LEVELUP

מתמטיקה בחוויה אחרת ÷ √ × π

קורס בגרות במתמטיקה · 4 יחידות

מחברת הקורס

שאלון 472

כל נושאי הקורס המלא – תרגול מדורג לכל נושא, תשובות סופיות,
סרטוני הסבר מהערוץ והמחשות אינטראקטיביות

498	14	8	64
תרגילים	נושאים	פרקים	ברקודים

אילון פרץ · LevelUp

levelupmath.co.il · YouTube · 050-5100170 💬

תוכן העניינים

1 הווקטור הגיאומטרי

1.1 חיבור, חיסור, כפל בסקלר והרכבת וקטורים בצורות 37

1.2 אורך וקטור, מכפלה סקלרית, ניצבות וזווית בין וקטורים 33

2 הווקטור האלגברי

2.1 וקטורי הצירים, שוויון, פעולות, אורך ואמצע קטע 35

2.2 מכפלה סקלרית וזווית, ישר בהצגה פרמטרית, וקטור מאונך ומצב הדדי ישר ומישור 37

3 חקירת פונקציות מעריכיות (e)

3.1 משוואות מעריכיות, תחום הגדרה, אסימפטוטות ונגזרת 41

3.2 חקירת פונקציות מעריכיות – מכפלה ומנה עם e 33

4 חקירת פונקציות לוגריתמיות ($\ln$)

4.1 חוקי לוגריתמים, משוואות $\ln$, תחום הגדרה ונגזרת 40

4.2 חקירת פונקציות $\ln$ 32

5 אינטגרלים

5.1 אינטגרלים של e^x ושל פונקציות שנותנות $\ln$, וחישובי שטחים 37

6 גדילה ודעיכה

6.1 שאלות גדילה ודעיכה 35

7 סדרה חשבונית

7.1 האיבר הכללי, הוכחה שסדרה חשבונית ואיברים חיוביים ושליליים 35

7.2 סכום סדרה חשבונית – סכום לפי מיקומים, זוגיים ואי-זוגיים וטרנספורמציות 35

8 סדרה הנדסית

8.1 האיבר הכללי, הוכחה שסדרה הנדסית וטרנספורמציות לסדרה 35

8.2 סכום סדרה הנדסית, זוגיים ואי-זוגיים וסדרה הנדסית אינסופית 33

💡 לחיצה על שם נושא מעבירה ישר אליו · כל ברקוד בחוברת גם לחיץ

פרק 1

הווקטור הגיאומטרי

פעולות בין וקטורים, הרכבת וקטורים במישור ובמרחב (תיבה, מנסרה, פירמידה), מכפלה סקלרית וזוויות

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

1.1 **חיבור, חיסור, כפל בסקלר והרכבת וקטורים בצורות** — 37 תרגילים

1.2 **אורך וקטור, מכפלה סקלרית, ניצבות וזווית בין וקטורים** — 33 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



וקטורים – כל מה שצריך לדעת לבגרות

YouTube · 4:23



הרכבת וקטורים ובניית מסלול | 472 ו-572

YouTube · 10:27



מכפלה סקלרית ומציאת זווית | 4 ו-5 יח"ל

YouTube · 11:09



צורות במרחב – תיבה וקובייה

YouTube · 7:01

1.1 חיבור, חיסור, כפל בסקלר והרכבת וקטורים בצורות

בכל צורה בוחרים וקטורי הצגה (בדרך כלל $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ היוצאים מאותו קודקוד) ומגיעים לכל נקודה דרך "מסלול" של צלעות. אמצע קטע: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. וקטורים לא מקבילים: אם $a\vec{u}+b\vec{v}=c\vec{u}+d\vec{v}$ אז $a=c$ ו-$b=d$.

צפו לפני שמתחילים:

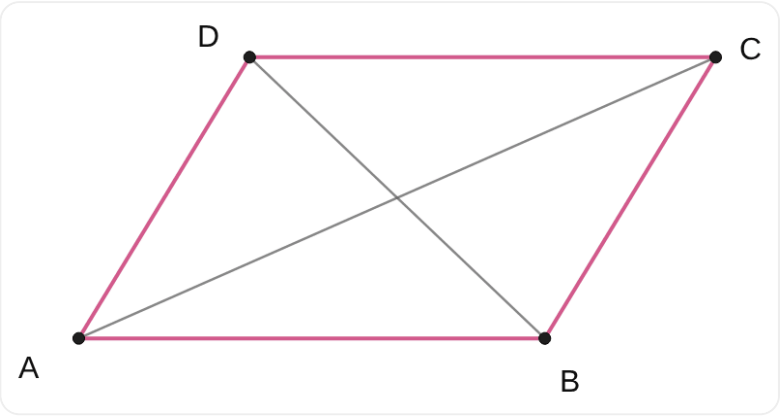
הוקטור הגיאומטרי – חיבור וחיסור וקטורים
YouTube · 2:57

הוקטור הגיאומטרי – כפל בסקלר
YouTube · 3:02

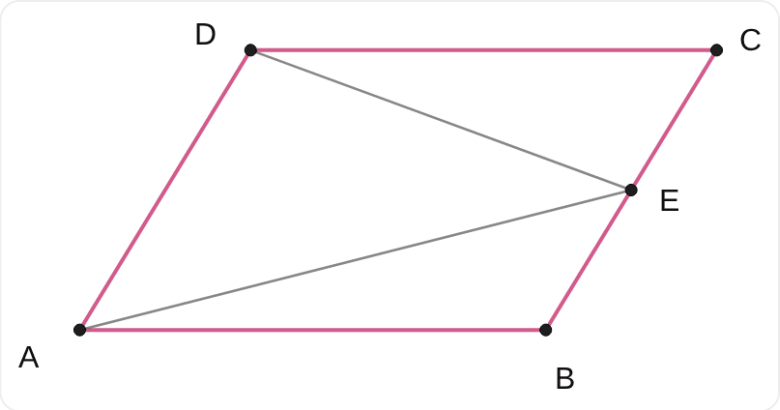
הוקטור הגיאומטרי – תלות לינארית
YouTube · 3:52

וקטורים שמוצאם באותה נקודה וסופם על אותו ישר
YouTube · 6:35

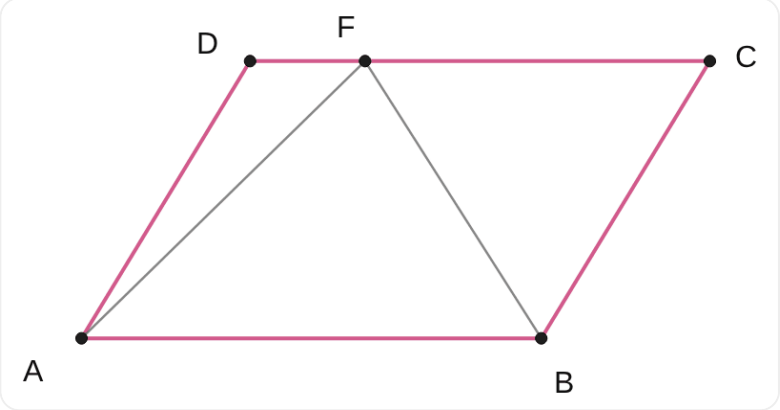
1 נתונה מקבילית $ABCD$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$. הביעו בעזרת $\vec{u}$ ו-$\vec{v}$ את $\overrightarrow{AC}$ ואת $\overrightarrow{BD}$.



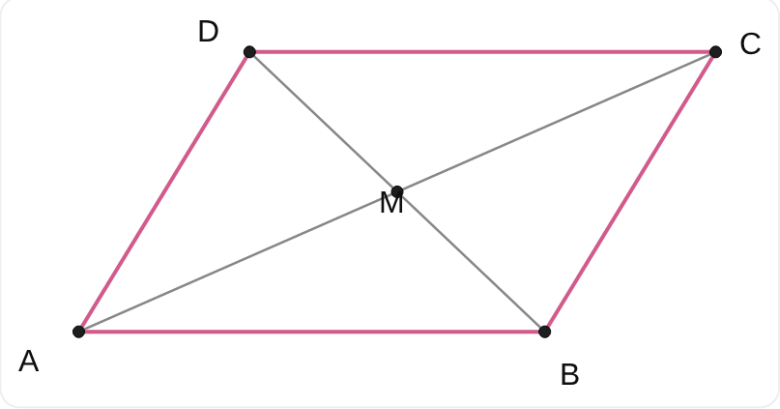
2 נתונה מקבילית $ABCD$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$. הנקודה E היא אמצע הצלע BC. הביעו את $\overrightarrow{AE}$ ואת $\overrightarrow{DE}$.



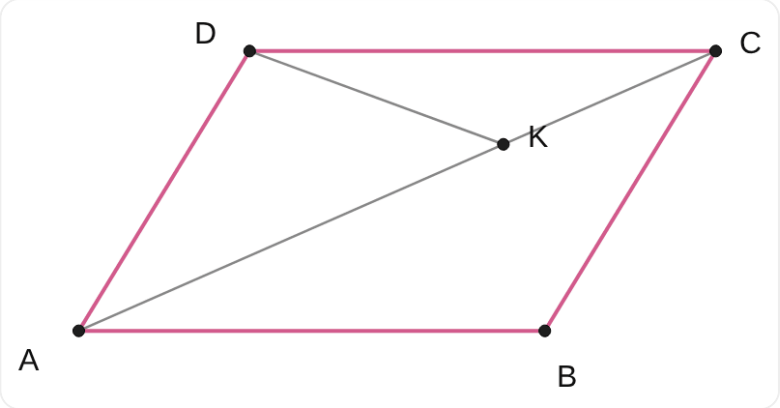
3 נתונה מקבילית $ABCD$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$. הנקודה F נמצאת על DC כך ש-$DF:FC=1:3$. הביעו את $\overrightarrow{AF}$ ואת $\overrightarrow{BF}$.



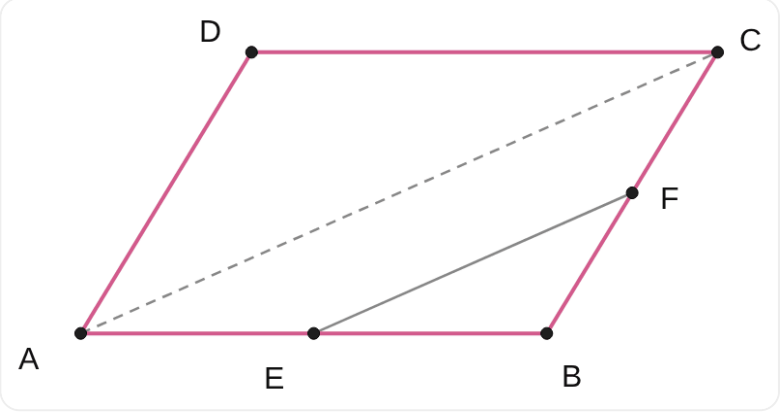
4 נתונה מקבילית $ABCD$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$. M היא נקודת מפגש האלכסונים. הביעו את $\overrightarrow{AM}$ ואת $\overrightarrow{MB}$.



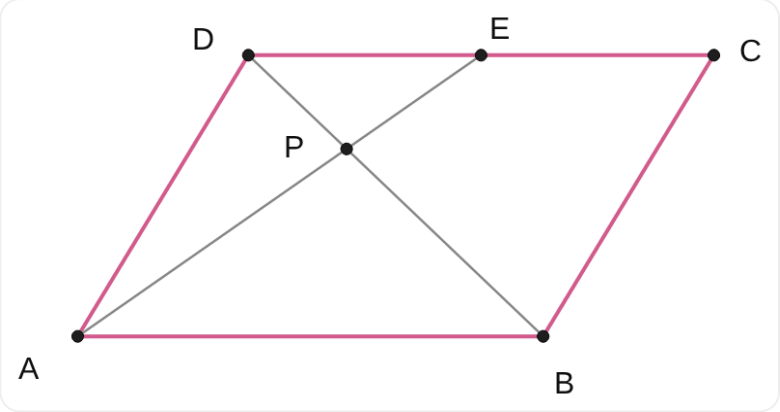
5 נתונה מקבילית $ABCD$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$. הנקודה K נמצאת על האלכסון AC כך ש-$AK:KC=2:1$. הביעו את $\overrightarrow{DK}$.



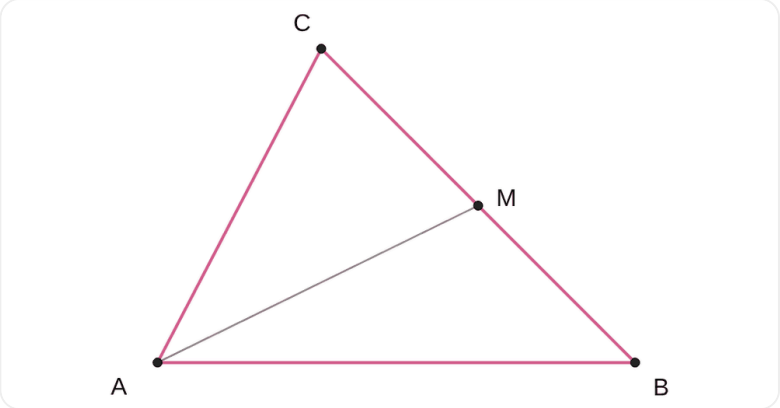
6 נתונה מקבילית $ABCD$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$. אמצע AB הוא E ו-F אמצע BC. הביעו את $\overrightarrow{EF}$ והראו ש-$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.



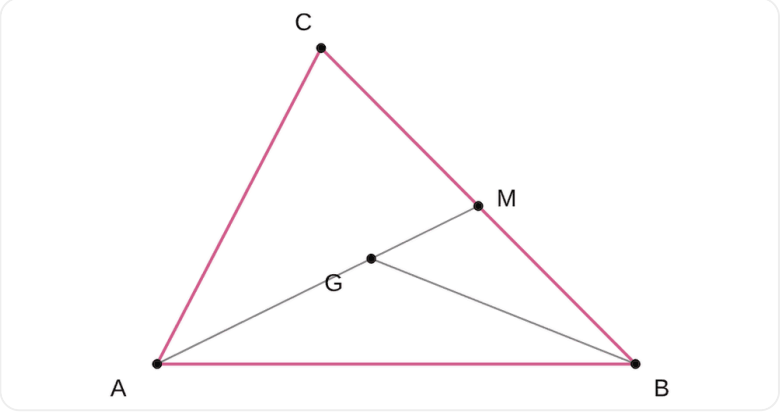
7 נתונה מקבילית $ABCD$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$. אמצע DC הוא E, והקטע AE חותך את האלכסון BD בנקודה P. מצאו את היחס $AP:PE$.



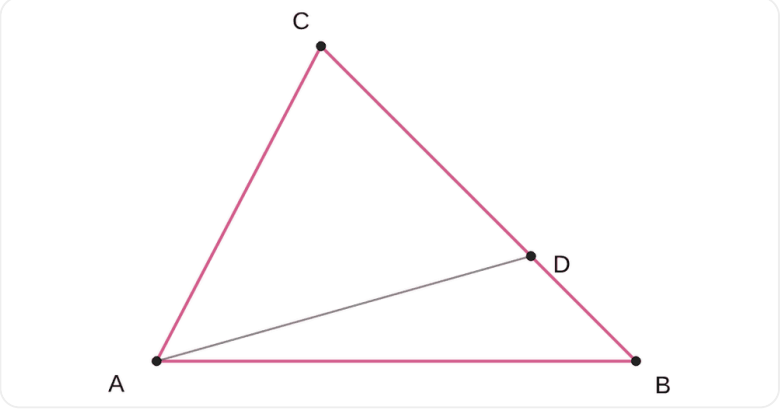
8 נתון משולש ABC. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$. M אמצע BC. הביעו את $\overrightarrow{BC}$ ואת התיכון $\overrightarrow{AM}$.



