34 תרגילים

22.2 בעיות קיצון גיאומטריות וטריגונומטריות — 32 תרגילים

סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



מפה – בעיות קיצון
YouTube · 3:43



בעיות קיצון גיאומטריות
YouTube · 10:22



בעיות קיצון בפונקציות וגרפים
YouTube · 13:54



בעיות קיצון טריגונומטריות
YouTube · 10:35

המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף



מעבדת בעיות קיצון
גררו מלבן מתחת לפרבולה וראו בזמן אמת את גרף השטח ואת נקודת המקסימום.

22.1 בעיות קיצון אלגבריות וגרפיות

סדר הפעולות: (1) בוחרים משתנה ומסמנים את התחום שלו; (2) בונים פונקציה של הגודל שרוצים למקסם/למזער; (3) גוזרים ומשווים לאפס; (4) מוודאים שזה אכן מקסימום/מינימום – וזוכרים לבדוק גם את **קצוות התחום**!

צפו לפני שמתחילים:



מפה – בעיות קיצון
YouTube · 3:43



בעיות קיצון בפונקציות וגרפים
YouTube · 13:54



קיצון קצה / פנימי, מוחלט / מקומי
YouTube · 7:52

1 סכום של שני מספרים חיוביים הוא 20. מצאו את שני המספרים שמכפלתם מקסימלית, ואת המכפלה.

2 סכום של שני מספרים חיוביים הוא 12. מצאו את המספרים שעבורם סכום הריבועים שלהם מינימלי.

3 מכפלה של שני מספרים חיוביים היא 36. מצאו את המספרים שעבורם סכומם מינימלי.

4 x ו-y מספרים חיוביים המקיימים $x+y=9$. מצאו את x ו-y שעבורם הביטוי x^2y מקסימלי.

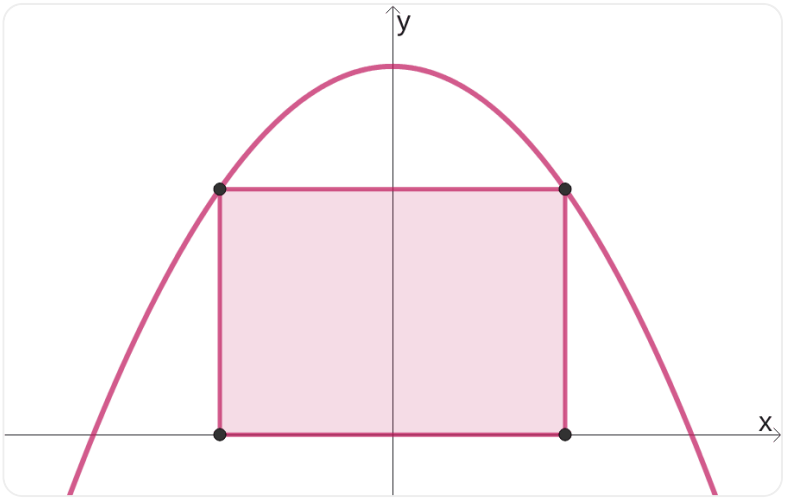
5 מצאו את המספר שעבורו ההפרש בין המספר לבין ריבועו הוא מקסימלי.

6 מצאו את המספר החיובי שעבורו סכום המספר ו-4 פעמים ההופכי שלו מינימלי.

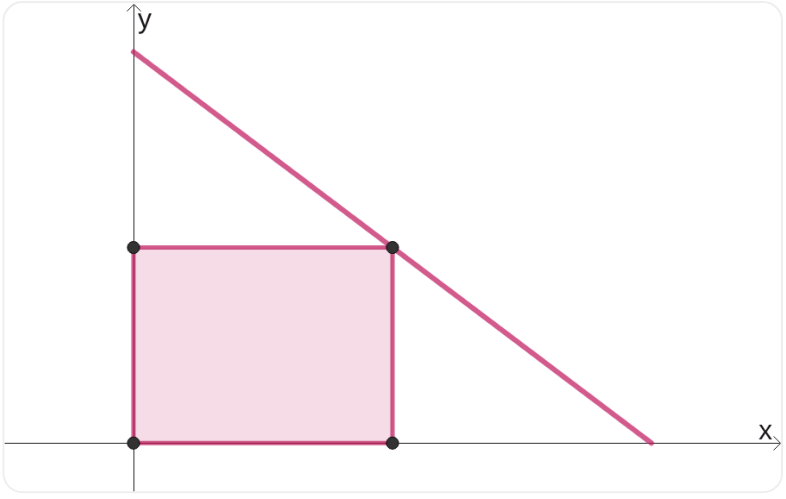
7 מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ הקרובות ביותר לנקודה $(0,\frac{5}{2})$, ואת המרחק המינימלי.

8 מצאו את הנקודה על גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ הקרובה ביותר לנקודה $(\frac{9}{2},0)$.

9 מלבן חסום בין גרף הפונקציה $f(x)=12-x^2$ לבין ציר x, כך ששני קודקודים שלו על ציר x ושניים על הגרף (ראו ציור). מצאו את שטח המלבן המקסימלי.



10 קודקוד אחד של מלבן בראשית הצירים, שתי צלעות על הצירים, והקודקוד שמול הראשית על הישר $y=8-2x$. מצאו את השטח המקסימלי של המלבן.

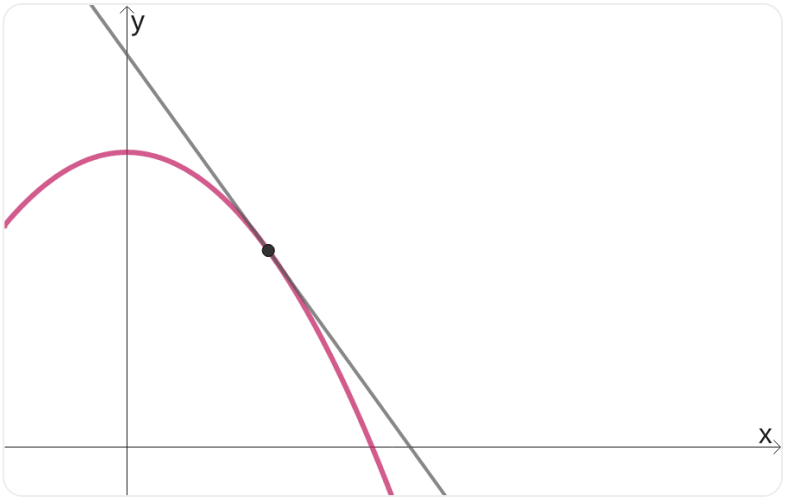


11 בתחום $0\le x\le 2$ מעבירים קטע אנכי בין הגרפים של $f(x)=4x-x^2$ ו-$g(x)=x^2$. מצאו את האורך המקסימלי של הקטע.

12 בתחום $0\le x\le \sqrt{3}$ מעבירים קטע אנכי בין הגרפים של $f(x)=3x$ ו-$g(x)=x^3$. מצאו את האורך המקסימלי של הקטע.

13 מעבירים משיק לגרף $f(x)=\frac{1}{x}$ בנקודה שבה $x=a$ $(a>0)$. הראו שהמשולש שהמשיק יוצר עם הצירים הוא בעל שטח קבוע, ומצאו אותו.

14 מעבירים משיק לגרף $f(x)=9-x^2$ בנקודה שבה $x=t$, כאשר $0<t<3$ (ראו ציור). מצאו את t שעבורו שטח המשולש שהמשיק יוצר עם הצירים מינימלי, ואת השטח.



15 $f(x)=x^3-3x$ בתחום $-2\le x\le 3$. מצאו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של $f(x)$ בתחום.

16 $f(x)=x^2-4x$ בתחום $0\le x\le 5$. מצאו את נקודות הקיצון המוחלטות של $f(x)$ בתחום.

17 $f(x)=x+\frac{4}{x}$ בתחום $1\le x\le 4$. מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של $f(x)$.

18 הערך המינימלי של $f(x)=x^2+ax+3$ הוא -1. מצאו את a.

19 ל-$f(x)=ax-x^2$ יש מקסימום ב-$x=3$. מצאו את a ואת ערך המקסימום.