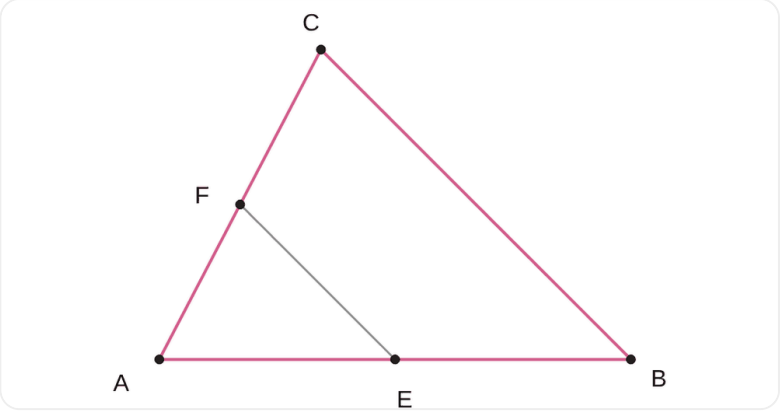
9 נתון משולש ABC. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$. G היא נקודת מפגש התיכונים. הביעו את $\overrightarrow{AG}$ ואת $\overrightarrow{GB}$.



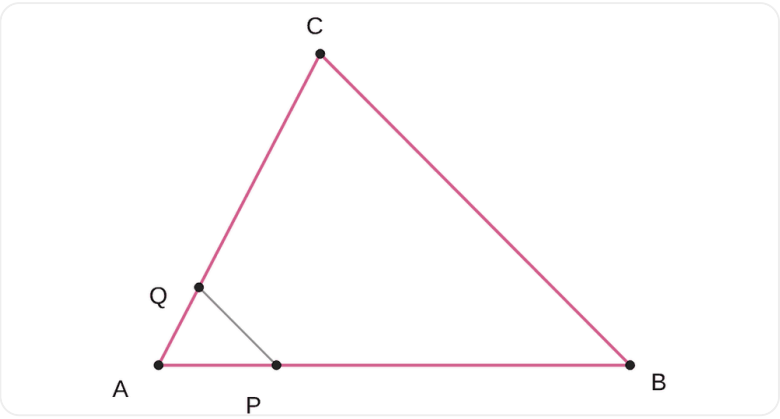
10 נתון משולש ABC. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$. הנקודה D על BC כך ש-$DC:BD=1:2$. הביעו את $\overrightarrow{AD}$.



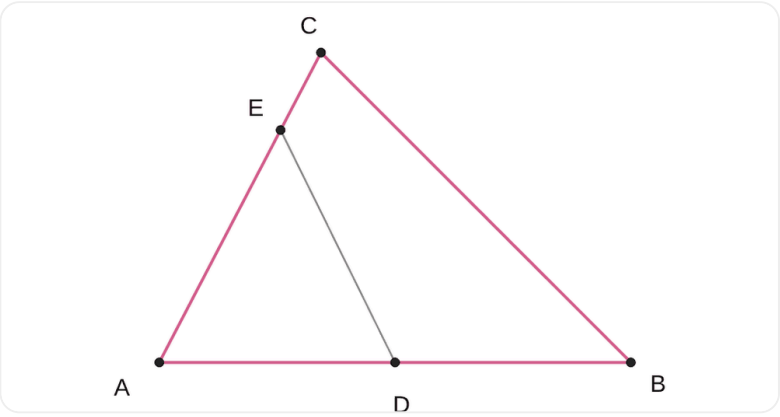
11 נתון משולש ABC. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$. E אמצע AB ו-F אמצע AC.
הביעו את $\overrightarrow{EF}$ והסיקו ש-$EF \parallel BC$ ו-$EF=\frac{1}{2}BC$.



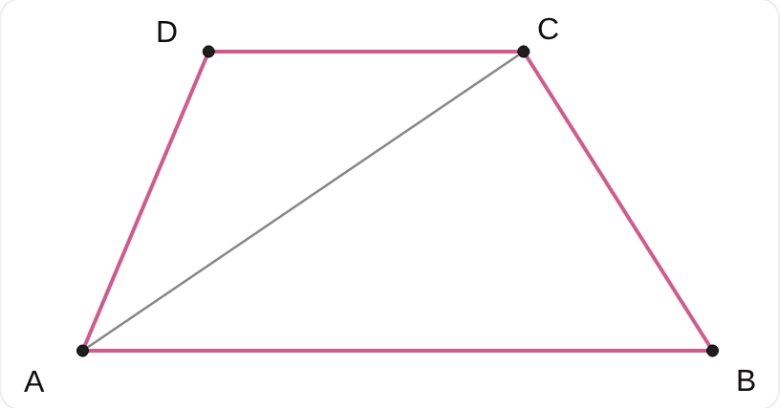
12 נתון משולש ABC. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$. P על AB כך ש-$AP=\frac{1}{4}AB$,
ו-Q על AC כך ש-$AQ=\frac{1}{4}AC$. הראו ש-$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.



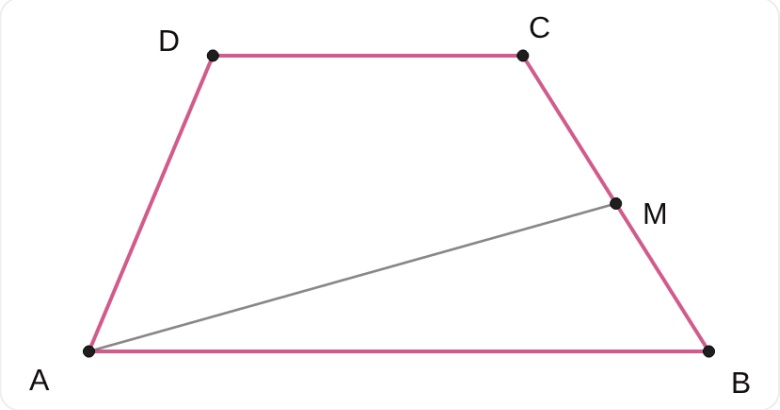
13 נתון משולש ABC. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$. E על AC כך
ש-$AE:EC=3:1$, ו-D אמצע AB. הביעו את $\overrightarrow{DE}$.



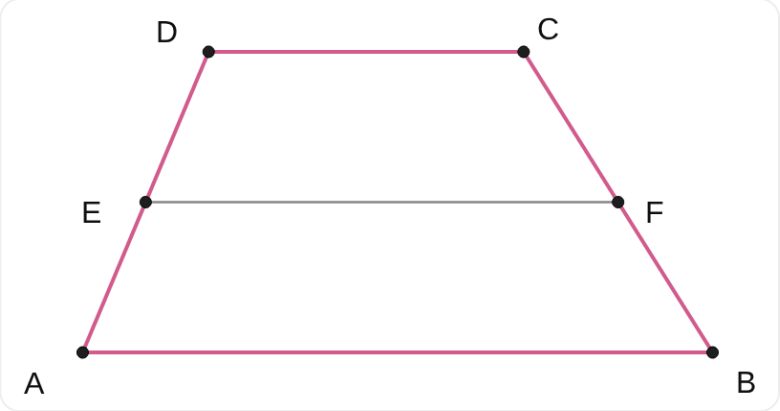
14 נתון טרפז $ABCD$ $(AB \parallel DC)$ שבו $DC = \frac{1}{2}AB$. מסמנים $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$. הביעו את $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AC}$ ואת $\overrightarrow{BC}$.



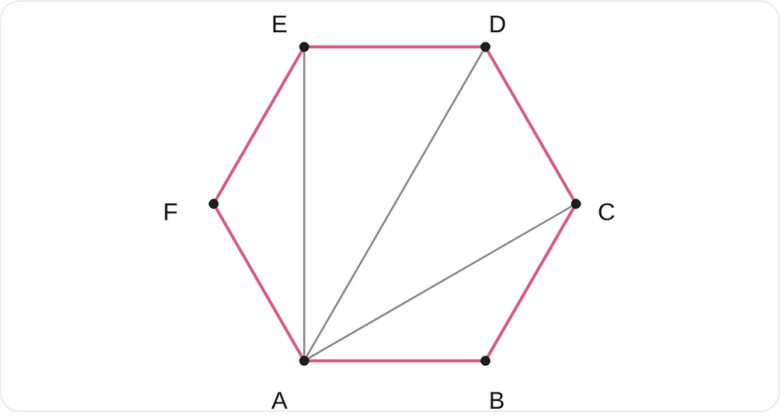
15 נתון טרפז $ABCD$ $(AB \parallel DC)$ שבו $DC = \frac{1}{2}AB$. מסמנים $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$. M אמצע השוק BC. הביעו את $\overrightarrow{AM}$.



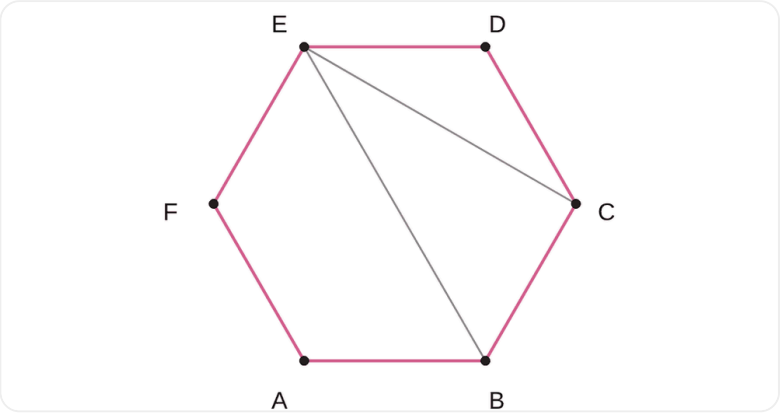
16 נתון טרפז $ABCD$ $(AB \parallel DC)$ שבו $DC = \frac{1}{2}AB$. מסמנים $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$. E ו-F הם אמצעי השוקיים AD ו-BC. הביעו את $\overrightarrow{EF}$ ומצאו פי כמה הוא גדול מ-$\overrightarrow{DC}$.



17 נתון משושה משוכלל $ABCDEF$. מסמנים $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{v}$. הביעו את $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ ואת $\overrightarrow{AE}$ (רמז: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$).



18 באותו משושה משוכלל ($\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{v}$) הביעו את $\overrightarrow{CE}$ ואת $\overrightarrow{BE}$.



19 $\vec{u}$ ו-$\vec{v}$ אינם מקבילים. מצאו את a ואת b אם $a\vec{u}+3\vec{v}=2\vec{u}+(b-1)\vec{v}$.

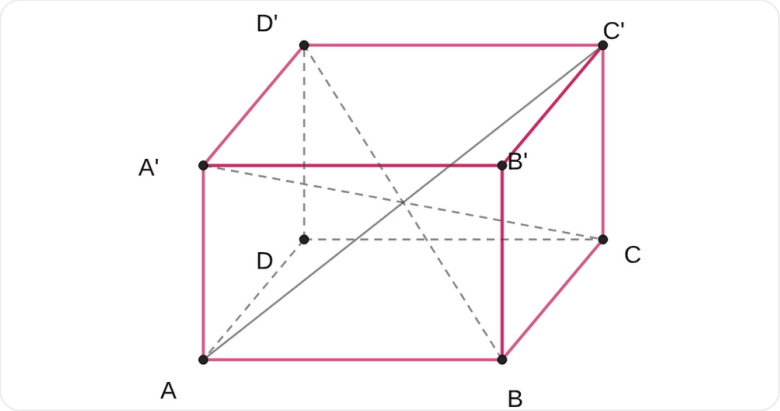
20 $\vec{u}$ ו-$\vec{v}$ אינם מקבילים. מצאו את k שעבורו הווקטורים $k\vec{u}+2\vec{v}$ ו-$3\vec{u}+6\vec{v}$ מקבילים.

21 $\vec{u}$ ו-$\vec{v}$ אינם מקבילים. מצאו את x ואת y אם $(x+y)\vec{u}+(x-y)\vec{v}=5\vec{u}+\vec{v}$.

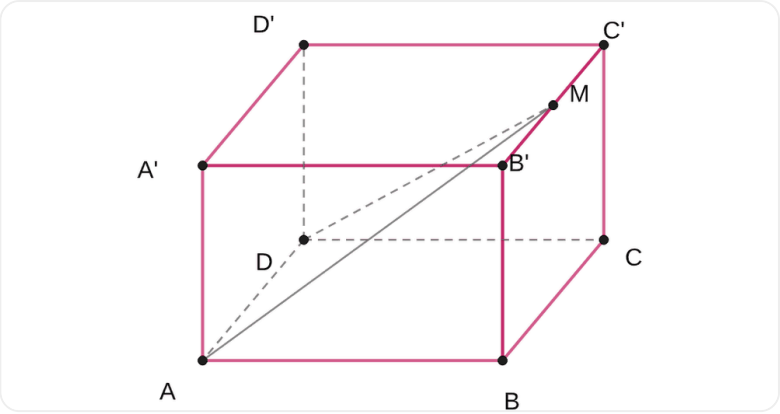
22 נתון $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ ו-$\overrightarrow{OC}=3\vec{u}-2\vec{v}$. הוכיחו שהנקודות A, B, C נמצאות על ישר אחד.

23 נתון $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$. הנקודה P נמצאת על AB ו-$\overrightarrow{OP}=t\vec{u}+(1-t)\vec{v}$. מצאו את t אם $AP:PB=1:3$.

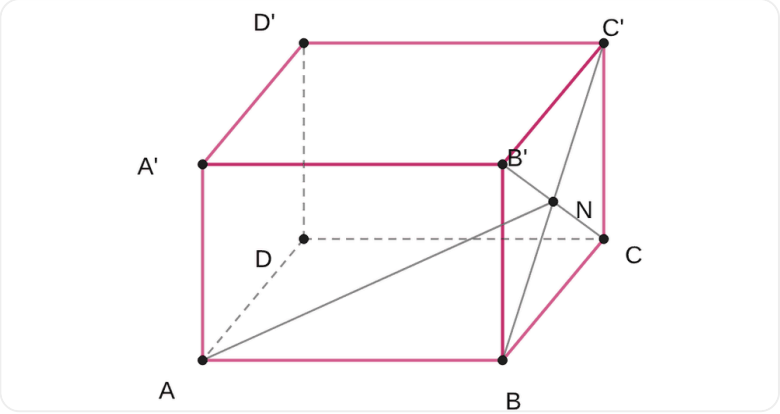
24 נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ (הקודקודים A', B', C', D' מעל A, B, C, D). מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$. הביעו את האלכסונים $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{BD'}$ ואת $\overrightarrow{A'C}$.



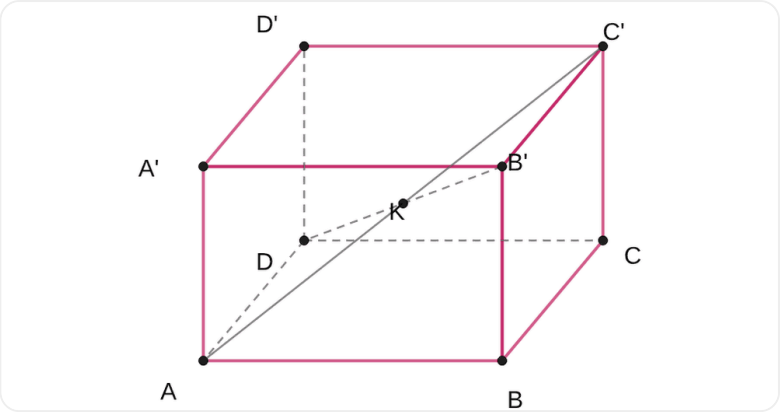
25 נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ (הקודקודים A', B', C', D' מעל A, B, C, D). מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$. M אמצע המקצוע $B'C'$. הביעו את $\overrightarrow{AM}$ ואת $\overrightarrow{DM}$.



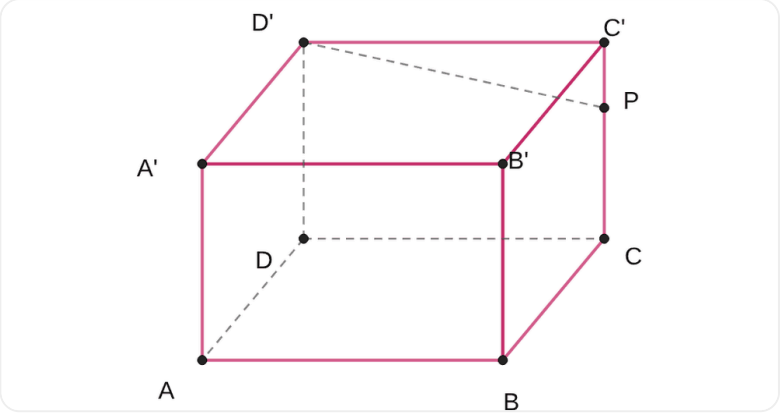
26 נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ (הקודקודים A', B', C', D' מעל A, B, C, D). מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$. N מרכז הפאה $BCC'B'$ (מפגש האלכסונים שלה). הביעו את $\overrightarrow{AN}$.