20 ל-$f(x)=x^3-3ax$ יש מינימום ב-$x=2$. מצאו את a ואת ערך המינימום.

21 רוצים לגדר שטח מלבני של 50 מ"ר הצמוד לקיר, כך שצד אחד אינו צריך גדר. מה מידות המלבן שעבורן אורך הגדר מינימלי?

22 היקף של מלבן הוא 24. מצאו את מידות המלבן שעבורן שטחו מקסימלי.

23 שטח של מלבן הוא 64. מצאו את מידות המלבן שעבורן האלכסון שלו הקצר ביותר.

24 מצאו את הנקודה על הישר $y=4-x$ הקרובה ביותר לראשית הצירים, ואת המרחק.

25 בתחום $-1\le x\le 2$ מעבירים קטע אנכי בין הישר $y=x+2$ לבין הפרבולה $y=x^2$. מצאו את האורך המקסימלי של הקטע.

26 ההפרש בין שני מספרים הוא 8. מצאו את המספרים שמכפלתם מינימלית.

27 x ו-y מספרים חיוביים המקיימים $2x+y=12$. מצאו את המכפלה xy המקסימלית.

28 הנקודה P נמצאת על גרף $f(x)=4-x^2$ ברביע הראשון. מורידים ממנה אנך לציר x ברגל Q. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OPQ.

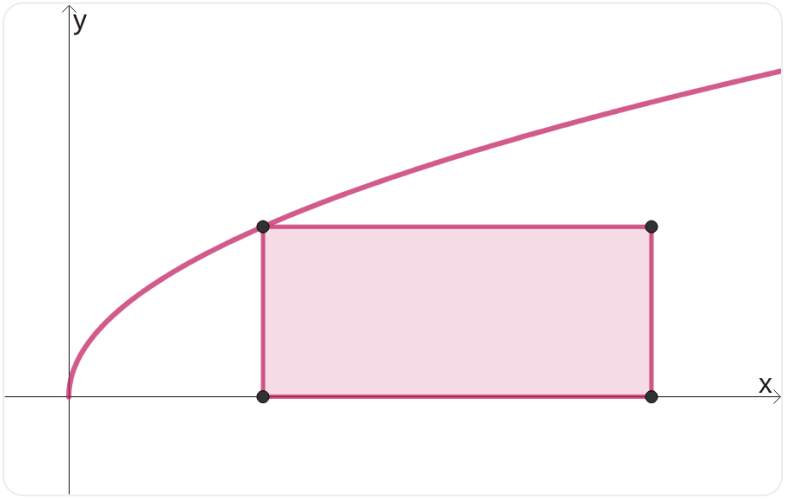
29 מצאו את הערך המקסימלי של $f(x)=x\sqrt{8-x^2}$ בתחום $0\le x\le 2\sqrt{2}$.

30 מצאו את הערך המקסימלי של $g(x)=x+2\sqrt{9-x}$.

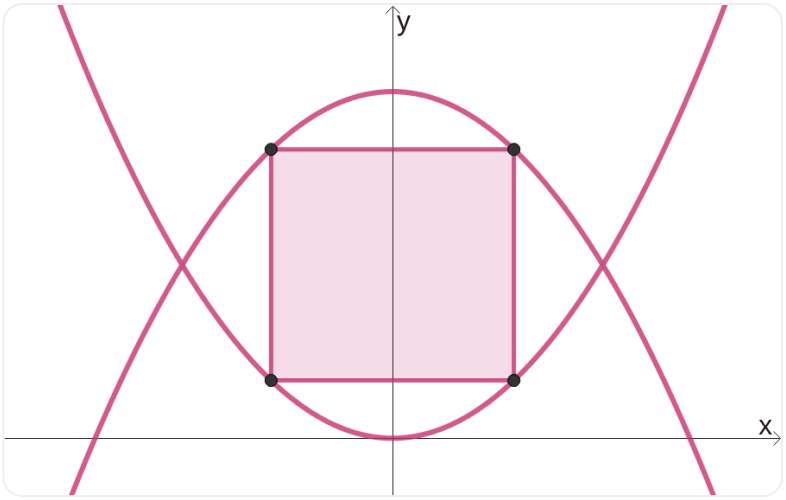
31 $f(x)=x^2-2x$ בתחום $0\le x\le a$ $(a>2)$. הערך המקסימלי של $f(x)$ בתחום הוא 8. מצאו את a.

32 $f(x)=x^3$ בתחום $-1\le x\le 2$. האם יש לפונקציה נקודת קיצון פנימית? מצאו את הערכים המוחלטים הגדול והקטן.

33 מלבן שצלעו התחתונה על ציר x בין $x=a$ לבין $x=9$, וקודקודו השמאלי העליון על גרף $f(x)=\sqrt{x}$ (ראו ציור). מצאו את a שעבורו שטח המלבן מקסימלי.



34 מלבן סימטרי ביחס לציר y חסום בין הגרפים $f(x)=x^2$ ו- $g(x)=6-x^2$ (ראו ציור). מצאו את השטח המקסימלי של המלבן.



✔ תשובות סופיות – נושא 22.1

1. 10 ו-10 ; המכפלה 100
2. 6 ו-6 ; סכום הריבועים 72
3. 6 ו-6 ; הסכום 12
4. $x=6$, $y=3$; הערך 108
5. $x=\frac{1}{2}$; ההפרש $\frac{1}{4}$
6. $x=2$; הסכום 4
7. $(\pm\sqrt{2},2)$; המרחק $\frac{3}{2}$
8. $(4,2)$; המרחק $\frac{\sqrt{17}}{2}$
9. קודקודים על הגרף ב-$x=\pm 2$; שטח מקסימלי 32
10. $x=2$, $y=4$; שטח 8
11. $x=1$; אורך 2
12. $x=1$; אורך 2
13. השטח תמיד 2 – אינו תלוי ב-a
14. $t=\sqrt{3}$; שטח מינימלי $12\sqrt{3}$
15. מקסימום 18 (ב-$x=3$, קצה) ; מינימום -2 (ב-$x=-2$ וב-$x=1$)
16. מינימום $(2,-4)$; מקסימום $(5,5)$ – קצה
17. הקטן ביותר 4 (ב-$x=2$) ; הגדול ביותר 5 (ב-$x=1$ וב-$x=4$)
18. $a=4$ או $a=-4$
19. $a=6$; ערך המקסימום 9
20. $a=4$; ערך המינימום -16
21. 5 מ' (שתי הצלעות המאונכות לקיר) ו-10 מ' ; גדר באורך 20 מ'
22. ריבוע 6×6 ; שטח 36
23. ריבוע 8×8 ; אלכסון $8\sqrt{2}$

24 $(2,2)$; המרחק $2\sqrt{2}$

25 $x=\frac{1}{2}$; אורך $\frac{9}{4}$

26 4 ו--4 ; המכפלה -16

27 $x=3$, $y=6$; $xy=18$

28 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$; שטח $\frac{8\sqrt{3}}{9}$

29 $x=2$; ערך מקסימלי 4

30 $x=8$; ערך מקסימלי 10

31 $a=4$ (המקסימום בקצה)

32 אין קיצון פנימי ; קטן ביותר -1, גדול ביותר 8 – שניהם בקצוות

33 $a=3$; שטח $6\sqrt{3}$

34 קודקודים ב-$x=\pm 1$; שטח 8

22.2 בעיות קיצון גיאומטריות וטריגונומטריות

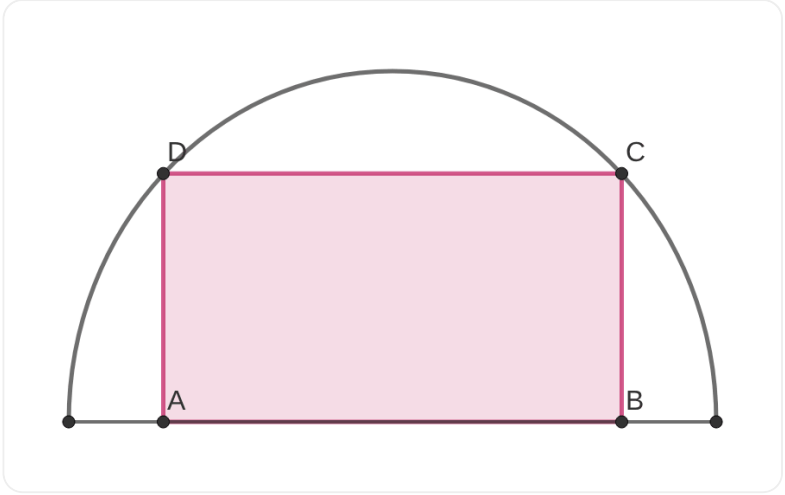
בבעיה גיאומטרית מבטאים את כל הצלעות בעזרת משתנה אחד (פיתגורס, דמיון, משוואת מעגל) – או בעזרת זווית אחת (טריגונומטריה). שימו לב לתחום ההגיוני של המשתנה: אורכים חיוביים, זווית בין 0° ל-180°.

צפו לפני שמתחילים:

בעיות קיצון גיאומטריות
YouTube · 10:22

בעיות קיצון טריגונומטריות
YouTube · 10:35

1 מלבן חסום בחצי מעגל שרדיוסו 5, כך שצלע אחת שלו על הקוטר (ראו ציור). מצאו את השטח המקסימלי של המלבן.



2 מלבן חסום במעגל שרדיוסו 4. מצאו את השטח המקסימלי של המלבן.

3 במשולש שווה שוקיים אורך כל שוק הוא 6. מה צריכה להיות זווית הראש כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי? מהו השטח?

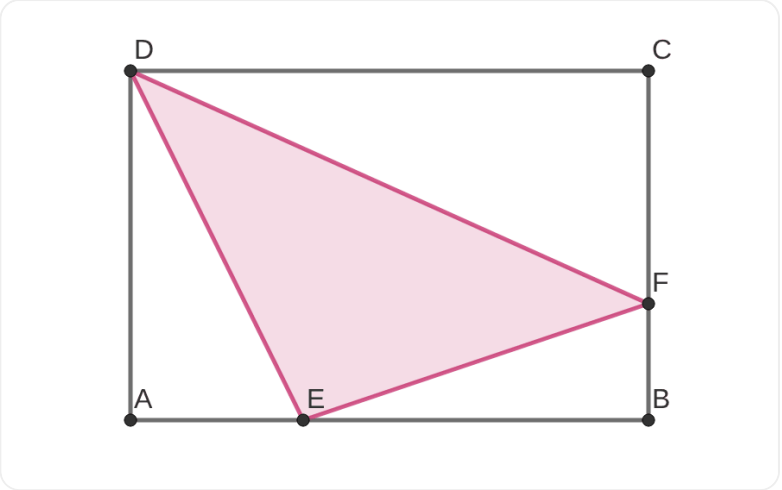
4 שתי צלעות במשולש הן 8 ו-10. מצאו את הזווית שביניהן שעבורה השטח מקסימלי, ואת השטח.

5 אורך היתר במשולש ישר זווית הוא 10. מצאו את הניצבים שעבורם שטח המשולש מקסימלי.

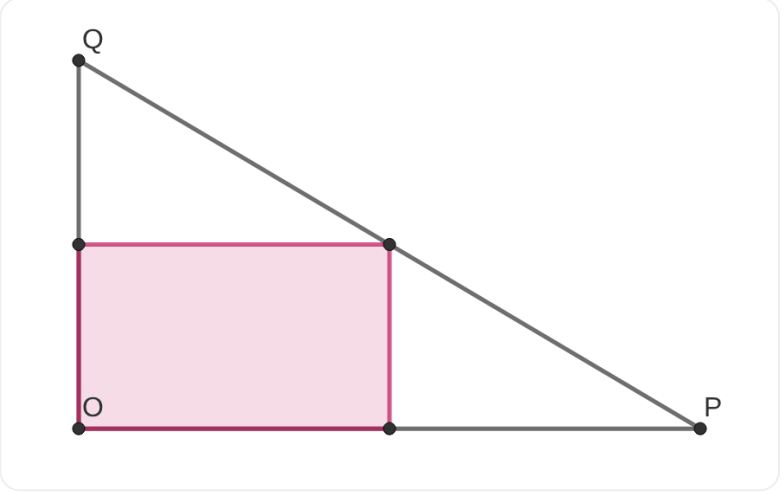
6 במשולש ישר זווית סכום הניצב a והיתר הוא 9. מצאו את a שעבורו שטח המשולש מקסימלי, ואת השטח.

7 משולש שווה שוקיים חסום במעגל שרדיוסו 3. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש.

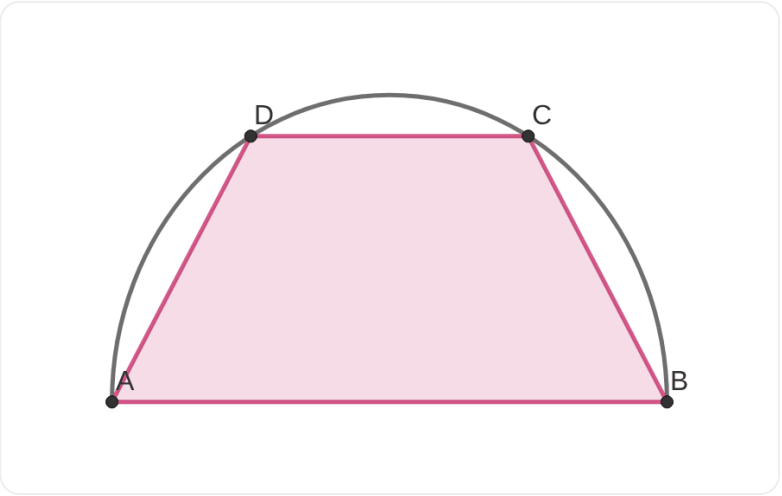
8 ריבוע $ABCD$ שצלעו 6. על AB ועל BC מסמנים נקודות E ו-F כך ש-$AE=BF=x$ (ראו ציור). מצאו את x שעבורו שטח המשולש DEF מינימלי, ואת השטח.



9 במשולש ישר זווית אורכי הניצבים 8 ו-6. בתוך המשולש חוסמים מלבן ששתי צלעותיו על הניצבים וקודקוד אחד שלו על היתר (ראו ציור). מצאו את השטח המקסימלי של המלבן.



10 טרפז חסום בחצי מעגל שרדיוסו 2, כך שהבסיס הגדול הוא הקוטר (ראו ציור). מצאו את השטח המקסימלי של הטרפז.



11 מקרטון ריבועי שצלעו 12 ס"מ גוזרים בכל פינה ריבוע שצלעו x ומקפלים לקופסה פתוחה. מצאו את x שעבורו נפח הקופסה מקסימלי.

12 היקף של משולש שווה שוקיים הוא 18. מצאו את אורכי הצלעות שעבורם השטח מקסימלי.

13 אורך היתר במשולש ישר זווית הוא 4. מצאו את ההיקף המקסימלי של המשולש (היעזרו בזווית חדה α).

14 היקף של גזרה מעגלית הוא 20. מצאו את הרדיוס ואת זווית הגזרה (ברדיאנים) שעבורם שטח הגזרה מקסימלי.

15 אורך האלכסון של מלבן הוא 10. מצאו את ההיקף המקסימלי של המלבן.

16 נתונות הנקודות $A(0,3)$ ו-$B(6,5)$. מצאו את הנקודה P על ציר x שעבורה סכום המרחקים $PA+PB$ מינימלי, ואת הסכום.

17 ריבוע $ABCD$ שצלעו 4. הנקודה P נעה על הצלע AB. מצאו את מיקום P שעבורו PC^2+PD^2 מינימלי.

18 אורך צלע של מעוין הוא 6. מצאו את זווית המעוין שעבורה שטחו מקסימלי.

19 במשולש הבסיס הוא 10 וסכום שתי הצלעות האחרות הוא 14. מצאו את אורכי הצלעות שעבורם שטח המשולש מקסימלי.

20 במעגל שרדיוסו 5 מעבירים מיתר במרחק d מהמרכז. מצאו את d שעבורו שטח המשולש שקודקודיו מרכז המעגל וקצות המיתר מקסימלי.