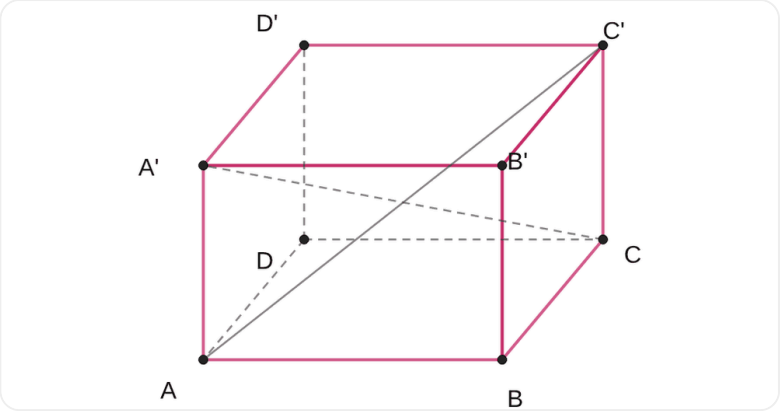
27 נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ (הקודקודים A', B', C', D' מעל A, B, C, D). מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$. K היא נקודת מפגש האלכסונים של התיבה. הביעו את $\overrightarrow{AK}$ ואת $\overrightarrow{B'K}$.



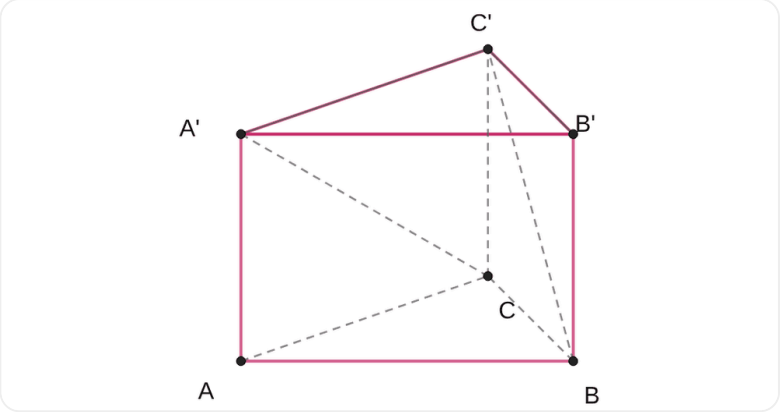
28 נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ (הקודקודים A', B', C', D' מעל A, B, C, D). מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$. P על CC' כך ש-$CP:PC'=2:1$. הביעו את $\overrightarrow{D'P}$.



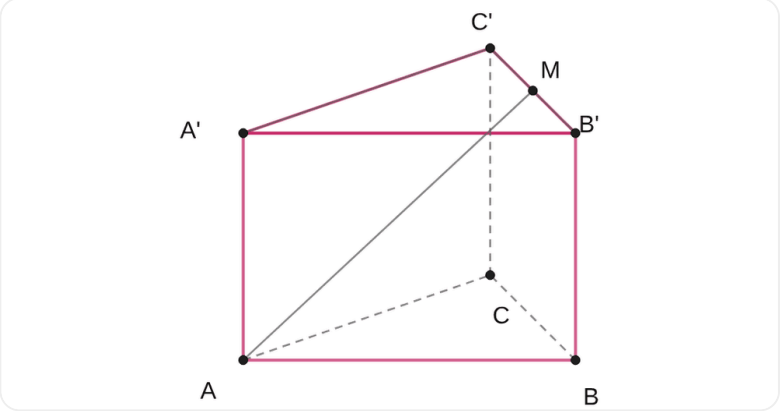
29 נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ (הקודקודים A', B', C', D' מעל A, B, C, D). מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$. הראו ש-$\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}=2\vec{w}$.



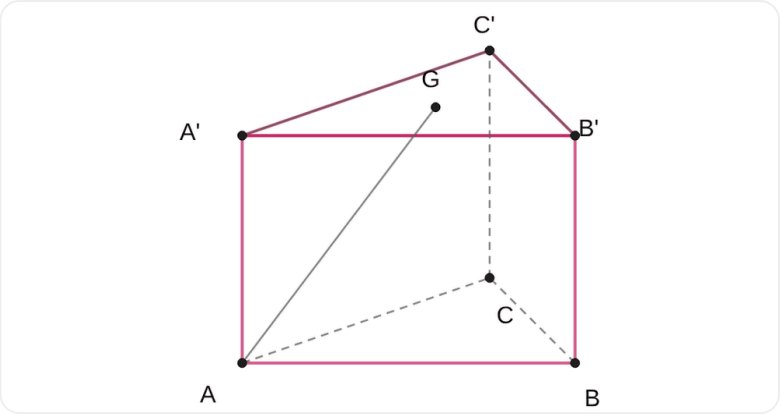
30 נתונה מנסרה משולשת $ABCA'B'C'$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$.
הביעו את $\overrightarrow{BC'}$ ואת $\overrightarrow{A'C}$.



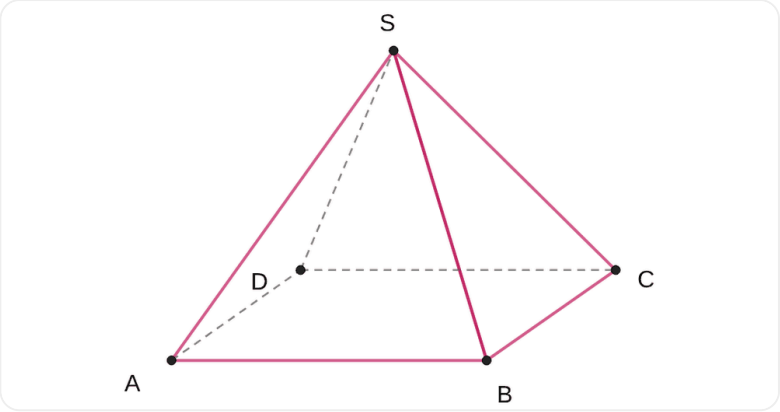
31 נתונה מנסרה משולשת $ABCA'B'C'$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$.
M אמצע $B'C'$. הביעו את $\overrightarrow{AM}$.



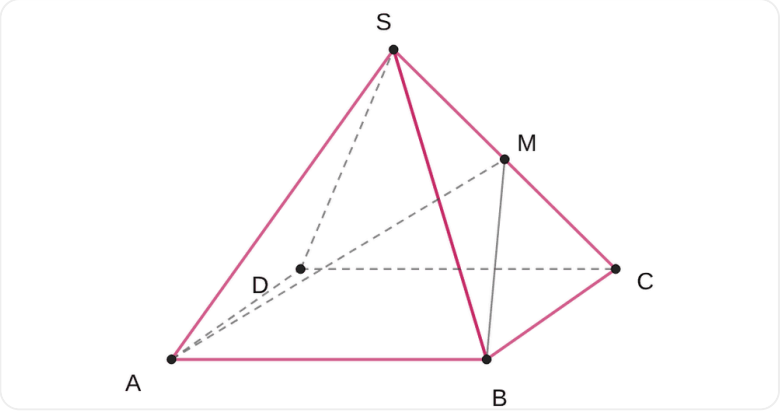
32 נתונה מנסרה משולשת $ABCA'B'C'$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$.
G מפגש התיכונים בבסיס העליון $A'B'C'$. הביעו את $\overrightarrow{AG}$.



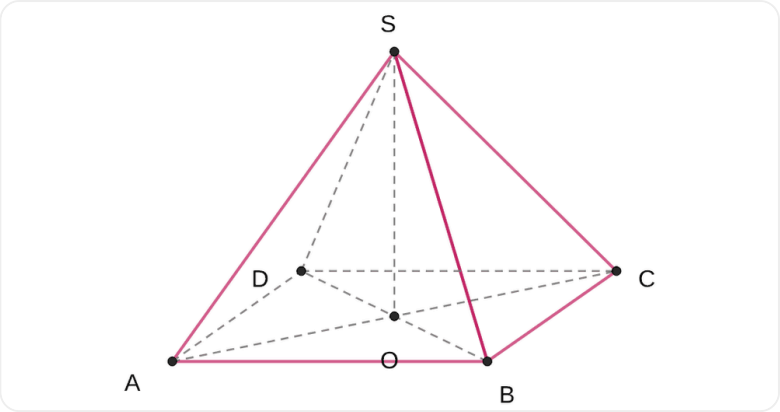
33 נתונה פירמידה $SABCD$ שבסיסה מקבילית $ABCD$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$,
$\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AS}=\vec{w}$. הביעו את $\overrightarrow{SC}$ ואת $\overrightarrow{SB}$.



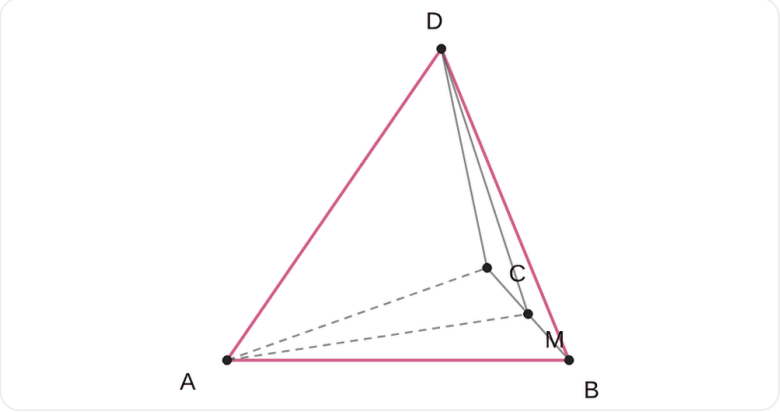
34 נתונה פירמידה $SABCD$ שבסיסה מקבילית $ABCD$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$,
$\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AS}=\vec{w}$. M אמצע SC. הביעו את $\overrightarrow{AM}$ ואת $\overrightarrow{BM}$.



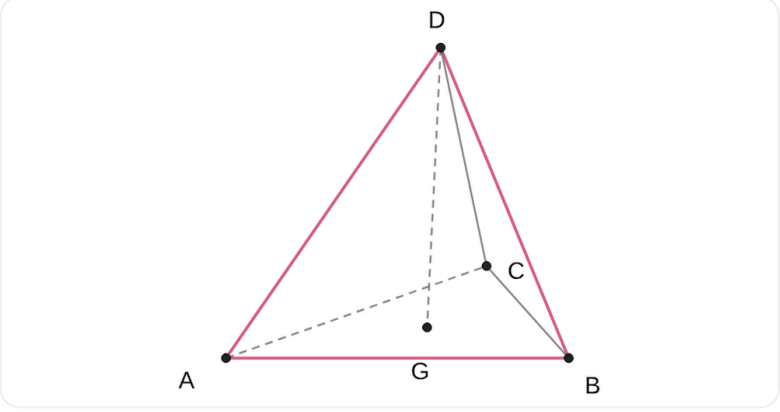
35 נתונה פירמידה $SABCD$ שבסיסה מקבילית $ABCD$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AS}=\vec{w}$. O מפגש האלכסונים של הבסיס. הביעו את $\overrightarrow{SO}$.



36 נתונה פירמידה משולשת $DABC$. מסמנים $\overrightarrow{DA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{v}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{w}$. M אמצע BC. הביעו את $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DM}$ ואת $\overrightarrow{AM}$.



37 נתונה פירמידה משולשת $DABC$. מסמנים $\overrightarrow{DA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{v}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{w}$. G מפגש התיכונים של המשולש ABC. הביעו את $\overrightarrow{DG}$.



✔ תשובות סופיות – נושא 1.1

1 $\overrightarrow{AC}=\vec{u}+\vec{v}\ ,\overrightarrow{BD}=-\vec{u}+\vec{v}$

2 $\overrightarrow{AE}=\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\ ,\overrightarrow{DE}=\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$

3 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\vec{u}+\vec{v}\ ,\overrightarrow{BF}=-\frac{3}{4}\vec{u}+\vec{v}$

4 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\ ,\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$

5 $\overrightarrow{DK}=\frac{2}{3}\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v}$

6 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$

7 $AP:PE=2:1$

8 $\overrightarrow{BC}=-\vec{u}+\vec{v}\ ,\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$

9 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}\ ,\overrightarrow{GB}=\frac{2}{3}\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v}$

10 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}$

11 $\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

12 $\overrightarrow{PQ}=-\frac{1}{4}\vec{u}+\frac{1}{4}\vec{v}$

13 $\overrightarrow{DE}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{3}{4}\vec{v}$

14 $\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\vec{u}\ ,\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}\ ,\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$

15 $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$

16 $\overrightarrow{EF}=\frac{3}{4}\vec{u}$ - פי $\frac{3}{2}$

17 $\overrightarrow{AC}=2\vec{u}+\vec{v}\ ,\overrightarrow{AD}=2\vec{u}+2\vec{v}\ ,\overrightarrow{AE}=\vec{u}+2\vec{v}$

18 $\overrightarrow{CE}=-\vec{u}+\vec{v}\ ,\overrightarrow{BE}=2\vec{v}$

19 $a=2\ ,b=4$

20 $k=1$

21 $x=3\ ,y=2$

22 $\overrightarrow{AC} = 2\vec{u} - 2\vec{v} = -2\overrightarrow{AB}$

23 $t = \frac{3}{4}$

24 $\overrightarrow{AC'} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, $\overrightarrow{BD'} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, $\overrightarrow{A'C} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$

25 $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$, $\overrightarrow{DM} = \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$

26 $\overrightarrow{AN} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

27 $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$, $\overrightarrow{B'K} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$

28 $\overrightarrow{D'P} = \vec{u} - \frac{1}{3}\vec{w}$

29 $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) + (-\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) = 2\vec{w}$

30 $\overrightarrow{BC'} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, $\overrightarrow{A'C} = \vec{v} - \vec{w}$

31 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$

32 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \vec{w}$

33 $\overrightarrow{SC} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{u} - \vec{w}$

34 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$, $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

35 $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}$

36 $\overrightarrow{AB} = -\vec{u} + \vec{v}$, $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$, $\overrightarrow{AM} = -\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

37 $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$

1.2 אורך וקטור, מכפלה סקלרית, ניצבות וזווית בין וקטורים

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\alpha$; $|\vec{u}|^2=\vec{u}\cdot\vec{u}$; $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \iff \vec{u}\perp\vec{v}$. כדי למצוא אורך של וקטור מורכב – מעלים בריבוע ופותחים סוגריים כמו בכפל מקוצר.

צפו לפני שמתחילים:



הוקטור הגיאומטרי – גודל של וקטור
YouTube · 4:07



מכפלה סקלרית – טכניקה
YouTube · 4:15



הוקטור הגיאומטרי – מציאת הזווית
YouTube · 7:24



תרגול מכפלה סקלרית
YouTube · 5:33

1 נתון: $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=5$ והזווית ביניהם 60°. חשבו את $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

2 נתון: $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=4$ ו-$\vec{u}\cdot\vec{v}=-4$. מצאו את הזווית בין הווקטורים.

3 נתון: $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=3$ והזווית ביניהם 60°. חשבו את $|\vec{u}+\vec{v}|$.

4 באותם נתונים ($|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=3$, זווית 60°) חשבו את $|\vec{u}-\vec{v}|$ ואת $|2\vec{u}-\vec{v}|$.

5 נתון: $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=1$ ו-$\vec{u}\perp\vec{v}$. חשבו את $(2\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$.

6 נתון: $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ ו-$\vec{u}\perp\vec{v}$. מצאו את k שעבורו $k\vec{u}+\vec{v}$ מאונך ל-$\vec{u}-\vec{v}$.

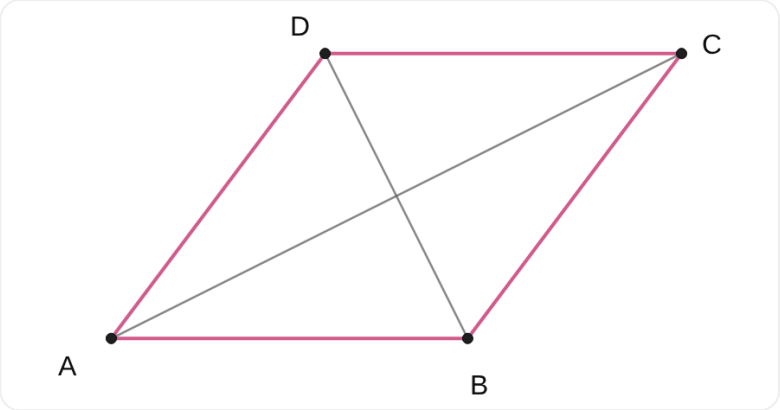
7 נתון: $|\vec{u}|=|\vec{v}|=1$ והזווית ביניהם 60°. מצאו את הזווית בין $\vec{u}+\vec{v}$ לבין $\vec{u}$.

8 נתון: $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=4$ ו-$|\vec{u}+\vec{v}|=5$. הוכיחו ש-$\vec{u}\perp\vec{v}$.

9 נתון: $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ ו-$|\vec{u}-\vec{v}|=\sqrt{7}$. מצאו את הזווית בין $\vec{u}$ ל-$\vec{v}$.

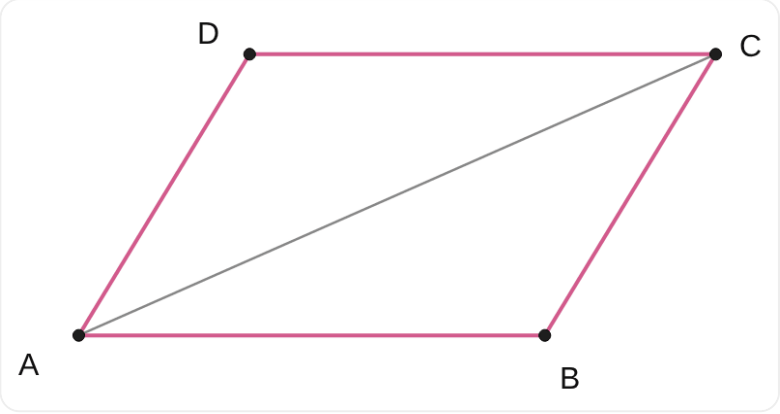
10 נתון: $|\vec{u}|=3$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=6$ ו-$|2\vec{u}-\vec{v}|=\sqrt{24}$. מצאו את $|\vec{v}|$.

11 $ABCD$ מעוין, $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$. הוכיחו בעזרת מכפלה סקלרית שהאלכסונים מאונכים זה לזה.

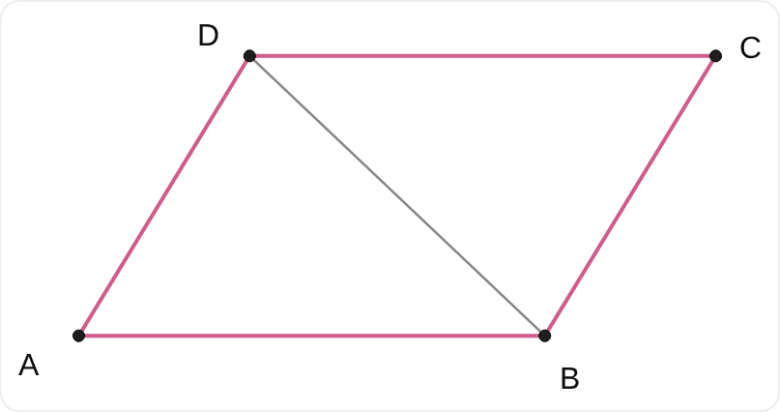


12 $ABCD$ מלבן, $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$. הוכיחו שהאלכסונים שווים באורכם.

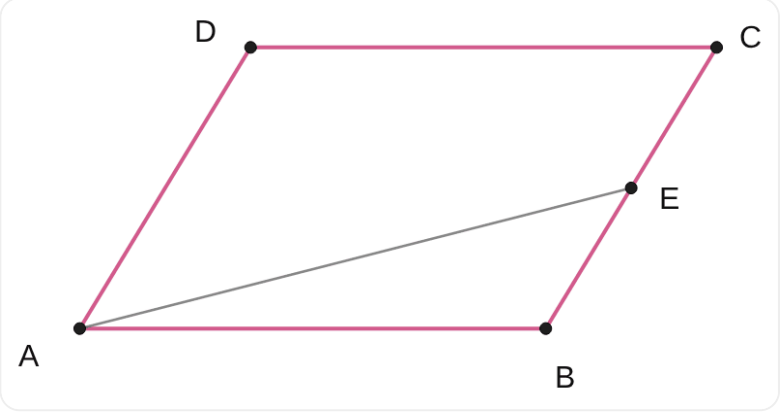
13 במקבילית $ABCD$ נתון: $AB=6$, $AD=4$, $\angle A=60^\circ$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$. חשבו את $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ואת אורך האלכסון AC.



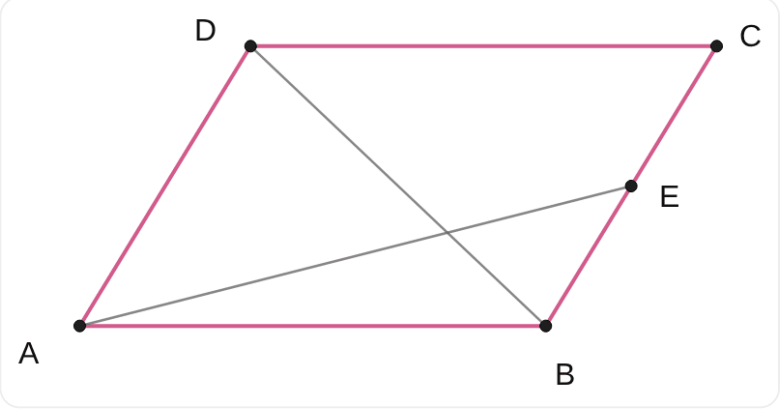
14 במקבילית $ABCD$ נתון: $AB=6$, $AD=4$, $\angle A=60^\circ$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$. חשבו את אורך האלכסון BD.



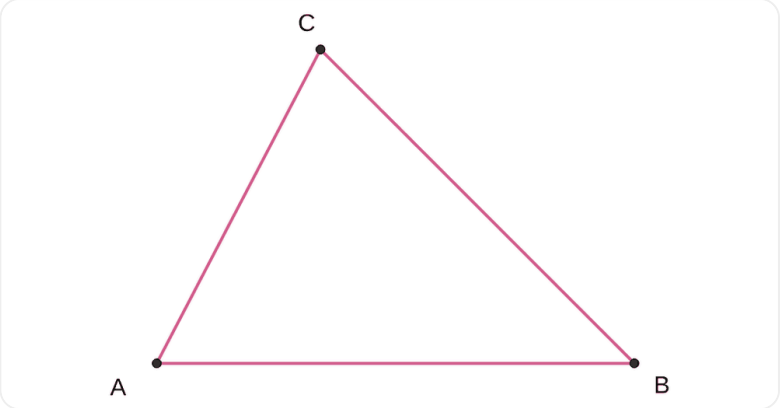
15 במקבילית $ABCD$ נתון: $AB=6$, $AD=4$, $\angle A=60^\circ$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$. E אמצע BC. חשבו את אורך הקטע AE.



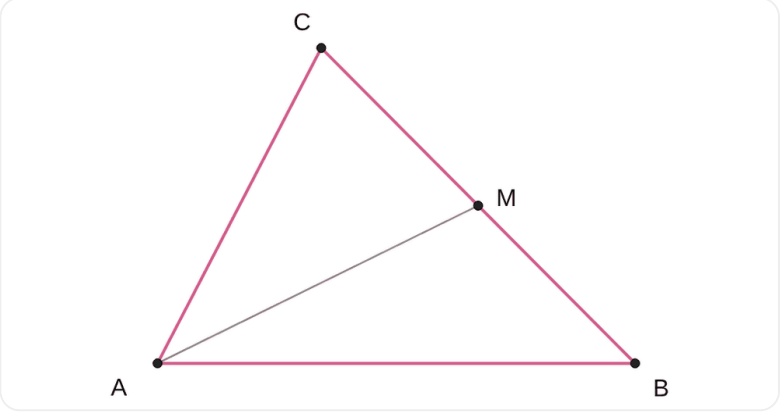
16 במקבילית $ABCD$ נתון: $AB=6$, $AD=4$, $\angle A=60^\circ$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$. E אמצע BC. חשבו את $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}$.



17 במשולש ABC נתון: $AB=5$, $AC=8$, $\angle A=60^\circ$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$. חשבו את אורך הצלע BC.

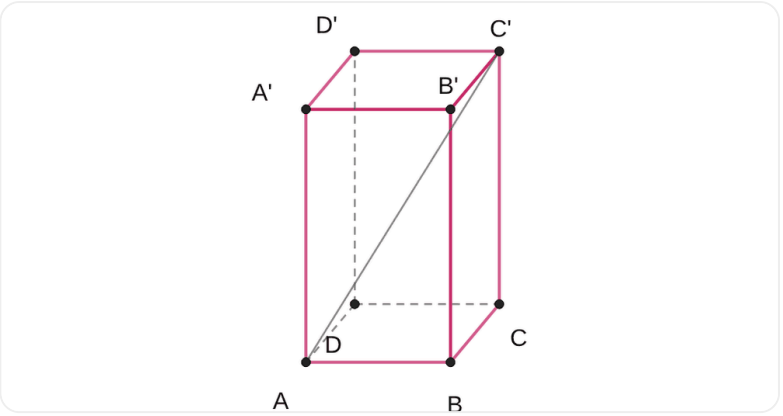


18 במשולש ABC נתון: $AB=5$, $AC=8$, $\angle A=60^\circ$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$. M אמצע BC. חשבו את אורך התיכון AM.

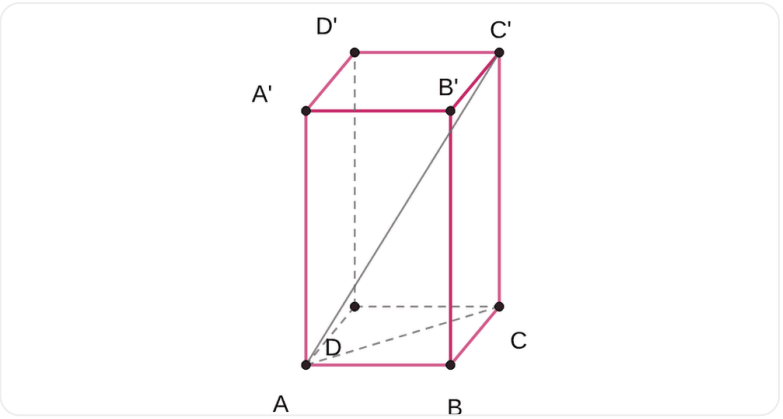


19 במשולש ABC נתון $AB=AC$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$, ו-$M$ אמצע BC. הוכיחו בעזרת מכפלה סקלרית ש-$AM\perp BC$.

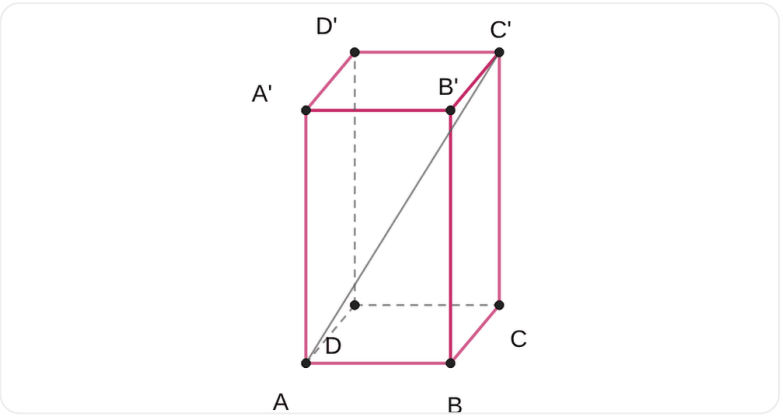
20 נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבה $AB=4$, $AD=3$, $AA'=12$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$. חשבו את אורך האלכסון AC'.



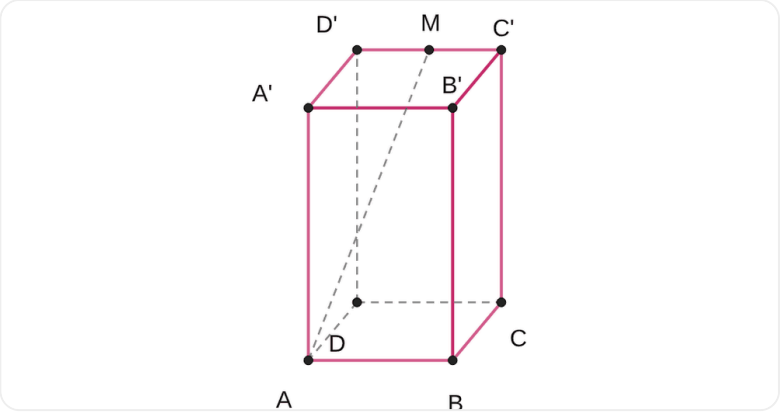
21 נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבה $AB=4$, $AD=3$, $AA'=12$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$. מצאו את הזווית בין האלכסון $\overrightarrow{AC'}$ לבין $\overrightarrow{AC}$.



22 נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבה $AB=4$, $AD=3$, $AA'=12$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$. מצאו את הזווית בין $\overrightarrow{AC'}$ לבין המקצוע $\overrightarrow{AA'}$.

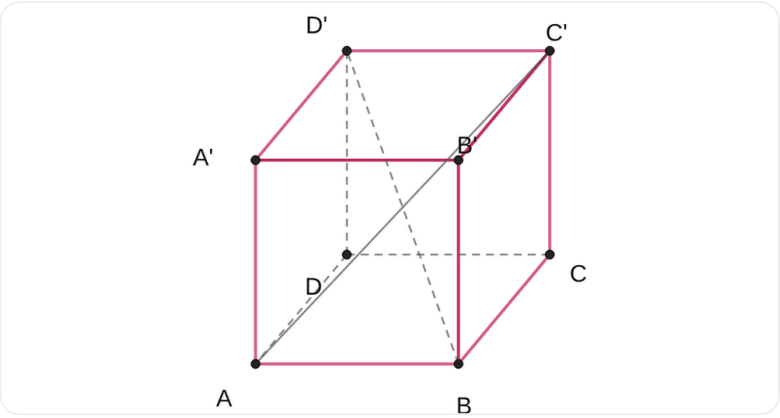


23 נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבה $AB=4$, $AD=3$, $AA'=12$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$. M אמצע $C'D'$. חשבו את אורך הקטע AM.

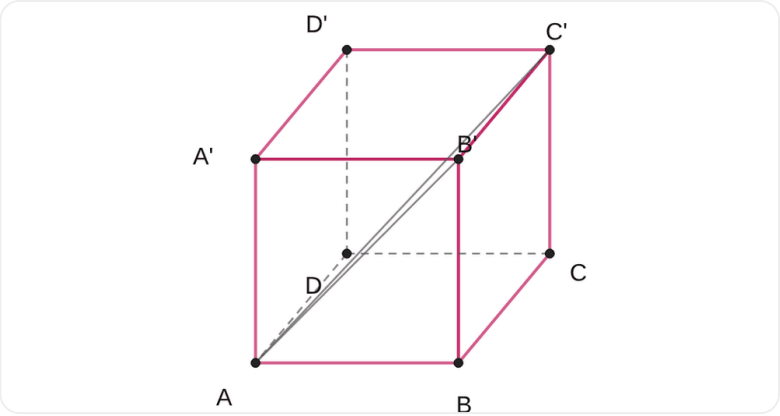


24 נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבה $AB=4$, $AD=3$, $AA'=12$. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$. מצאו את k שעבורו הווקטור $\vec{u}+k\vec{w}$ מאונך ל-$\overrightarrow{AC'}$.