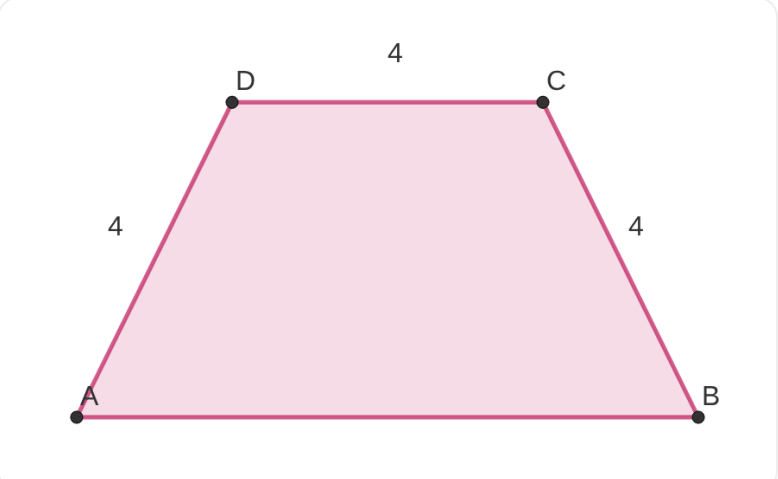
21 רוצים לגדר חלקה מלבנית הצמודה לנהר, ב-120 מ' גדר (ללא גדר לאורך הנהר). מצאו את השטח המקסימלי של החלקה.

22 חוט באורך 20 ס"מ חותכים לשני חלקים, ומכל חלק בונים ריבוע. מצאו את נקודת החיתוך שעבורה סכום שטחי הריבועים מינימלי.

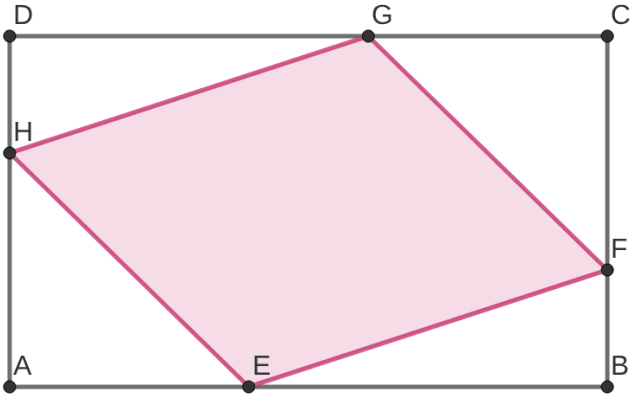
23 מצאו את הערך המקסימלי של הביטוי $\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha$ כאשר $0^\circ\le\alpha\le 90^\circ$.

24 $f(x)=2\sin x+\cos 2x$ בתחום $0\le x\le\pi$. מצאו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי.

25 בטרפז שווה שוקיים אורך הבסיס הקטן ואורך כל שוק הוא 4 (ראו ציור). מצאו את זווית הבסיס שעבורה שטח הטרפז מקסימלי, ואת השטח.

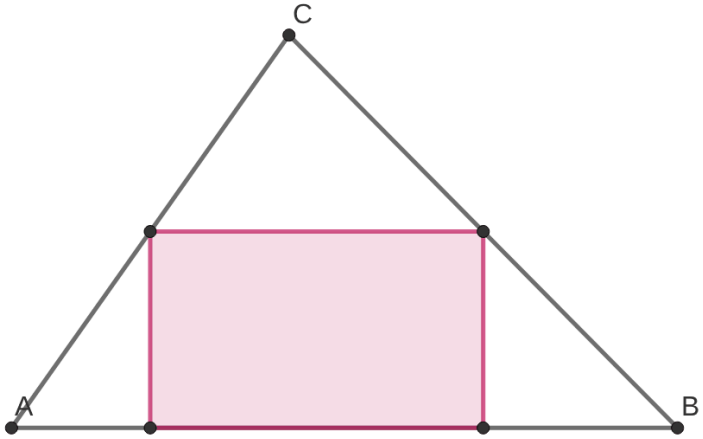


26 מלבן $ABCD$ עם $AB=10$, $BC=6$. מסמנים $AE=AH=CF=CG=x$ (ראו ציור). מצאו את x שעבורו שטח המקבילית $EFGH$ מקסימלי.



27 בתוך ריבוע שצלעו 4 חוסמים ריבוע שקודקודיו על צלעות הריבוע הגדול, במרחק x מהקודקודים. מצאו את השטח המינימלי של הריבוע הפנימי.

28 במשולש ABC הצלע $AB=12$ והגובה אליה הוא 8. חוסמים מלבן שבסיסו על AB (ראו ציור). מצאו את השטח המקסימלי של המלבן.



29 הנקודה A יוצאת מהראשית ונעה על ציר x כך שבזמן t היא ב-$(t,0)$. הנקודה B נמצאת בזמן t ב-$(0,10-2t)$. מתי המרחק בין הנקודות מינימלי, ומהו?

30 OAB משולש שבו $OA=OB=4$ והזווית $\angle AOB=\theta$. מצאו את θ שעבורה שטח המשולש מקסימלי.

31 סכום האלכסונים של מעוין הוא 20. מצאו את אורכי האלכסונים שעבורם שטח המעוין מקסימלי.

32 לחלון יש צורה של מלבן שמעליו משולש שווה צלעות שצלעו כרוחב המלבן. היקף החלון 12 מ'. מצאו את רוחב החלון שעבורו המלבן (בלי המשולש) הוא בעל השטח המקסימלי.

✔ תשובות סופיות – נושא 22.2

1. חצי הבסיס $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; שטח מקסימלי 25
2. ריבוע שצלעו $4\sqrt{2}$; שטח 32
3. $90°$; שטח 18
4. $90°$; שטח 40
5. שני הניצבים $5\sqrt{2}$; שטח 25
6. $a=3$ (הניצב השני $3\sqrt{3}$) ; שטח $\frac{9\sqrt{3}}{2}$
7. משולש שווה צלעות שצלעו $3\sqrt{3}$; שטח $\frac{27\sqrt{3}}{4}$
8. $x=3$; שטח $\frac{27}{2}$
9. מלבן 4×3 ; שטח 12
10. בסיס קטן 2 ; שטח $3\sqrt{3}$
11. $x=2$; נפח 128 סמ"ק
12. משולש שווה צלעות שצלעו 6 ; שטח $9\sqrt{3}$
13. $\alpha=45°$; היקף $4+4\sqrt{2}$
14. $r=5$, זווית 2 רדיאנים ; שטח 25
15. ריבוע שצלעו $5\sqrt{2}$; היקף $20\sqrt{2}$
16. $P(\frac{9}{4},0)$; הסכום 10
17. P אמצע AB ; הערך המינימלי 40
18. $90°$ (ריבוע) ; שטח 36
19. 7 ו-7 ; שטח $10\sqrt{6}$
20. $d=\frac{5\sqrt{2}}{2}$; שטח $\frac{25}{2}$
21. 60×30 מ' ; שטח 1800 מ"ר
22. שני חלקים של 10 ס"מ ; שטח כולל $\frac{25}{2}$
23. $\alpha=30°$; ערך מקסימלי 2

24 מקסימום $\frac{3}{2}$ (ב-$x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$) ; מינימום 1 (ב-$x=0,\frac{\pi}{2},\pi$)

25 60° ; שטח $12\sqrt{3}$

26 $x=4$; שטח 32

27 $x=2$; שטח 8

28 גובה המלבן 4 ובסיסו 6 ; שטח 24

29 $t=4$; מרחק $2\sqrt{5}$

30 $\theta=90^\circ$; שטח 8

31 שני האלכסונים 10 ; שטח 50

32 רוחב 2 מ' ; גובה המלבן 3 מ' ; שטח 6 מ"ר

פרק 22 סיכומון סוף פרק – בעיות קיצון

שיטת 5 השלבים

- מגדירים משתנה x (מה הוא מייצג ובאילו יחידות).
- מבטאים את כל הגדלים בעזרת x, בעזרת הקשר הנתון (היקף, נפח, נקודה על הגרף).
- בונים את **פונקציית המטרה** (שטח, אורך, נפח, מחיר).
- קובעים **תחום** הגיוני ל-x.
- גוזרים, פותרים $f'(x)=0$, ומוודאים בטבלה שזה המקסימום או המינימום הנדרש.