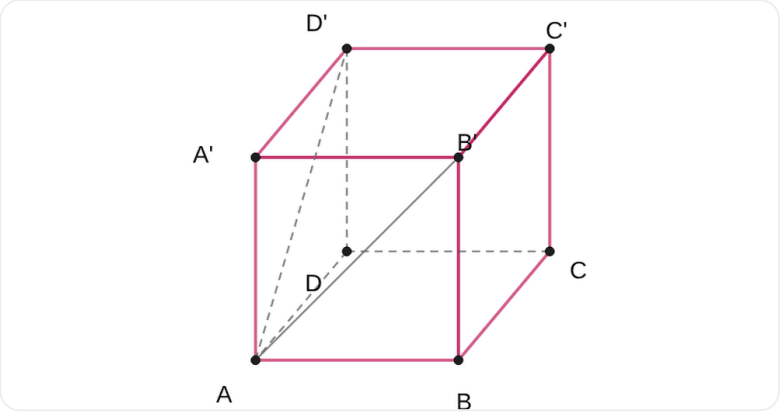
25 נתונה קובייה $ABCDA'B'C'D'$ שאורך מקצועה 2. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$. מצאו את הזווית בין האלכסונים $\overrightarrow{AC'}$ ו-$\overrightarrow{BD'}$.



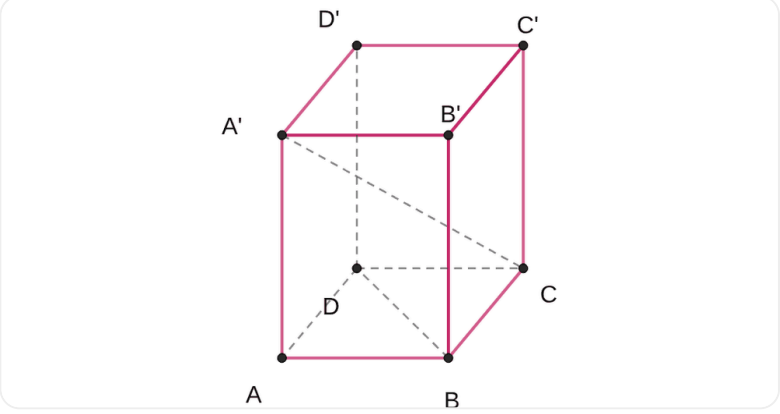
26 נתונה קובייה $ABCDA'B'C'D'$ שאורך מקצועה 2. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$. מצאו את הזווית בין $\overrightarrow{AC'}$ לבין אלכסון הפאה $\overrightarrow{AB'}$.



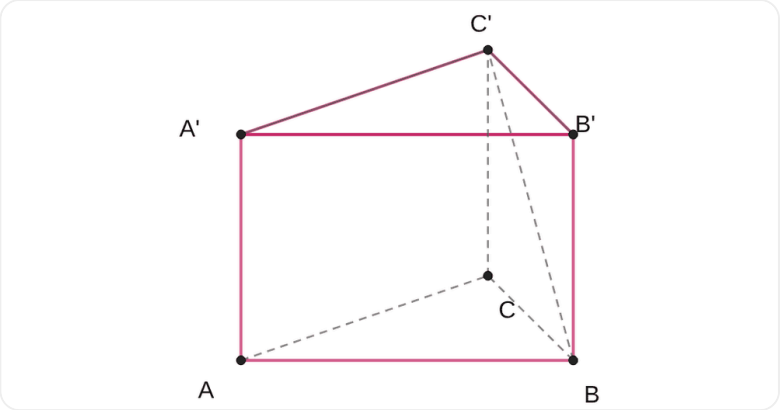
27 נתונה קובייה $ABCDA'B'C'D'$ שאורך מקצועה 2. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$. מצאו את הזווית בין אלכסוני הפאות $\overrightarrow{AB'}$ ו-$\overrightarrow{AD'}$.



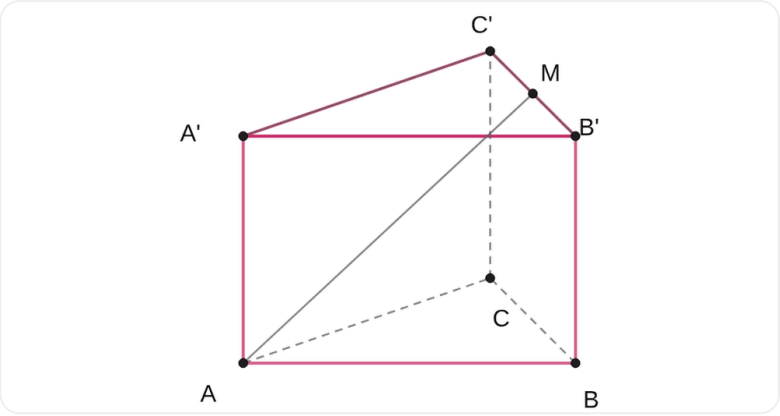
28 נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע שצלעו 3 וגובהה 5. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$. הוכיחו ש-$A'C\perp BD$.



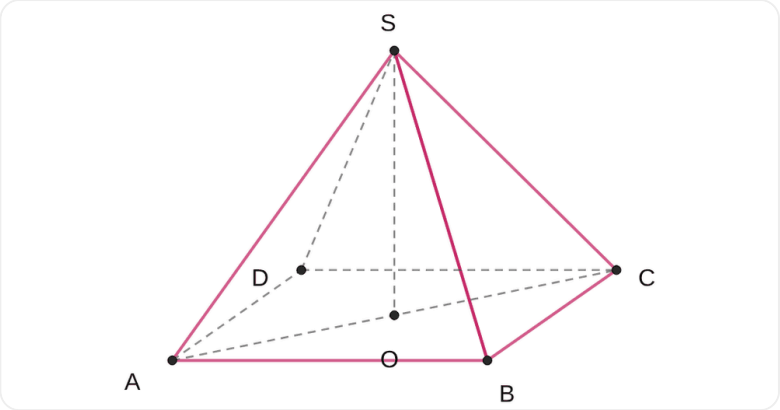
29 נתונה מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות שצלעו 4, וגובהה 6. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$. חשבו את $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ואת אורך הקטע BC'.



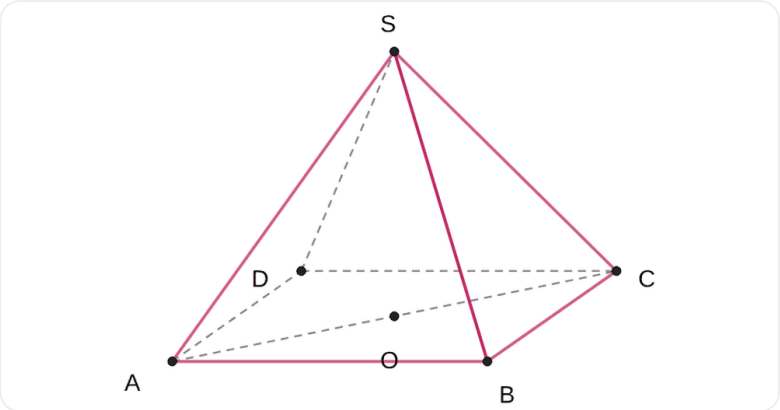
30 נתונה מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות שצלעו 4, וגובהה 6. מסמנים $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$. M אמצע $B'C'$. חשבו את אורך AM ואת הזווית בין $\overrightarrow{AM}$ ל-$\overrightarrow{AA'}$.



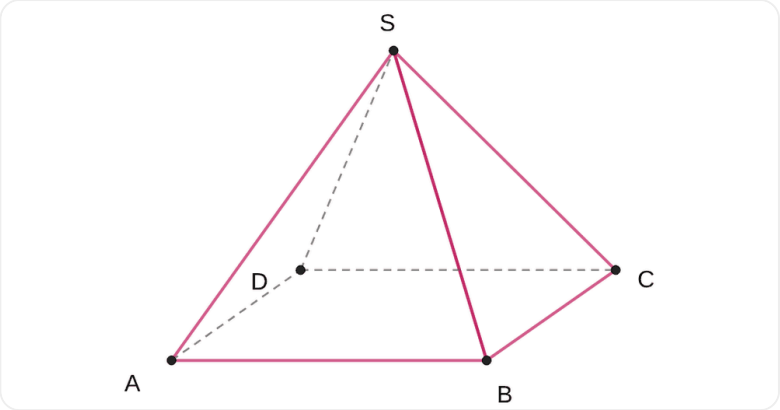
31 נתונה פירמידה ישרה $SABCD$ שבסיסה ריבוע שצלעו 6, וגובהה $SO = 4$ (O מרכז הבסיס). מסמנים $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OS} = \vec{w}$. הביעו את $\overrightarrow{AS}$ וחשבו את אורך המקצוע הצדדי AS.



32 נתונה פירמידה ישרה $SABCD$ שבסיסה ריבוע שצלעו 6, וגובהה $SO = 4$ (O מרכז הבסיס). מסמנים $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OS} = \vec{w}$. מצאו את הזווית בין המקצוע $\overrightarrow{AS}$ לבין האלכסון $\overrightarrow{AC}$.



33 נתונה פירמידה ישרה $SABCD$ שבסיסה ריבוע שצלעו 6, וגובהה $SO = 4$ (O מרכז הבסיס). מסמנים $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OS} = \vec{w}$. חשבו את $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{SC}$.



✔ תשובות סופיות – נושא 1.2

1	$\frac{15}{2}$
2	120°
3	$\sqrt{37}$
4	$\lvert\vec{u}-\vec{v}\rvert=\sqrt{13}\ ,\lvert2\vec{u}-\vec{v}\rvert=7$
5	7
6	$k=\frac{9}{4}$
7	30°
8	$9+16+2\vec{u}\cdot\vec{v}=25\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
9	60°
10	$\lvert\vec{v}\rvert=2\sqrt{3}$
11	$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{v}-\vec{u})=\lvert\vec{v}\rvert^2-\lvert\vec{u}\rvert^2=0$
12	$\lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert^2=\lvert\vec{u}-\vec{v}\rvert^2$ כי $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
13	$AC=2\sqrt{19}$; 12
14	$BD=2\sqrt{7}$
15	$AE=2\sqrt{13}$
16	-22
17	$BC=7$
18	$AM=\frac{1}{2}\sqrt{129}$
19	$\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{v}-\vec{u})=\frac{1}{2}(\lvert\vec{v}\rvert^2-\lvert\vec{u}\rvert^2)=0$
20	13
21	$\alpha\approx67.4^\circ\ ,\cos\alpha=\frac{5}{13}$
22	$\alpha\approx22.6^\circ\ ,\cos\alpha=\frac{12}{13}$
23	$\sqrt{157}$

24	$k=-\frac{1}{9}$
25	$\cos\alpha=\frac{1}{3}\ ,\alpha\approx 70.5^\circ$
26	$\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}\ ,\alpha\approx 35.3^\circ$
27	$\alpha=60^\circ$
28	$(\vec{u}+\vec{v}-\vec{w})\cdot(-\vec{u}+\vec{v})=-9+9=0$
29	$2\sqrt{13}\ ;\ 8$
30	$\alpha=30^\circ\ ;\ AM=4\sqrt{3}$
31	$AS=\sqrt{34}\ ;\ \overrightarrow{AS}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}+\vec{w}$
32	$\cos\alpha=\frac{3\sqrt{17}}{17}\ ,\alpha\approx 43.3^\circ$
33	2

פרק 1 סיכומון סוף פרק – הווקטור הגיאומטרי

פעולות בסיסיות

- חיבור: \"שרשור\" – $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
- חיסור מאותה נקודה: $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.
- $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$; כפל בסקלר משנה אורך (ובשלילי – גם כיוון).

הרכבת וקטורים בצורה

- בוחרים 2–3 וקטורי הצגה $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ מאותו קודקוד.
- לכל וקטור – מסלול על צלעות הצורה מההתחלה לסוף.
- צלעות מקבילות ושוות (מקבילית, תיבה) – אותו וקטור.

אמצע ויחס

- M אמצע BC: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.
- P על AB ו-$PB:AP=m:n$: $\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.
- מפגש תיכונים: $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

תלות לינארית

- $\vec{u}\parallel\vec{v}\iff\vec{u}=k\vec{v}$.
- $\vec{u},\vec{v}$ לא מקבילים: $a\vec{u}+b\vec{v}=c\vec{u}+d\vec{v}\Rightarrow a=c,\ b=d$.
- נקודות על ישר אחד: $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$.

תיבה ומנסרה

- A' מעל A: $\overrightarrow{AA'}=\vec{w}$ הוא וקטור הגובה.
- אלכסון תיבה: $\overrightarrow{AC'}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.
- מרכז פאה / מרכז תיבה – אמצע אלכסון.

מכפלה סקלרית

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\alpha$.
- $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$; $\vec{u}\perp\vec{v}\iff\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
- $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2$.

זווית בין וקטורים

- $\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$.
- מכפלה שלילית – זווית קהה; חיובית – חדה.
- בתיבה: וקטורי ההצגה מאונכים, ולכן כל המכפלות ביניהם 0.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לחבר וקטורים שלא \"מתחברים\" בקצוות (סוף של אחד ≠ התחלה של השני).
- לשכוח שינוי סימן: $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.
- לחשב $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}|+|\vec{v}|$ – צריך להעלות בריבוע!
- להחליף בין מקצוע לאלכסון בתיבה.

💡 **הטיפ של אילון:** לפני שמתחילים – כתבו ליד השרטוט מה זה $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, האורכים שלהם והזוויות ביניהם. כל שאר השאלה זה רק פתיחת סוגריים.

פרק 2

הווקטור האלגברי

וקטורים בשיעורים: פעולות, אורכים, אמצע קטע, מכפלה סקלרית, ישרים ומצב הדדי ישר ומישור

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

2.1 וקטורי הצירים, שוויון, פעולות, אורך ואמצע קטע — 35 תרגילים

2.2 מכפלה סקלרית וזווית, ישר בהצגה פרמטרית, וקטור מאונך ומצב הדדי ישר ומישור — 37 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

הווקטור האלגברי – מערכת צירים ואוקטנטים
YouTube · 5:59

מכפלה סקלרית ומציאת זווית
YouTube · 4:21

ישר בהצגה פרמטרית
YouTube · 2:17

מצב הדדי בין ישר ומישור
YouTube · 4:49

2.1 וקטורי הצירים, שוויון, פעולות, אורך ואמצע קטע

וקטור במרחב: $(x,y,z)=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$. וקטור בין נקודות: $\overrightarrow{AB}=B-A$. אורך: $|(x,y,z)|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. אמצע קטע: $M=\frac{A+B}{2}$. וקטורים מקבילים – אחד הוא כפולה של השני.

צפו לפני שמתחילים:



הוקטור האלגברי – מערכת צירים ואוקטנטים
YouTube · 5:59



הוקטור האלגברי – פעולות בסיסיות
YouTube · 3:58



הוקטור האלגברי – אורך / גודל וקטור
YouTube · 2:37



הוקטור האלגברי – אמצע קטע
YouTube · 3:12

1. נתונים הווקטורים $\vec{u}=(2,-1,3)$ ו-$\vec{v}=(1,4,-2)$. חשבו את $\vec{u}+\vec{v}$ ואת $\vec{u}-\vec{v}$.
2. עבור אותם וקטורים, חשבו את $3\vec{u}-2\vec{v}$.
3. כתבו את הווקטור $(4,-2,5)$ בעזרת וקטורי היחידה $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$.
4. נתונות הנקודות $A(1,2,-1)$ ו-$B(4,0,5)$. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{AB}$.
5. עבור אותן נקודות, מצאו את הווקטור $\overrightarrow{BA}$. מה הקשר ל-$\overrightarrow{AB}$?
6. מצאו את x, y, z אם $(x+1,\ 2y,\ z-3)=(4,\ 6,\ 0)$.
7. מצאו את a ואת b אם $a(1,2,0)+b(0,1,3)=(2,7,9)$.
8. האם הווקטור $(1,5,6)$ הוא צירוף לינארי של $(1,1,0)$ ו-$(0,2,3)$? אם כן, מצאו את המקדמים.
9. חשבו את אורך הווקטור $\vec{w}=(2,-3,6)$.

10 חשבו את אורך הווקטור $(1,-2,2)$ ואת אורך הווקטור $(3,4,0)$.

11 מצאו וקטור יחידה בכיוון הווקטור $(2,-1,2)$.

12 מצאו וקטור באורך 10 בכיוון הווקטור $(0,3,4)$.

13 מצאו את המרחק בין הנקודות $A(1,-2,3)$ ו-$B(5,2,-1)$.

14 מצאו את אמצע הקטע AB עבור $A(1,-2,3)$ ו-$B(5,2,-1)$.

15 $M(2,1,-3)$ היא אמצע הקטע AB, ו-$A(0,4,-1)$. מצאו את B.

16 מצאו את k אם אורך הווקטור $(k,2,-2)$ הוא 3.

17 מצאו את t אם המרחק בין $A(1,t,0)$ ל-$B(3,1,4)$ הוא 6.

18 האם הווקטורים $(2,-4,6)$ ו-$(-1,2,-3)$ מקבילים? נמקו.

19 מצאו את m ואת n אם הווקטורים $(3,m,-6)$ ו-$(1,2,n)$ מקבילים.

20 הראו שהנקודות $A(1,2,3)$, $B(3,5,4)$, $C(7,11,6)$ נמצאות על ישר אחד.

21 מצאו את k שעבורו הנקודות $A(0,1,2)$, $B(2,3,5)$, $C(6,k,11)$ על ישר אחד.

22 $ABCD$ מקבילית: $A(1,0,2)$, $B(4,1,3)$, $C(5,3,1)$. מצאו את הקודקוד D.

23 $ABCD$ מקבילית שבה $A(2,1,0)$, $B(3,4,1)$, $D(0,2,5)$. מצאו את C ואת נקודת מפגש האלכסונים.

24 נתון משולש ABC: $A(2,0,1)$, $B(4,2,5)$, $C(0,4,3)$. מצאו את אורך התיכון לצלע BC.

25 באותו משולש, מצאו את נקודת מפגש התיכונים.

26 הראו שהמשולש $A(1,1,1)$, $B(3,3,2)$, $C(3,-1,2)$ הוא שווה שוקיים (מצאו את אורכי הצלעות).

27 נתונות $A(1,2,0)$ ו-$B(7,-1,3)$. הנקודה P נמצאת על AB כך ש-$AP:PB=1:2$. מצאו את P.

28 O ראשית הצירים, $\overrightarrow{OA}=(2,1,4)$. מצאו את הנקודה B אם $\overrightarrow{AB}=(1,-3,2)$.

29 באילו מבין המישורים xy, xz, yz נמצאת הנקודה $(3,0,-2)$? ומה המרחק שלה מהראשית?

30 מצאו נקודה על ציר x שמרחקה מהנקודה $A(1,2,2)$ שווה 3.

31 מצאו נקודה על ציר z שנמצאת במרחקים שווים מ-$A(1,0,2)$ ומ-$B(0,2,3)$.

32 הקודקודים של תיבה הם $O(0,0,0)$, $A(4,0,0)$, $C(0,3,0)$ ו-$O'(0,0,5)$. מצאו את שיעורי הקודקוד B' שמעל $B(4,3,0)$, ואת אורך האלכסון OB'.

33 נתון: $\vec{u}=(1,2,-1)$, $\vec{v}=(2,0,3)$. מצאו וקטור $\vec{x}$ כך ש-$2\vec{x}+\vec{u}=\vec{v}$.

34 מצאו את p אם $|(p,\ p,\ 2)|=|(1,\ 3,\ 4)|$.

35 מצאו את הנקודה C כך ש-$B(3,1,2)$ היא אמצע AC, כאשר $A(-1,5,0)$.

✔ תשובות סופיות – נושא 2.1

1	$(1,-5,5)\ ;\ (3,3,1)$
2	$(4,-11,13)$
3	$4\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$
4	$(3,-2,6)$
5	$(-3,2,-6)=-\overrightarrow{AB}$
6	$x=3\ ,y=3\ ,z=3$
7	$a=2\ ,b=3$
8	כן: $(1,1,0)+2(0,2,3)$
9	$\lvert\vec{w}\rvert=7$
10	$3\ ;\ 5$
11	$\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$
12	$(0,6,8)$
13	$AB=4\sqrt{3}$
14	$(3,0,1)$
15	$B(4,-2,-5)$
16	$k=1$ או $k=-1$
17	$t=5$ או $t=-3$
18	כן: $(2,-4,6)=-2(-1,2,-3)$
19	$m=6\ ,n=-2$
20	$\overrightarrow{AC}=(6,9,3)=3\overrightarrow{AB}$
21	$k=7$
22	$D(2,2,0)$

23	$\left(\frac{3}{2},3,3\right)$; $C(1,5,6)$
24	$3\sqrt{2}$
25	$(2,2,3)$
26	$BC=4$,$AB=AC=3$
27	$P(3,1,1)$
28	$B(3,-2,6)$
29	במישור xz ; $\sqrt{13}$
30	$(0,0,0)$ או $(2,0,0)$
31	$(0,0,4)$
32	$5\sqrt{2}$; $B'(4,3,5)$
33	$\vec{x}=\left(\frac{1}{2},-1,2\right)$
34	$p=\pm\sqrt{11}$
35	$C(7,-3,4)$

2.2 מכפלה סקלרית וזווית, ישר בהצגה פרמטרית, וקטור מאונך ומצב הדדי ישר ומישור

$(a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1,b_2,b_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$; $\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$. ישר:
$\vec{x}=A+t\vec{d}$. ישר מקביל למישור (או מוכל בו) כאשר וקטור הכיוון שלו מאונך לווקטור המאונך למישור.

צפו לפני שמתחילים:



הווקטור האלגברי – מכפלה סקלרית ומציאת זווית
YouTube · 4:21



הווקטור האלגברי – ישר בהצגה פרמטרית
YouTube · 2:17



הווקטור האלגברי – וקטור המאונך לשני וקטורים
YouTube · 7:14



הווקטור האלגברי – מצב הדדי בין ישר ומישור
YouTube · 4:49

1. חשבו את המכפלה הסקלרית של $\vec{u}=(1,2,2)$ ו-$\vec{v}=(3,0,-4)$.
2. מצאו את הזווית בין $\vec{u}=(1,2,2)$ לבין $\vec{v}=(3,0,-4)$.
3. מצאו את הזווית בין הווקטורים $(1,1,0)$ ו-$(0,1,1)$.
4. מצאו את הזווית בין הווקטורים $(1,0,1)$ ו-$(-1,0,1)$.
5. מצאו את הזווית בין הווקטורים $(2,1,-2)$ ו-$(1,2,2)$.
6. מצאו את הזווית בין הווקטורים $(1,1,1)$ ו-$(1,0,0)$.
7. האם הווקטורים $(2,-1,3)$ ו-$(1,5,1)$ מאונכים? נמקו.
8. מצאו את k שעבורו הווקטורים $(k,2,-1)$ ו-$(3,k,4)$ מאונכים.
9. מצאו את t שעבורו הזווית בין $(1,t,0)$ ל-$(0,1,0)$ היא 45°.

10 נתון משולש $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$. מצאו את הזווית $\angle BAC$.

11 הוכיחו שהמשולש $A(2,1,0)$, $B(3,3,1)$, $C(4,0,1)$ הוא ישר זווית, וקבעו באיזה קודקוד הזווית הישרה.

12 מצאו וקטור המאונך גם ל-$(1,0,1)$ וגם ל-$(0,1,1)$.

13 מצאו וקטור המאונך לשני הווקטורים $(1,2,3)$ ו-$(2,1,0)$.

14 מצאו וקטור יחידה המאונך לווקטורים $(2,0,1)$ ו-$(0,1,2)$.

15 כתבו הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך $A(1,2,-1)$ בכיוון $(3,0,2)$.

16 כתבו הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך $A(2,-1,4)$ ו-$B(5,1,3)$.

17 האם הנקודה $(7,3,1)$ נמצאת על הישר $\vec{x}=(1,1,4)+t(3,1,-\frac{3}{2})$?

18 האם הנקודה $(4,5,2)$ נמצאת על הישר $\vec{x}=(2,1,0)+t(1,2,1)$?

19 האם הנקודה $(5,0,4)$ נמצאת על הישר $\vec{x}=(1,2,1)+t(2,-1,1)$?

20 מצאו את k אם הנקודה $(k,7,-1)$ נמצאת על הישר $\vec{x}=(1,1,5)+t(2,3,-3)$.

21 מצאו את נקודת החיתוך של הישר $\vec{x}=(1,2,3)+t(1,-1,2)$ עם המישור xy (שבו $z=0$).

22 מצאו את נקודות החיתוך של הישר $\vec{x}=(2,4,6)+t(1,2,3)$ עם המישורים xy ו-yz.

23 נתונים הישרים $\vec{x}=(1,0,2)+t(1,1,0)$ ו-$\vec{x}=(3,2,0)+s(0,0,1)$. מצאו את נקודת החיתוך שלהם.

24 האם הישרים $\vec{x}=(1,1,1)+t(2,4,-2)$ ו-$\vec{x}=(0,5,2)+s(-1,-2,1)$ מקבילים? נמקו.

25 מצאו את הזווית בין הישרים $\vec{x}=(0,0,0)+t(1,1,0)$ ו-$\vec{x}=(1,2,3)+s(1,0,1)$.

26 נתון מישור שהווקטור $(1,2,-2)$ מאונך לו. האם הישר $\vec{x}=(0,1,3)+t(2,1,2)$ מקביל למישור? נמקו.

27 נתון מישור שהווקטור $(2,-1,1)$ מאונך לו. האם הישר $\vec{x}=(1,0,0)+t(1,1,1)$ מקביל למישור או חותך אותו?

28 המישור π עובר דרך $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ו-$(0,0,1)$. מצאו וקטור המאונך למישור.

29 המישור π עובר דרך $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$. האם הישר $\vec{x}=(0,0,0)+t(1,-1,0)$ מקביל למישור?

30 המישור π נתון בהצגה $\vec{x}=(0,0,2)+s(1,0,0)+r(0,1,0)$. מצאו את נקודת החיתוך של הישר $\vec{x}=(1,1,0)+t(1,2,1)$ עם המישור.

31 המישור $\vec{x}=(1,0,0)+s(0,1,0)+r(0,0,1)$ והישר $\vec{x}=(3,2,1)+t(1,0,2)$. מצאו את מצבם ההדדי ואת נקודת החיתוך אם יש.

32 הישר $\vec{x}=(1,2,3)+t(1,1,0)$ והמישור $\vec{x}=(0,0,3)+s(1,0,0)+r(0,1,0)$. מה המצב ההדדי?

33 נתונה הקובייה $OABCO'A'B'C'$ שבה $O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $C(0,2,0)$, $O'(0,0,2)$, ו-$B'(2,2,2)$ מעל $B(2,2,0)$. מצאו את הזווית בין האלכסון OB' לבין המקצוע OA.

34 באותה קובייה, מצאו את הזווית בין האלכסונים OB' ו-AC', כאשר $C'(0,2,2)$.

35 נתונים $\vec{u}=(1,2,0)$ ו-$\vec{v}=(2,-1,k)$. מצאו את k אם $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}-\vec{v}|$.

36 מצאו נקודה P על הישר $\vec{x}=(1,0,0)+t(0,1,1)$ כך ש-$\overrightarrow{OP}$ מאונך לכיוון הישר.

37 מצאו את הנקודה על הישר $\vec{x}=(2,1,3)+t(1,-1,2)$ שבה $x=5$, ואת המרחק שלה מהנקודה $(2,1,3)$.

✔ תשובות סופיות – נושא 2.2

1	-5
2	$\cos\alpha=-\frac{1}{3}$, $\alpha\approx 109.5^\circ$
3	60°
4	90°
5	90°
6	$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\alpha\approx 54.7^\circ$
7	כן: המכפלה הסקלרית 0
8	$k=\frac{4}{5}$
9	$t=1$ (או $t=-1$ נותן 135°)
10	$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$, $\alpha\approx 81.9^\circ$
11	ב-A: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$
12	לדוגמה $(1,1,-1)$
13	לדוגמה $(3,-6,3)$ או $(1,-2,1)$
14	$\pm\frac{1}{\sqrt{21}}(1,4,-2)$
15	$\vec{x}=(1,2,-1)+t(3,0,2)$
16	$\vec{x}=(2,-1,4)+t(3,2,-1)$
17	כן, $t=2$
18	כן, $t=2$
19	לא: מ-x ו-y מתקבל $t=2$, אך אז $z=3\neq 4$
20	$k=5$
21	$\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2},0\right)$
22	שתיהן $(0,0,0)$ – הישר עובר בראשית
23	$(3,2,2)$

24 כן, וקטורי הכיוון מקבילים (והישרים אינם מתלכדים)

25 60°

26 כן: $(2,1,2)\cdot(1,2,-2)=0$

27 חותך: $(1,1,1)\cdot(2,-1,1)=2\neq 0$

28 $(1,1,1)$

29 כן: $(1,-1,0)\cdot(1,1,1)=0$

30 $(3,5,2)$ $(t=2)$

31 חותך ב-$(1,2,-3)$

32 הישר מוכל במישור

33 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\alpha\approx 54.7^\circ$

34 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$,$\alpha\approx 70.5^\circ$

35 כל k (תמיד $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$)

36 $P(1,0,0)$

37 $(5,-2,9)$; $3\sqrt{6}$

פרק 2 סיכומון סוף פרק – הווקטור האלגברי

וקטורים בשיעורים

- $\overrightarrow{AB} = B - A$ (סוף פחות התחלה).
- חיבור/כפל בסקלר – רכיב-רכיב.
- שוויון וקטורים – כל הרכיבים שווים.

אורך ומרחק

- $|(x,y,z)| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- מרחק בין נקודות: $AB = |\overrightarrow{AB}|$.
- וקטור יחידה: $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$.

אמצע, יחס ומקבילית

- אמצע: $M = \frac{A+B}{2}$.
- מקבילית $ABCD$: $D = A + C - B$.
- מפגש תיכונים: $G = \frac{A+B+C}{3}$.

מקבילים ועל ישר אחד

- $\vec{u} \parallel \vec{v}$ – היחסים בין הרכיבים שווים.
- A, B, C על ישר אחד: $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

מכפלה סקלרית וזווית

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.
- $\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$; מאונכים $\iff$ מכפלה 0.

וקטור המאונך לשניים

- מחפשים (a,b,c) שמכפלתו בכל אחד מהם 0 – שתי משוואות.
- מציבים ערך נוח לאחד הנעלמים (למשל $c = 1$).

ישר ומצב הדדי עם מישור

- ישר: $\vec{x} = A + t\vec{d}$; נקודה על הישר – יש t אחד לכל הרכיבים.
- $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$: הישר מקביל למישור או מוכל בו (בודקים נקודה).
- $\vec{d} \cdot \vec{n} \neq 0$: הישר חותך – מציבים ומוצאים t.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- $\overrightarrow{AB} = A - B$ – הפוך!
- בבדיקת נקודה על ישר – למצוא t מרכיב אחד ולשכוח לבדוק את השאר.
- לשכוח את השורש באורך וקטור.
- \"מקביל למישור\" בלי לבדוק אם הישר בעצם מוכל בו.

💡 **הטיפ של אילון:** בכל שאלה במרחב – תרגמו מילים לווקטורים: \"מאונך\" = מכפלה סקלרית 0, \"מקביל\" = כפולה, \"על הישר\" = הצבת פרמטר.

פרק 3

חקירת פונקציות מעריכיות (e)

משוואות עם e, אסימפטוטות, נגזרת, וחקירה מלאה של מכפלה ומנה

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

3.1 משוואות מעריכיות, תחום הגדרה, אסימפטוטות ונגזרת — 41 תרגילים

3.2 חקירת פונקציות מעריכיות – מכפלה ומנה עם e — 33 תרגילים

סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

פונקציה מעריכית – כל מה שצריך לדעת ל־4 ו־5 יחידות
YouTube · 3:15

פונקציה מעריכית – חקירה מלאה + טיפים ודגשים לבגרות
YouTube · 16:20

מפה לחומר של שאלון 472 – כל החומר לבגרות 4 יחידות
YouTube · 6:20

שאלון 472 – מה ללמוד לבגרות? המיקוד והאסטרטגיה
YouTube · 6:17

המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

המשיק הנע
גררו נקודה לאורך הגרף וראו את המשיק ואת השיפוע שלו – הנגזרת בנקודה – בזמן אמת.