קיצון גרפי

- נקודה על גרף $y=f(x)$ היא $(x,f(x))$, ולכן כל אורך ושטח תלויים ב-x.
- מרחק בין נקודות: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. מספיק למצוא קיצון של d^2.
- מלבן מתחת לגרף: רוחב לפי x וגובה לפי $f(x)$.

קיצון בקצה

- כשבתחום אין נקודה שבה $f'(x)=0$, או שהיא מחוץ לתחום, הקיצון בקצה.
- בתחום סגור משווים את ערכי הפונקציה בנקודות הקיצון ובקצוות.

קיצון גיאומטרי

- מתחילים משרטוט ומסמנים את x על השרטוט.
- כלים: פיתגורס, דמיון משולשים, שטח $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, נוסחאות נפח.

קיצון טריגונומטרי

- משתנה זווית α: מבטאים אורכים בעזרת $\sin\alpha$ ו-$\cos\alpha$.
- גוזרים לפי α ופותרים משוואה טריגונומטרית בתחום (למשל $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$).

פרמטר

- "הקיצון מתקבל ב-$x=x_0$": מציבים $f'(x_0)=0$ ומוצאים את הפרמטר.
- בודקים שזה קיצון מהסוג המבוקש ושהוא בתוך התחום.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לגזור פונקציה עם שני משתנים, לפני שמבטאים הכל בעזרת x.
- לשכוח את התחום ולקבל אורך שלילי.
- לענות רק את ה-x, כשהשאלה מבקשת את השטח או המחיר המינימלי.
- לא לבדוק שזה מקסימום ולא מינימום.

💡 **הטיפ של אילון:** בבעיית קיצון 80% מהעבודה היא בניית הפונקציה. ברגע שיש לכם פונקציה של משתנה אחד, זו כבר חקירה רגילה שאתם מכירים.

פרק 23

שאלות קצרות

אינדוקציה מתמטית ושאלות קצרות בסגנון הבגרות – רעיון אחד, פתרון חד

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

23.1 אינדוקציה מתמטית — 36 תרגילים

23.2 שאלות קצרות משולבות — 33 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



אינדוקציה מתמטית – הסבר מקיף ומלא

YouTube · 10:36



אינדוקציה – תכונות התחלקות

YouTube · 19:17



פונקציות – שאלות קצרות

YouTube · 22:09



הטרנספורמציה 1/f(x) – איך משרטטים אחת חלקי פונקציה

YouTube · 9:40

23.1 אינדוקציה מתמטית

שלושה שלבים: (1) **בסיס** – בודקים שהטענה נכונה עבור $n=1$ (או המספר הראשון בתחום); (2) **הנחה** – מניחים שהטענה נכונה עבור n; (3) **מעבר** – מוכיחים בעזרת ההנחה שהיא נכונה עבור $n+1$. בתשובות מופיע הצעד המרכזי של שלב המעבר.

צפו לפני שמתחילים:

אינדוקציה מתמטית – הסבר מקיף ומלא
YouTube · 10:36

אינדוקציה – תכונות התחלקות
YouTube · 19:17

סדרות – אינדוקציה מתמטית
YouTube · 14:01

אינדוקציה – איברים זוגיים ואי-זוגיים
YouTube · 6:07

1 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים: $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

2 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים: $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

3 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים: $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים: $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

5 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים: $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

6 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים: $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

7 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:
$1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+n\cdot2^n=(n-1)2^{n+1}+2$

8 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים: $1+2+4+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$

9 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:
$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

10 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:
$$2+2\cdot 3+2\cdot 3^2+\cdots+2\cdot 3^{n-1}=3^n-1$$

11 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:
$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$$

12 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:
$$1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$$

13 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:
$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

14 הוכיחו באינדוקציה שלכל $n\geq 2$: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$

15 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים: $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$

16 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי, 7^n-1 מתחלק ב-6.

17 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי, n^3+5n מתחלק ב-6.

18 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי, 5^n+3 מתחלק ב-4.

19 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי, $3^{2n}-1$ מתחלק ב-8.

20 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי, 11^n-4^n מתחלק ב-7.

21 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי, n^3+2n מתחלק ב-3.

22 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי, $2^{3n}-3^n$ מתחלק ב-5.

23 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי, $4^n+15n-1$ מתחלק ב-9.

24 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי, 9^n-8n-1 מתחלק ב-64.

25 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי, $3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ מתחלק ב-17.

26 הוכיחו באינדוקציה שלכל $n \geq 5$ מתקיים $2^n > n^2$.

27 הוכיחו באינדוקציה שלכל $n \geq 4$ מתקיים $n! > 2^n$.

28 הוכיחו באינדוקציה שלכל $n \geq 2$ מתקיים $3^n > 2n + 1$.

29 הוכיחו באינדוקציה שלכל $x > -1$ ולכל n טבעי: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

30 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי: $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

31 סדרה מוגדרת על ידי $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$. הוכיחו באינדוקציה ש-$a_n = 2^n - 1$.

32 סדרה מוגדרת על ידי $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 2$. נחשו נוסחה ל-a_n והוכיחו אותה באינדוקציה.

33 סדרה מוגדרת על ידי $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$. חשבו את ארבעת האיברים הראשונים, נחשו נוסחה והוכיחו אותה.

34 סדרה מוגדרת על ידי $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n - 4$. הוכיחו באינדוקציה ש-$a_n = 3^{n-1} + 2$.

35 סדרה מוגדרת על ידי $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. הוכיחו באינדוקציה ש-$a_n < 2$ לכל n.

36 בסדרה מתקיים $a_1 = 5$ ו-$a_{n+1} = a_n + 4n + 1$. הוכיחו באינדוקציה ש-$a_n = 2n^2 - n + 4$.

✔ תשובות סופיות – נושא 23.1

1 שלב המעבר: $\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

2 שלב המעבר: $n^2+(2n+1)=(n+1)^2$

3 שלב המעבר: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

4 שלב המעבר: $\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

5 שלב המעבר: $\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$

6 שלב המעבר: $\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}$

7 שלב המעבר: $(n-1)2^{n+1}+2+(n+1)2^{n+1}=n\cdot 2^{n+2}+2$

8 שלב המעבר: $2^n-1+2^n=2^{n+1}-1$

9 שלב המעבר: $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

10 שלב המעבר: $3^n-1+2\cdot 3^n=3^{n+1}-1$

11 שלב המעבר: $(n+1)!-1+(n+1)(n+1)!=(n+2)!-1$

12 שלב המעבר: $(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}+(-1)^{n+2}(n+1)^2=(-1)^{n+2}\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

13 שלב המעבר: מוסיפים $\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ ומקבלים $\frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$

14 שלב המעבר: $\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=\frac{n+2}{2(n+1)}$

15 שלב המעבר: $(n+1)\cdot\frac{n+2}{n+1}=n+2$

16 $7^{n+1}-1=7(7^n-1)+6$

17 $(n+1)^3+5(n+1)=(n^3+5n)+3n(n+1)+6$, ו-$n(n+1)$ זוגי

18 $5^{n+1}+3=5(5^n+3)-12$

19 $3^{2n+2}-1=9(3^{2n}-1)+8$

20 $11^{n+1}-4^{n+1}=11(11^n-4^n)+7\cdot 4^n$

21 $(n+1)^3+2(n+1)=(n^3+2n)+3(n^2+n+1)$

22 $8^{n+1}-3^{n+1}=8(8^n-3^n)+5\cdot 3^n$

23 $4^{n+1}+15(n+1)-1=4(4^n+15n-1)-45n+18$

24 $9^{n+1}-8(n+1)-1=9(9^n-8n-1)+64n$

25 $3\cdot 5^{2n+3}+2^{3n+4}=25(3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1})-17\cdot 2^{3n+1}$