הפונקציה והנגזרת – יד ביד
ראו איך עלייה, ירידה וקיצון ב-$f(x)$ מתאימים לסימן של $f'(x)$.

3.1 משוואות מעריכיות, תחום הגדרה, אסימפטוטות ונגזרת

תזכורות: $e^x > 0$ לכל x ולכן לעולם אינו מתאפס; $a = b \iff e^a = e^b$;
$x = \ln k \iff e^x = k$ (כאשר $k > 0$). נגזרות: $(e^x)' = e^x$, $(e^{g(x)})' = g'(x)e^{g(x)}$.
אסימפטוטה אופקית: $e^x \to 0$ כאשר $x \to -\infty$.

צפו לפני שמתחילים:

פונקציה מעריכית – כל מה שצריך לדעת ל־4 ו־5 יחידות
YouTube · 3:15

משוואות מעריכיות
YouTube · 16:16

פתרון משוואות מעריכיות עם בסיס e
YouTube · 12:43

אי־שוויון מעריכי – הסבר ותרגול | שאלונים 472 ו־572
YouTube · 9:40

1. פתרו את המשוואה $e^x = 5$.
2. פתרו את המשוואה $e^{2x-1} = e^3$.
3. פתרו את המשוואה $3e^x - 12 = 0$.
4. פתרו את המשוואה $e^{x^2-3x} = e^4$.
5. פתרו את המשוואה $e^x \cdot e^{x+2} = e^6$. רמז: חוקי חזקות.
6. פתרו את המשוואה $2^{x+1} = 32$.
7. פתרו את המשוואה $9^x = 27$. רמז: כתבו את שני האגפים כחזקה של 3.
8. פתרו את המשוואה $e^{2x} = e^x$.
9. פתרו את המשוואה $(e^x - 1)(e^x - 4) = 0$.

10 פתרו את המשוואה $xe^x - 2e^x = 0$. רמז: הוציאו גורם משותף – האם e^x יכול להתאפס?

11 פתרו את המשוואה $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$ בעזרת משתנה עזר $t = e^x$.

12 פתרו את המשוואה $e^{2x} - e^x - 2 = 0$. שימו לב: אחד הפתרונות של משתנה העזר נפסל.

13 פתרו את המשוואה $e^x + 6e^{-x} = 5$. רמז: הכפילו את שני האגפים ב-e^x.

14 פתרו את המשוואה $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$.

15 פתרו את המשוואה $(x^2 - 4)e^x = 0$.

16 פתרו את אי-השוויון $e^x > 3$.

17 פתרו את אי-השוויון $2^{x-1} \leq 16$.

18 פתרו את אי-השוויון $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4$. שימו לב לבסיס הקטן מ-1!

19 מצאו את תחום ההגדרה של $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$.

20 מצאו את תחום ההגדרה של $f(x) = \frac{e^x}{x - 3}$.

21 מצאו את תחום ההגדרה של $f(x) = \frac{e^x}{e^x - e^2}$.

22 מצאו את תחום ההגדרה של $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$.

23 הסבירו מדוע הפונקציה $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$ מוגדרת לכל x ומדוע היא חיובית לכל x.

24 מצאו את האסימפטוטות המקבילות לצירים של $f(x) = e^x + 2$.

25 מצאו את האסימפטוטות המקבילות לצירים של $f(x) = 3 - e^{-x}$.

26 מצאו את האסימפטוטות המקבילות לצירים של $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

27 מצאו את האסימפטוטות המקבילות לצירים של $f(x)=\frac{1}{e^x-1}$.

28 מצאו את האסימפטוטות המקבילות לצירים של $f(x)=\frac{2e^x}{e^x-3}$.

29 גזרו: $f(x)=e^{3x}$.

30 גזרו: $f(x)=e^{x^2}$.

31 גזרו: $f(x)=xe^x$.

32 גזרו: $f(x)=\frac{e^x}{x}$.

33 גזרו: $f(x)=(e^x+1)^2$.

34 גזרו: $f(x)=e^{1-2x}$.

35 גזרו: $f(x)=x^2e^{-x}$.

36 גזרו: $f(x)=5e^x-2x$.

37 גזרו: $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$.

38 מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=e^x$ בנקודה שבה $x=0$.

39 מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=e^{2x}$ בנקודה שבה $x=0$. השוו לתרגיל הקודם.

40 לגרף הפונקציה $f(x)=e^x-2x$ יש משיק המקביל לציר x. מצאו את שיעורי נקודת ההשקה.

41 בנקודה שבה $x=1$ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=ae^x$ הוא $3e$. מצאו את a.

✔ תשובות סופיות – נושא 3.1

1	$x=\ln 5$
2	$x=2$
3	$x=\ln 4$
4	$x=-1\ ,x=4$
5	$x=2$
6	$x=4$
7	$x=\frac{3}{2}$
8	$x=0$
9	$x=0\ ,x=\ln 4$
10	$x=2$
11	$x=\ln 2\ ,x=\ln 3$
12	$x=\ln 2$
13	$x=\ln 2\ ,x=\ln 3$
14	$x=2$
15	$x=-2\ ,x=2$
16	$x>\ln 3$
17	$x\leq 5$
18	$x<-2$
19	$x\neq 0$
20	$x\neq 3$
21	$x\neq 2$
22	$x\geq 0$
23	$e^x>0$ לכל x, ולכן גם $\frac{1}{e^x}>0$ – הסכום חיובי ומוגדר תמיד

24 אנכית: אין אסימפטוטה אנכית ; אופקית: $y=2$ (כאשר $x\to-\infty$)

25 אנכית: אין אסימפטוטה אנכית ; אופקית: $y=3$ (כאשר $x\to\infty$)

26 אנכית: אין אסימפטוטה אנכית ; אופקית: $y=1$ (כאשר $x\to\infty$), $y=0$ (כאשר $x\to-\infty$)

27 אנכית: $x=0$; אופקית: $y=0$ (כאשר $x\to\infty$), $y=-1$ (כאשר $x\to-\infty$)

28 אנכית: $x=\ln 3$; אופקית: $y=2$ (כאשר $x\to\infty$), $y=0$ (כאשר $x\to-\infty$)

29 $f'(x)=3e^{3x}$

30 $f'(x)=2xe^{x^2}$

31 $f'(x)=(x+1)\,e^x$

32 $f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$

33 $f'(x)=2\left(e^x+1\right)e^x$

34 $f'(x)=-2e^{1-2x}$

35 $f'(x)=x\,(2-x)\,e^{-x}$

36 $f'(x)=5e^x-2$

37 $f'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

38 $y=x+1$

39 $y=2x+1$

40 $(\ln 2,\ 2-2\ln 2)$

41 $a=3$

3.2 חקירת פונקציות מעריכיות – מכפלה ומנה עם e

סדר החקירה: תחום הגדרה ← חיתוך עם הצירים ← אסימפטוטות ← נגזרת ונקודות קיצון ← תחומי עלייה וירידה ← סקיצה. בפונקציית מכפלה כמו $(x-2)e^x$ – הנגזרת לפי כלל המכפלה, ואז מוציאים e^x כגורם משותף.

צפו לפני שמתחילים:



פונקציה מעריכית – חקירה מלאה + טיפים ודגשים לבגרות
YouTube · 16:20



חקירת פונקציות – טרנספורמציה e בחזקת f(x)
YouTube · 7:56



כל סוגי הנגזרות – דף סיכום מלא | שאלונים 471 472 571 572
YouTube · 14:09

1 $f(x)=xe^x$. מצאו: (1) תחום הגדרה; (2) נקודות חיתוך עם הצירים; (3) נקודות קיצון וסוגן; (4) תחומי עלייה וירידה; וסרטטו סקיצה.

2 $f(x)=(x-2)e^x$. מצאו את נקודת הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגה, ואת נקודות החיתוך עם הצירים.

3 $f(x)=xe^{-x}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה. מהי האסימפטוטה האופקית כאשר $x\to\infty$?

4 $f(x)=x^2e^x$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן.

5 $f(x)=\frac{e^x}{x}$. מצאו את האסימפטוטה האנכית ואת נקודת הקיצון של $f(x)$.

6 $f(x)=\frac{e^x}{x-1}$. מצאו את תחום ההגדרה, את נקודת הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה.

7 $f(x)=(x^2-3)e^x$. מצאו את נקודות החיתוך עם ציר x ואת שיעורי ה-x של נקודות הקיצון.

8 $f(x)=e^x-x$. הראו שלפונקציה יש נקודת מינימום אחת, ומצאו אותה. הסיקו ש-$e^x>x$ לכל x.

9 $f(x)=e^{2x}-2e^x$. מצאו את נקודת הקיצון ואת נקודת החיתוך עם ציר x. מהי האסימפטוטה האופקית?

10 $f(x)=e^x+e^{-x}$. מצאו את נקודת הקיצון. הראו שהפונקציה זוגית.

11 $f(x)=(1-x)e^x$. מצאו את נקודת הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה.

12 $f(x)=xe^{2x}$. מצאו את נקודת הקיצון של $f(x)$. שימו לב לנגזרת של e^{2x}!

13 $f(x)=(x+1)e^{-x}$. מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודת הקיצון.

14 $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$. הראו שהפונקציה עולה לכל x, ומצאו את שתי האסימפטוטות האופקיות שלה.

15 $f(x)=\frac{4}{e^x+1}$. קבעו אם הפונקציה עולה או יורדת, ומצאו את נקודת החיתוך עם ציר y.

16 $f(x)=e^{-x^2}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת האסימפטוטה האופקית. האם הפונקציה זוגית?

17 $f(x)=\frac{x}{e^x}$. כתבו את הפונקציה בצורה אחרת, ומצאו את תחום העלייה שלה.

18 $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת נקודת הקיצון של $f(x)$.

19 $f(x)=(x^2+x-1)e^x$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן.

20 $f(x)=e^x-ex$. מצאו את נקודת הקיצון של $f(x)$.

21 $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$. מצאו את נקודת החיתוך עם הצירים ואת האסימפטוטות האופקיות. האם הפונקציה אי-זוגית?

22 $f(x)=(x-a)e^x$, ולפונקציה יש נקודת קיצון שבה $x=2$. מצאו את a ואת סוג הקיצון.

23 $f(x)=e^x-ax$, ולפונקציה יש נקודת קיצון שבה $x=\ln 2$. מצאו את a.

24 $f(x)=xe^{ax}$, ולפונקציה יש נקודת קיצון שבה $x=\frac{1}{2}$. מצאו את a.

25 $f(x)=ae^x+x$. מצאו את a אם הגרף עובר בנקודה $(0,3)$, וקבעו אם לפונקציה יש נקודות קיצון.

26 $f(x)=e^x(x^2+1)$. הראו ש-$f'(x)\geq 0$ לכל x. מה זה אומר על הפונקציה?

27 $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$. מצאו את נקודות הקיצון ואת האסימפטוטה האופקית (כאשר $x\to\infty$).

28 $f(x)=2e^x-e^{2x}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת נקודת החיתוך עם ציר x.

29 $f(x)=xe^x$. מצאו את משוואת המשיק לגרף בנקודת החיתוך שלו עם ציר x.

30 $f(x)=(x-1)e^x$. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=k$ עבור $k=-\frac{1}{2}$? היעזרו בנקודת הקיצון ובאסימפטוטה.

31 $f(x)=\frac{e^x}{x}$. לאילו ערכי k אין למשוואה $f(x)=k$ פתרון? (היעזרו בחקירה ובסקיצה.)

32 $f(x)=e^x+e^{-x}$ ו-$g(x)=2$. מצאו את נקודות החיתוך בין הגרפים. מה המשמעות הגרפית?

33 $f(x)=x^2e^x$. מהו ערך $f(x)$ הקטן ביותר? האם יש ערך גדול ביותר? נמקו.

✔ תשובות סופיות – נושא 3.2

1	כל x ; ציר x: $(0,0)$; ציר y: $(0,0)$; מינימום $(-1,-\frac{1}{e})$; עולה: $x>-1$; יורדת: $x<-1$; כאשר $x\to-\infty$ הגרף שואף ל-0
2	מינימום $(1,-e)$; ציר x: $(2,0)$; ציר y: $(0,-2)$
3	מקסימום $(1,\frac{1}{e})$; עולה: $x<1$; יורדת: $x>1$; $y=0$
4	מקסימום $(-2,\frac{4}{e^2})$, מינימום $(0,0)$
5	$x=0$; מינימום $(1,e)$
6	$x\neq1$; מינימום $(2,e^2)$; עולה: $x>2$; יורדת: $x<1$, $1<x<2$
7	ציר x: $(-\sqrt{3},0)$, $(\sqrt{3},0)$; ציר y: $(0,-3)$; מקסימום $(-3,\frac{6}{e^3})$, מינימום $(1,-2e)$
8	מינימום $(0,1)$; ערך המינימום $1>0$ ולכן $e^x-x>0$
9	מינימום $(0,-1)$; ציר x: $(\ln 2,0)$; ציר y: $(0,-1)$; $y=0$ (כאשר $x\to-\infty$)
10	מינימום $(0,2)$; $f(-x)=f(x)$
11	מקסימום $(0,1)$; עולה: $x<0$; יורדת: $x>0$
12	מינימום $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2e})$
13	ציר x: $(-1,0)$; ציר y: $(0,1)$; מקסימום $(0,1)$
14	עולה: כל x ; יורדת: אין ; $y=1$ (כאשר $x\to\infty$), $y=0$ (כאשר $x\to-\infty$)
15	עולה: אין ; יורדת: כל x ; $(0,2)$
16	מקסימום $(0,1)$; $y=0$; כן, זוגית
17	$f(x)=xe^{-x}$; עולה: $x<1$
18	$x\neq0$; מינימום $(2,\frac{e^2}{4})$
19	מקסימום $(-3,\frac{5}{e^3})$, מינימום $(0,-1)$
20	מינימום $(1,0)$
21	ציר x: $(0,0)$; ציר y: $(0,0)$; $y=1$ (כאשר $x\to\infty$), $y=-1$ (כאשר $x\to-\infty$) ; כן, $f(-x)=-f(x)$
22	$a=3$; מינימום $(2,-e^2)$

23	$a=2$
24	$a=-2$
25	$a=3$; אין קיצון ($f'(x)=3e^x+1>0$)
26	$f'(x)=e^x(x+1)^2\geq 0$; הפונקציה עולה לכל x (אין קיצון)
27	$(0,0)$ מינימום, $(2,\frac{4}{e^2})$ מקסימום ; $y=0$
28	$(0,1)$ מקסימום ; ציר x: $(\ln 2,0)$; ציר y: $(0,1)$
29	$y=x$
30	נקודת המינימום $(0,-1)$, אסימפטוטה $y=0$ כאשר $x\to-\infty$; שני פתרונות
31	$0\leq k<e$
32	$(0,2)$ בלבד – הישר משיק לגרף בנקודת המינימום
33	הערך הקטן ביותר 0 (ב-$x=0$) ; אין ערך גדול ביותר ($f(x)\to\infty$)

פרק 3 סיכומון סוף פרק – חקירת פונקציות מעריכיות (e)

תכונות e^x

- $e \approx 2.718$, ו-$e^x > 0$ לכל x – לכן e^x אף פעם לא מתאפס.
- $e^0 = 1$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$, $(e^a)^b = e^{ab}$.
- כאשר $x \to -\infty$: $e^x \to 0$; כאשר $x \to \infty$: $e^x \to \infty$.

משוואות מעריכיות

- בסיסים שווים: $e^a = e^b \Rightarrow a = b$.
- $e^x = k$ $(k > 0)$ $\Rightarrow x = \ln k$. אם $k \le 0$ – אין פתרון.
- משוואה עם e^{2x} ו-e^x: משתנה עזר $t = e^x$, ופוסלים $t \le 0$.
- $e^x \cdot g(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0$.