26 $2^{n+1}=2\cdot 2^n>2n^2\geq(n+1)^2$ כי $n^2\geq 2n+1$ עבור $n\geq 3$

27 $(n+1)!=(n+1)n!>(n+1)2^n>2\cdot 2^n$

28 $3^{n+1}>3(2n+1)=6n+3>2n+3$

29 $(1+x)^{n+1}\geq(1+nx)(1+x)=1+(n+1)x+nx^2\geq 1+(n+1)x$

30 צריך: $\frac{1}{n+1}\leq 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}$, שקול ל- $n(n+2)\leq(n+1)^2$, 2

31 $a_{n+1}=2(2^n-1)+1=2^{n+1}-1$

32 $a_n=n(n+1)$; $n(n+1)+2(n+1)=(n+1)(n+2)$

33 $a_n=\frac{1}{n}$; $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$

34 $a_{n+1}=3(3^{n-1}+2)-4=3^n+2$

35 אם $a_n<2$ אז $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{4}=2$

36 $2n^2-n+4+4n+1=2(n+1)^2-(n+1)+4$

23.2 שאלות קצרות משולבות

שאלות קצרות מכל חומר השאלון: אחת חלקי פונקציה, טריגונומטריה, גיאומטריה, אסימפטוטות, קשר גרף–נגזרת, סדרות וטרנספורמציות. כל שאלה – רעיון אחד מרכזי. נסו לפתור כל אחת בפחות מ-5 דקות.

צפו לפני שמתחילים:



פונקציות – שאלות קצרות
YouTube · 22:09



הטרנספורמציה f(x)/1 – איך משרטטים אחת חלקי פונקציה
YouTube · 9:40



חור או אסימפטוטה? איך יודעים בפונקציית מנה
YouTube · 6:11

1. $f(x)=x^2-4$. מצאו את האסימפטוטות של $\frac{1}{f(x)}$.

2. $f(x)=x^2+1$. מצאו את נקודת הקיצון של $\frac{1}{f(x)}$ וקבעו את סוגה.

3. לפונקציה $f(x)$ יש מינימום בנקודה $(3,2)$. מה ניתן לומר על הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ בנקודה $x=3$?

4. $f(x)=(x-1)^2$. מצאו את תחום ההגדרה של $\frac{1}{f(x)}$, ואת תחומי החיוביות והשליליות שלה.

5. חשבו ללא מחשבון: $\sin 75^\circ \cos 75^\circ$.

6. חשבו ללא מחשבון: $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$.

7. $\tan\alpha=\frac{3}{4}$ ו-α זווית חדה. חשבו את $\sin 2\alpha$.

8. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ ו-$90^\circ<\alpha<180^\circ$. חשבו את $\cos 2\alpha$ ואת $\tan\alpha$.

9. פשטו את הביטוי $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$.

10 פתרו בתחום $0 \le x \le 2\pi$: $\sin 2x = \cos x$.

11 במשולש ישר זווית אורכי הניצבים 6 ו-8. מהו אורך התיכון ליתר?

12 במשולש שתי צלעות 7 ו-8, והזווית ביניהן 60°. מהו אורך הצלע השלישית?

13 זווית היקפית נשענת על קשת של 100°. מה גודלה?

14 מנקודה הנמצאת במרחק 13 ממרכז מעגל שרדיוסו 5 מעבירים משיק. מהו אורך קטע המשיק?

15 יחס הדמיון בין שני משולשים הוא $3:2$. שטח המשולש הקטן 20. מהו שטח המשולש הגדול?

16 מצאו את האסימפטוטות של $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$.

17 $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$. האם לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית? מצאו את נקודת אי-הרציפות.

18 מצאו את האסימפטוטות של $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-9}$.

19 האם ל-$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ יש אסימפטוטה אנכית? מצאו את האסימפטוטה האופקית.

20 נתון $f'(x)=(x-1)(x+2)^2$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ (שיעור x) וקבעו את סוגן.

21 ידוע ש-$f'(x)>0$ עבור $x<2$ ו-$f'(x)<0$ עבור $x>2$. מה סוג הנקודה ב-$x=2$?

22 נתון $f'(x)=x^2-4x$. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

23 נתון $f'(x)=x^3-3x$. מצאו את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן.

24 בסדרה חשבונית $a_3=7$ ו-$a_7=19$. מצאו את a_1, את d ואת S_{10}.

25 בסדרה הנדסית $a_2 = 6$ ו-$a_5 = 48$. מצאו את q, את a_1 ואת S_6.

26 חשבו את סכום הסדרה ההנדסית האינסופית $8 + 4 + 2 + 1 + \ldots$

27 סכום סדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 12 והאיבר הראשון 4. מצאו את q.

28 סדרה מוגדרת על ידי $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 3$. חשבו את a_{20}.

29 $f(x) = x^2$ ו-$g(x) = f(x-3) + 2$. מצאו את קודקוד הפרבולה $g(x)$.

30 ל-$f(x) = x^3 - 3x$ יש מקסימום ב-$(-1, 2)$. מה הנקודה המתאימה בגרף $g(x) = -f(x) + 1$, ומה סוגה?

31 $f(x) = \sqrt{x}$. מצאו את תחום ההגדרה של $f(4-x)$.

32 $f(x) = x^2 - 4$. מצאו את נקודות הקיצון של $|f(x)|$.

33 $f(x) = x^2 - 2x - 3$. מצאו את נקודות הקיצון של $(f(x))^2$.

✔ תשובות סופיות – נושא 23.2

1	אנכיות: $x=\pm 2$; אופקית: $y=0$
2	מקסימום $(0,1)$
3	מקסימום $(3,\frac{1}{2})$
4	$x\neq 1$; חיובית לכל $x\neq 1$, אין שליליות
5	$\frac{1}{4}$
6	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
7	$\frac{24}{25}$
8	$\cos 2\alpha=\frac{7}{25}$; $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$
9	$\tan x$
10	$x=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}$
11	5
12	$\sqrt{57}$
13	50°
14	12
15	45
16	$x=3$; $y=2$
17	אין אסימפטוטה ; חור בנקודה $(2,4)$
18	אנכיות: $x=\pm 3$; אופקית: $y=1$
19	אין אנכית ; אופקית $y=0$
20	$x=1$ מינימום בלבד ; ב-$x=-2$ אין קיצון
21	מקסימום
22	עלייה: $x<0$ או $x>4$; ירידה: $0<x<4$
23	$x=0$ מקסימום ; $x=\pm\sqrt{3}$ מינימום

24	$a_1=1\ ,d=3\ ;\ S_{10}=145$
25	$q=2\ ,a_1=3\ ;\ S_6=189$
26	16
27	$q=\frac{2}{3}$
28	59
29	$(3,2)$
30	מינימום $(-1,-1)$
31	$x\le 4$
32	מינימום: $(-2,0)$, $(2,0)$; מקסימום: $(0,4)$
33	מינימום: $(-1,0)$, $(3,0)$; מקסימום: $(1,16)$

פרק 23 סיכומון סוף פרק – שאלות קצרות

מבנה הוכחה באינדוקציה

- **בדיקה:** מראים שהטענה נכונה עבור $n=1$ (או עבור ה-n הראשון בשאלה).
- **הנחה:** מניחים שהטענה נכונה עבור $n=k$.
- **צעד:** מוכיחים עבור $n=k+1$ **בעזרת ההנחה**.
- **מסקנה:** הטענה נכונה לכל n טבעי.

אינדוקציה בסכומים

- את הסכום עד $k+1$ כותבים כ"סכום עד k" ועוד האיבר ה-$(k+1)$.
- מציבים את ההנחה, מוציאים גורם משותף ומגיעים לנוסחה עם $k+1$.
- את האיבר ה-$(k+1)$ מקבלים כשמציבים $k+1$ בביטוי של האיבר הכללי.

אינדוקציה בהתחלקות

- ההנחה: $A(k)=m\cdot t$ (כפולה של m).
- כותבים את $A(k+1)$ כך שיופיע בו $A(k)$, ועוד ביטוי שמתחלק ב-m.

סדרות וכלל נסיגה

- נתון a_{n+1} בעזרת a_n: את הנוסחה המפורשת מוכיחים באינדוקציה.
- מציבים את ההנחה ב-$\ldots=a_{k+1}$ ומפשטים.

שאלות קצרות – גישה

- קוראים את **כל** הנתונים ומסמנים מה נדרש: מספר, נקודה, פרמטר.
- מזהים את הרעיון המרכזי: אסימפטוטה, נקודה על הגרף, משיק, סימטריה, סדרה.
- כותבים משוואה אחת לכל נתון.

רעיונות שחוזרים

- $\frac{1}{f(x)}$: אפסים הופכים לאסימפטוטות אנכיות.
- קשר גרף-נגזרת: הסימן של $f'(x)$ מראה עלייה או ירידה.
- סדרה: $a_n=S_n-S_{n-1}$.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- בצעד האינדוקציה לא להשתמש בהנחה בכלל.
- לכתוב את האיבר ה-$(k+1)$ לא נכון (להציב k במקום $k+1$).
- לשכוח את הבדיקה של המקרה הראשון.
- בשאלה קצרה לחשב הרבה ולא לחפש את הרעיון שחוסך את החישוב.

💡 **הטיפ של אילון:** באינדוקציה, תכתבו מראש בשורה נפרדת מה אתם צריכים לקבל ב-$k+1$. ככה בכל שלב אתם יודעים לאן אתם הולכים.

פרק 25

שאלות "100" ותרגול

שאלות מאתגרות ומשולבות לסיום הקורס – כל אחת עם נקודה ייחודית משלה

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

25.1 שאלות "100" – אתגר ברמה הגבוהה ביותר

36 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

שאלון 571 קיץ מועד א' 2026 – פתרון בגרות מלא
YouTube · 1:25:27

פתרון בגרות קיץ 2026 מועד ב' – שאלון 571
YouTube · 1:22:53

שאלון 571 חורף 2026 – פתרון מלא
YouTube · 1:41:55

פתרון בגרות במתמטיקה 571 חורף 2023
YouTube · 1:34:38

25.1 שאלות "100" – אתגר ברמה הגבוהה ביותר

כל שאלה כאן משלבת שני נושאים או יותר, ולכל אחת יש "טוויסט" משלה. אל תתייאשו אם לא הולך מיד – זה בדיוק האימון שמבדיל בין 90 ל-100.

צפו לפני שמתחילים:



שאלון 571 קיץ מועד א' 2026 – פתרון בגרות מלא

YouTube · 1:25:27



פתרון בגרות במתמטיקה קיץ 2026 מועד ב' – שאלון 571

YouTube · 1:22:53



שאלון 571 חורף 2026 – פתרון מלא

YouTube · 1:41:55

1 לפונקציה $f(x)=x^3+ax^2+bx$ יש נקודת קיצון $(1,-2)$. מצאו את a ו-b, ואת נקודת הקיצון הנוספת של $f(x)$ וסוגה.

2 לפונקציה $f(x)=\frac{x^2+a}{x-1}$ יש נקודת קיצון ב-$x=3$. מצאו את a, ואת כל נקודות הקיצון של $f(x)$ וסוגן.

3 המשיק לגרף $f(x)=x^3$ בנקודה שבה $x=1$ חותך את הגרף בנקודה נוספת. מצאו אותה.

4 לאילו ערכי k הישר $y=k$ חותך את גרף $f(x)=x^3-3x$ בדיוק בשתי נקודות?

5 $f(x)=x^4-4x^3$. מצאו את נקודות הפיתול ואת נקודת הקיצון של $f(x)$.

6 חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y=x^2$ לבין הישר $y=2x$.

7 מצאו $a>0$ שעבורו השטח הכלוא בין גרף $f(x)=x^2$, ציר x והישר $x=a$ שווה ל-9.

8 חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y=x^2-4$ לבין ציר x.

9 מהנקודה $(-4,0)$ מעבירים משיק לגרף $f(x)=\sqrt{x}$. מצאו את משוואת המשיק ואת נקודת ההשקה.

10 סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא $S_n=3n^2+2n$. מצאו את a_n והוכיחו שהסדרה חשבונית.

11 בסדרה הנדסית אינסופית סכום האיברים במקומות האי-זוגיים גדול פי 3 מסכום האיברים במקומות הזוגיים, וסכום כל הסדרה 12. מצאו את a_1 ואת q.

12 $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+4$ ו- $b_n=2^{a_n}$. הוכיחו ש- b_n סדרה הנדסית ומצאו את מנתה.

13 מטילים קובייה הוגנת 4 פעמים. מה ההסתברות לקבל 6 לפחות פעם אחת?

14 בקופסה 3 כדורים אדומים ו- 2 כחולים. מוציאים שני כדורים בלי החזרה. מה ההסתברות ששניהם באותו צבע?

15 בכיתה 60% בנים. 30% מהבנים ו- 50% מהבנות אוהבים מתמטיקה. נבחר תלמיד שאוהב מתמטיקה – מה ההסתברות שהוא בן?

16 מטילים מטבע הוגן 5 פעמים. מה ההסתברות לקבל בדיוק פעמיים "עץ"? איזה מספר הצלחות הוא הסביר ביותר?

17 כמה פעמים לפחות צריך להטיל מטבע הוגן כדי שההסתברות לקבל לפחות "עץ" אחד תהיה גדולה מ- 0.99?

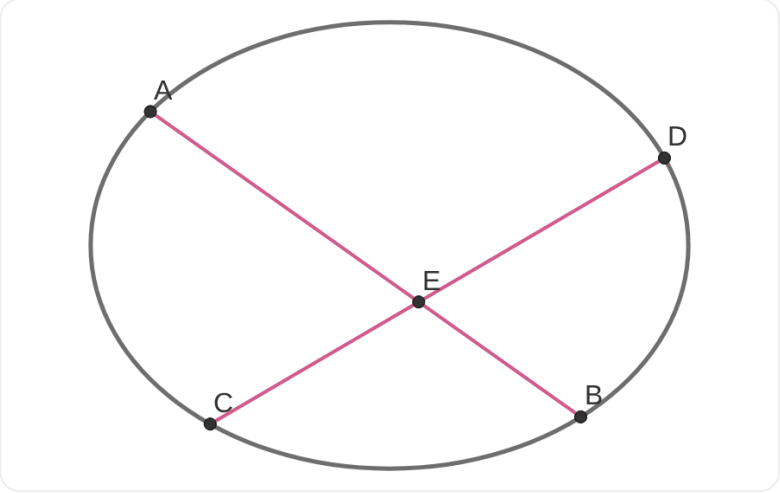
18 ידוע ש- $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$. חשבו את $\sin 2x$.

19 ידוע ש- $\tan x+\frac{1}{\tan x}=4$. חשבו את $\sin 2x$.

20 הראו ש- $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$, וחשבו את $\sin 3x$ כאשר $\sin x=\frac{1}{3}$.

21 במשולש ABC: $AB=AC=13$, $BC=10$. חשבו את רדיוס המעגל החסום ואת רדיוס המעגל החוסם.

22 במעגל נחתכים המיתרים AB ו-CD בנקודה E (ראו ציור). $AE=4$, $EB=6$, $CE=3$. מצאו את ED.



23 במשולש אורכי הצלעות 5, 7, 8. מצאו את הזווית שמול הצלע 7 ואת שטח המשולש.

24 במשולש $a=10$ והזווית שמולה 30°. מהו רדיוס המעגל החוסם?

25 מצאו את המרחק המינימלי בין הנקודה $(0,a)$ לפרבולה $y=x^2$ כפונקציה של a ($a>0$).

26 לאילו ערכי k יש למשוואה $x^3-3x+k=0$ שלושה פתרונות שונים?

27 $f(x)=ax^2+bx+c$, $f(0)=1$, ול-$f(x)$ יש נקודת קיצון $(1,3)$. מצאו את a, b, c.

28 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ היא פונקציה אי-זוגית שיש לה נקודת קיצון $(1,-2)$. מצאו את $f(x)$.

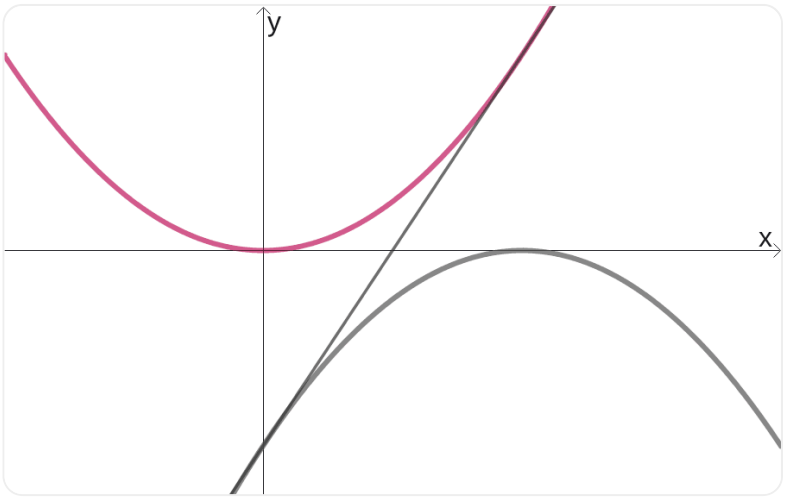
29 מצאו את נקודת הקיצון של $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ וקבעו את סוגה.

30 $f(x)=(x-1)^2(x+2)$. קבעו את מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=k$ לכל ערך של k.

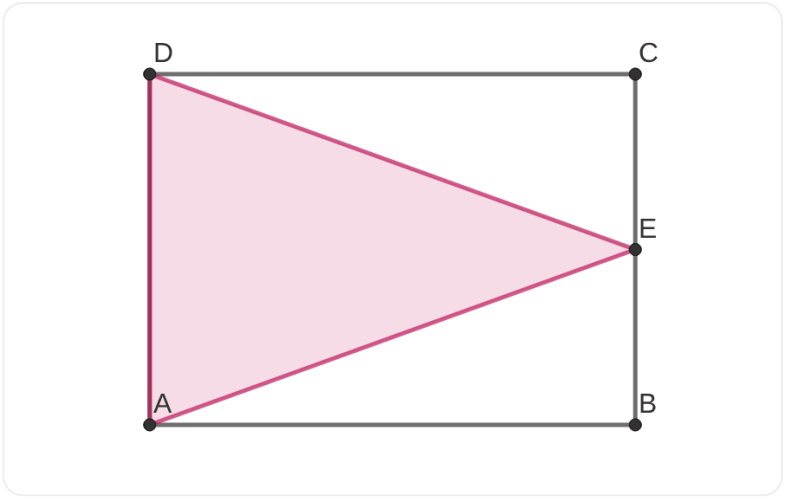
31 מצאו $a>0$ שעבורו $\int_0^a (x^2-ax)\,dx=-36$.

32 מצאו את כל המספרים הטבעיים n שעבורם $2^n > n^3$.

33 מצאו את המשיקים המשותפים לפרבולות $y = x^2$ ו-$y = -(x-2)^2$ (ראו ציור).



34 בריבוע $ABCD$ שצלעו 4, הנקודה E היא אמצע BC (ראו ציור). חשבו את $\cos\angle AED$ ואת שטח המשולש AED.



35 $f(x) = \frac{1}{x^2-2x+a}$. לאילו ערכי a אין לפונקציה אסימפטוטה אנכית? עבור $a = 2$ מצאו את נקודת הקיצון.

36 $f(x) = \sin^2 x$ בתחום $0 \le x \le \pi$. חשבו את השטח הכלוא בין הגרף לציר x (רמז: זהות זווית כפולה).

✔ תשובות סופיות – נושא 25.1

1	$a=0$,$b=-3$; $(-1,2)$ מקסימום
2	$a=3$; $(-1,-2)$ מקסימום, $(3,6)$ מינימום
3	$(-2,-8)$
4	$k=2$ או $k=-2$
5	פיתול: $(0,0)$,$(2,-16)$; מינימום: $(3,-27)$
6	$\frac{4}{3}$
7	$a=3$
8	$\frac{32}{3}$
9	$y=\frac{1}{4}x+1$; נקודת ההשקה $(4,2)$
10	$a_n=6n-1$; $d=6$
11	$a_1=8$; $q=\frac{1}{3}$
12	$q=2^4=16$
13	$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{671}{1296}$
14	$\frac{2}{5}$
15	$\frac{9}{19}$
16	$\frac{5}{16}$; 2 או 3 (באותה הסתברות)
17	$n=7$
18	$-\frac{24}{25}$
19	$\frac{1}{2}$
20	$\frac{23}{27}$
21	$r=\frac{10}{3}$; $R=\frac{169}{24}$
22	$ED=8$
23	60° ; שטח $10\sqrt{3}$

24 $R = 10$

25 $0 < a \le \frac{1}{2}$: המרחק a ; $a > \frac{1}{2}$: המרחק $\sqrt{a - \frac{1}{4}}$

26 $-2 < k < 2$

27 $a = -2, \ b = 4, \ c = 1$

28 $f(x) = x^3 - 3x$

29 מינימום $(1, 2)$

30 $0 < k < 4$: שלושה ; $k = 0$ או $k = 4$: שניים ; $k < 0$ או $k > 4$: אחד

31 $a = 6$

32 $n = 1$ או $n \ge 10$

33 $y = 0$ ו- $y = 4x - 4$

34 $\cos \angle AED = \frac{3}{5}$; שטח 8

35 $a > 1$; עבור $a = 2$: מקסימום $(1, 1)$

36 $\frac{\pi}{2}$

פרק 25 סיכומון סוף פרק – שאלות "100" ותרגול

לפני שמתחילים

- קוראים את כל השאלה, כולל הסעיפים האחרונים. לפעמים הם מגלים לאן השאלה הולכת.
- מסמנים את כל הנתונים: כל מספר נותן משוואה או תנאי.
- מזהים את הנושאים המשולבים: חקירה, אינטגרל, טריגו, סדרות, גיאומטריה.

פירוק שאלה קשה

- מחלקים לתתי-שאלות פשוטות: מה אני יודע לחשב עכשיו?
- שואלים: איזה כלי מתאים? (נגזרת – עלייה וקיצון, אינטגרל – שטח, משוואה – פרמטר).
- כותבים כל תוצאת ביניים בצורה מסודרת, היא תשמש בהמשך.

סעיפי חשיבה

- "הוכיחו ש...": מתחילים מהנתון ומגיעים לטענה, ולא להפך.
- "לאילו ערכי k...": משרטטים ובודקים את הישר $y=k$ מול הגרף.
- "כמה פתרונות למשוואה...": מספר נקודות החיתוך בין שני גרפים.

שימוש בסעיפים קודמים

- סעיף ב' כמעט תמיד משתמש בתוצאה של סעיף א'.
- "בעזרת הסעיפים הקודמים" אומר בלי חקירה חדשה: משתמשים במה שכבר נמצא.
- לא הצלחתם סעיף? מניחים את התוצאה הנתונה וממשיכים.

טריקים שחוזרים

- סימטריה וזוגיות חוסכות חצי מהעבודה.
- זיהוי נגזרת פנימית מאפשר אינטגרל "בלתי אפשרי".
- טרנספורמציה של נקודות מיוחדות במקום גרף שלם.
- בדיקה בהצבה של מספר פשוט ($x=0$, $x=1$).

בדיקה בסוף

- האם התשובה הגיונית? (שטח חיובי, אורך חיובי, הסתברות בין 0 ל-1).
- האם הפתרון בתוך תחום ההגדרה?
- האם עניתם על מה שנשאל: נקודה, ערך או פרמטר?

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- להיתקע בסעיף אחד ולוותר על השאר. אפשר להמשיך גם בלי סעיף קודם.
- לבנות חישוב ארוך במקום לחפש את הרעיון.
- לשכוח תנאי מהנתונים (למשל $a>0$) ולקבל שתי תשובות.

💡 **הטיפ של אילון:** שאלת 100 היא לא שאלה קשה, היא שאלה עם רעיון אחד מתוחכם. כשנתקעים, תחזרו לנתונים ותשאלו: באיזה נתון עוד לא השתמשתי?