אי-שוויון מעריכי

- בסיס גדול מ-1 (כמו e, 2): כיוון אי-השוויון נשמר.
- בסיס בין 0 ל-1: כיוון אי-השוויון מתהפך.

נגזרות

- $(e^x)' = e^x$; $(e^{g(x)})' = g'(x)\,e^{g(x)}$.
- מכפלה: $(xe^x)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$.
- מנה: $\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$.

אסימפטוטות

- אופקית: בודקים $x \to \infty$ ו-$x \to -\infty$ בנפרד – לפעמים יש שתיים שונות.
- אנכית: היכן שהמכנה מתאפס, למשל $e^x - 3 = 0 \Rightarrow x = \ln 3$.

סדר חקירה

- תחום ← חיתוכים ← אסימפטוטות ← $f'(x) = 0$ ← טבלת סימנים ← קיצון ← סקיצה.
- בטבלת הסימנים: e^x תמיד חיובי – הסימן נקבע רק מהגורם האחר.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לכתוב $(e^{3x})' = e^{3x}$ – שוכחים להכפיל ב-3!
- לא לפסול $e^x = -2$ במשוואה עם משתנה עזר.
- לחשוב ש-$e^x e^2 = e^{2x}$ – נכון: e^{x+2}.
- לחפש אסימפטוטה אופקית רק בצד אחד.

💡 **הטיפ של אילון:** ראיתם e^x במכפלה? תוציאו אותו כגורם משותף מהנגזרת מיד – אחרי זה נשארת משוואה רגילה, ו-e^x רק \"מתבונן מהצד\" כי הוא תמיד חיובי.

פרק 4

חקירת פונקציות לוגריתמיות (ln)

חוקי לוגריתמים, משוואות, תחום הגדרה, נגזרת וחקירה מלאה

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

4.1 חוקי לוגריתמים, משוואות ln, תחום הגדרה ונגזרת — 40 תרגילים

4.2 חקירת פונקציות ln — 32 תרגילים

סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

פונקציה לוגריתמית (ln) – מיקוד לבגרות 4 ו־5 יחידות
YouTube · 4:57

פתרון משוואות ln בסיסיות
YouTube · 6:09

תרגול פונקציית ln – חקירה ואינטגרל
YouTube · 16:35

מפה לחומר של שאלון 472 – כל החומר לבגרות 4 יחידות
YouTube · 6:20

המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

מעבדת הטרנספורמציות
ראו איך הזזות ושיקופים משנים גרף – למשל איך $\ln x$ הופך ל-$\ln(x-2)$ או ל-$-\ln x$.

הפונקציה והנגזרת – יד ביד
ראו איך עלייה, ירידה וקיצון ב-$f(x)$ מתאימים לסימן של $f'(x)$.

4.1 חוקי לוגריתמים, משוואות ln, תחום הגדרה ונגזרת

$\ln x$ מוגדר רק עבור $x > 0$. חוקים: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$,
$\ln a^n = n \ln a$, $\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$. נגזרות: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$. בכל משוואה – בודקים את הפתרונות בתחום ההגדרה!

צפו לפני שמתחילים:

פונקציה לוגריתמית (ln) – מיקוד לבגרות 4 ו־5 יחידות
YouTube · 4:57

פתרון משוואות ln בסיסיות
YouTube · 6:09

תחום הגדרה ln
YouTube · 6:29

1. חשבו ללא מחשבון: $\ln e^3$, $e^{\ln 5}$, $\ln 1$.
2. כתבו כלוגריתם יחיד: $\ln 8 - \ln 2$.
3. כתבו כלוגריתם יחיד: $2\ln 3 + \ln 2$.
4. פשטו: $\ln(e^2 x) - \ln x$ (עבור $x > 0$).
5. פשטו: $\ln \sqrt{e} + \ln \frac{1}{e}$.
6. חשבו: $\log_2 8 + \log_3 \frac{1}{9}$.
7. כתבו את $\log_2 7$ בעזרת ln (מעבר בסיס).
8. פתרו את המשוואה $\ln x = 2$.
9. פתרו את המשוואה $\ln(2x - 1) = 0$.
10. פתרו את המשוואה $\ln(x + 3) = \ln(2x - 1)$.

11 פתרו את המשוואה $\ln x + \ln(x-3) = \ln 4$. בדקו את הפתרונות בתחום ההגדרה!

12 פתרו את המשוואה $2\ln x = \ln(x+6)$.

13 פתרו את המשוואה $\ln(x^2-5) = \ln 4$.

14 פתרו את המשוואה $\ln x = 1 + \ln 2$.

15 פתרו את המשוואה $\ln(x+1) - \ln x = \ln 3$.

16 פתרו את המשוואה $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$ בעזרת משתנה עזר.

17 פתרו את המשוואה $e^{2x} = 7$.

18 פתרו את המשוואה $\ln(x-2) = -1$.

19 פתרו את המשוואה $x\ln x = x$ (עבור $x > 0$).

20 פתרו את המשוואה $\log_2 x + \log_2(x+2) = 3$.

21 פתרו את המשוואה $\log_3(x-1) = 2$.

22 מצאו את תחום ההגדרה של $f(x) = \ln(x-2)$.

23 מצאו את תחום ההגדרה של $f(x) = \ln(4-x^2)$.

24 מצאו את תחום ההגדרה של $f(x) = \ln(x^2-1)$.

25 מצאו את תחום ההגדרה של $f(x) = \frac{1}{\ln x}$.

26 מצאו את תחום ההגדרה של $f(x) = \ln\frac{x-1}{x+2}$.

27 מצאו את תחום ההגדרה של $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

28 מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)=\frac{\ln x}{x-3}$.

29 גזרו: $f(x)=\ln(3x)$.

30 גזרו: $f(x)=\ln(x^2+1)$.

31 גזרו: $f(x)=x\ln x$.

32 גזרו: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

33 גזרו: $f(x)=(\ln x)^2$.

34 גזרו: $f(x)=\ln(2x-5)$.

35 גזרו: $f(x)=x^2\ln x$.

36 גזרו: $f(x)=\ln(e^x+1)$.

37 הסבירו מדוע $(\ln(3x))'=(\ln x)'$. רמז: חוקי לוגריתמים.

38 מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\ln x$ בנקודה שבה $x=1$.

39 מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\ln(2x)$ בנקודה שבה $x=\frac{1}{2}$.

40 מצאו את הנקודה על גרף הפונקציה $f(x)=\ln x$ שבה שיפוע המשיק הוא $\frac{1}{2}$.

✔ תשובות סופיות – נושא 4.1

1	$0\ ;\ 5\ ;\ 3$
2	$\ln 4$
3	$\ln 18$
4	2
5	$-\frac{1}{2}$
6	1
7	$\frac{\ln 7}{\ln 2}$
8	$x = e^2$
9	$x = 1$
10	$x = 4$
11	$x = 4$
12	$x = 3$
13	$x = 3\ ,x = -3$
14	$x = 2e$
15	$x = \frac{1}{2}$
16	$x = e^2\ ,x = e$
17	$x = \frac{\ln 7}{2}$
18	$x = 2 + \frac{1}{e}$
19	$x = e$
20	$x = 2$
21	$x = 10$
22	$x > 2$
23	$-2 < x < 2$

24	$x<-1$ או $x>1$
25	$0<x<1$ או $x>1$
26	$x<-2$ או $x>1$
27	$x\geq 1$
28	$0<x<3$ או $x>3$
29	$f'(x)=\frac{1}{x}$
30	$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$
31	$f'(x)=\ln x+1$
32	$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$
33	$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}$
34	$f'(x)=\frac{2}{2x-5}$
35	$f'(x)=x\left(2\ln x+1\right)$
36	$f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$
37	$\ln(3x)=\ln 3+\ln x$, והנגזרת של הקבוע $\ln 3$ היא 0 ; שתיהן $\frac{1}{x}$
38	$y=x-1$
39	$y=2x-1$
40	$(2,\ln 2)$

4.2 חקירת פונקציות ln

בחקירת פונקציית $\ln$ מתחילים תמיד מתחום ההגדרה – הוא קובע הכול: את האסימפטוטה האנכית, את הטבלה ואת הסקיצה. זכרו: $\ln x = 0$ כאשר $x = 1$, ו-$\ln x \to -\infty$ כאשר $x \to 0^+$.

צפו לפני שמתחילים:



תרגול פונקציית ln – חקירה ואינטגרל
YouTube · 16:35



חקירת פונקציות – טרנספורמציה ln(f(x))
YouTube · 7:44



פונקציה לוגריתמית (ln) – מיקוד לבגרות 4 ו־5 יחידות
YouTube · 4:57

1 $f(x) = x \ln x$. מצאו: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

2 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. מצאו את תחום ההגדרה, את האסימפטוטות ואת נקודת הקיצון.

3 $f(x) = x - \ln x$. מצאו את נקודת הקיצון של $f(x)$ והסיקו ש-$x - \ln x > 0$ לכל $x > 0$.

4 $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. מצאו את תחום ההגדרה ואת נקודת הקיצון. האם הפונקציה זוגית?

5 $f(x) = \ln x - x$. מצאו את נקודת הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה.

6 $f(x) = (\ln x)^2$. מצאו את נקודת הקיצון ואת נקודת החיתוך עם ציר x.

7 $f(x) = \ln(4 - x^2)$. מצאו את תחום ההגדרה, את האסימפטוטות האנכיות ואת נקודת הקיצון.

8 $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$. הראו שהפונקציה מוגדרת לכל x, ומצאו את נקודת הקיצון שלה.

9 $f(x)=\frac{x}{\ln x}$. מצאו את תחום ההגדרה, את האסימפטוטה האנכית ואת נקודת הקיצון.

10 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$. מצאו את נקודת הקיצון של $f(x)$.

11 $f(x)=2\ln x-x$. מצאו את נקודת הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה.

12 $f(x)=x^2\ln x$. מצאו את נקודות החיתוך עם ציר x ואת שיעור ה-x של נקודת הקיצון.

13 $f(x)=\ln x-1$. מצאו את נקודת החיתוך עם ציר x ואת תחום ההגדרה. האם יש לפונקציה קיצון?

14 $f(x)=\ln(x-1)+\ln(x+1)$. מצאו את תחום ההגדרה (שימו לב: שני התנאים!) ואת נקודת החיתוך עם ציר x.

15 $f(x)=\ln(x^2-1)$. מצאו את תחום ההגדרה ואת נקודות החיתוך עם ציר x. האם יש קיצון?

16 $f(x)=\frac{1}{\ln x}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטה האנכית. האם הפונקציה עולה או יורדת?

17 $f(x)=x-2\ln x$. מצאו את נקודת הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה.

18 $f(x)=\ln x-ax$, ולפונקציה יש נקודת קיצון שבה $x=2$. מצאו את a ואת סוג הקיצון.

19 $f(x)=x^2-a\ln x$, ולפונקציה יש נקודת קיצון שבה $x=1$. מצאו את a ואת שיעורי נקודת הקיצון.

20 $f(x)=ax\ln x$, והגרף עובר בנקודה $(e,2e)$. מצאו את a ואת נקודת הקיצון.

21 $f(x)=\ln x$ ו-$g(x)=x-1$. הראו שהישר $y=x-1$ משיק לגרף $f(x)$ בנקודה $(1,0)$.

22 $f(x)=x\ln x$. מצאו את משוואת המשיק לגרף בנקודת החיתוך שלו עם ציר x.

23 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. לאילו ערכי k יש למשוואה $f(x)=k$ שני פתרונות? היעזרו בחקירה.

24 $f(x)=x-\ln x$. מהו הערך הקטן ביותר של $f(x)$? האם יש לה ערך גדול ביותר?

25 $f(x)=\ln(e^x+1)$. הראו שהפונקציה עולה לכל x ומצאו את נקודת החיתוך שלה עם ציר y.

26 $f(x)=\ln(2x)-\ln x$. פשטו את הפונקציה ותארו את הגרף שלה.

27 $f(x)=\ln x$ ו- $g(x)=\ln(x-2)$. איזו טרנספורמציה מעבירה את $f(x)$ ל-$g(x)$? מה תחום ההגדרה ומה האסימפטוטה של $g(x)$?

28 $f(x)=-\ln x$. מצאו את נקודת החיתוך עם ציר x ואת תחומי העלייה והירידה. מה הקשר לגרף של $\ln x$?

29 $f(x)=\ln\frac{1}{x}$. הראו ש- $f(x)=-\ln x$.

30 $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$. מצאו את נקודת הקיצון של $f(x)$.

31 $f(x)=\ln x+x^2$. הראו ש- $f'(x)>0$ בכל תחום ההגדרה. כמה נקודות חיתוך יש לגרף עם ציר x?

32 $f(x)=\ln x$ ו- $g(x)=2-\ln x$. מצאו את נקודת החיתוך בין הגרפים.

✔ תשובות סופיות – נושא 4.2

1	$x>0$; ציר x: $(1,0)$; ציר y: אין ; $\left(\frac{1}{e},-\frac{1}{e}\right)$ מינימום ; עולה: $x>\frac{1}{e}$; יורדת: $0<x<\frac{1}{e}$
2	$x>0$; אנכית: $x=0$; אופקית: $y=0$ (כאשר $x\to\infty$) ; $\left(e,\frac{1}{e}\right)$ מקסימום
3	$(1,1)$ מינימום ; ערך המינימום $1>0$
4	כל x ; $(0,0)$ מינימום ; כן
5	$(1,-1)$ מקסימום ; עולה: $0<x<1$; יורדת: $x>1$
6	$(1,0)$ מינימום ; ציר x: $(1,0)$; ציר y: אין
7	$-2<x<2$; $x=-2$,$x=2$; $(0,\ln 4)$ מקסימום
8	$x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$; $(2,0)$ מינימום
9	$0<x<1$ או $x>1$; $x=1$; (e,e) מינימום
10	$(1,1)$ מינימום
11	$(2,-2+2\ln 2)$ מקסימום ; עולה: $0<x<2$; יורדת: $x>2$
12	ציר x: $(1,0)$; ציר y: אין ; $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},-\frac{1}{2e}\right)$ מינימום
13	ציר x: $(e,0)$; ציר y: אין ; $x>0$; אין קיצון – עולה תמיד
14	$(\sqrt{2},0)$; $x>1$
15	$x<-1$ או $x>1$; ציר x: $(-\sqrt{2},0)$,$(\sqrt{2},0)$; ציר y: אין ; אין קיצון
16	$0<x<1$ או $x>1$; $x=1$; עולה: אין ; יורדת: $0<x<1$,$x>1$
17	$(2,2-2\ln 2)$ מינימום ; עולה: $x>2$; יורדת: $0<x<2$
18	$a=\frac{1}{2}$; מקסימום
19	$a=2$; $(1,1)$ מינימום
20	$a=2$; $\left(\frac{1}{e},-\frac{2}{e}\right)$ מינימום
21	$f(1)=0$ ו-$f'(1)=1$ = שיפוע הישר
22	$y=x-1$

23 $0 < k < \frac{1}{e}$

24 1 (ב-$x = 1$) ; אין ערך גדול ביותר

25 עולה: כל x ; יורדת: אין ; $(0, \ln 2)$

26 $f(x) = \ln 2$ – קו אופקי, אבל רק עבור $x > 0$

27 הזזה ימינה ב-2 ; $x > 2$; $x = 2$

28 $(1, 0)$; יורדת לכל $x > 0$; שיקוף בציר x

29 $\ln \frac{1}{x} = \ln 1 - \ln x = -\ln x$

30 $(\sqrt{e}, \frac{1}{2e})$ מקסימום

31 $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x > 0$; נקודה אחת (פונקציה עולה שעוברת מ-$-\infty$ ל-∞)

32 $(e, 1)$

פרק 4 סיכומון סוף פרק – חקירת פונקציות לוגריתמיות ($\ln$)

מהו $\ln$?

- $\ln x$ הוא החזקה שצריך להעלות בה את e כדי לקבל x: $e^{\ln x} = x$.
- מוגדר רק עבור $x > 0$; $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$.
- $\ln x < 0$ עבור $0 < x < 1$, ו-$\ln x > 0$ עבור $x > 1$.

חוקי לוגריתמים

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
- $\ln a^n = n \ln a$; $\ln e^k = k$.
- מעבר בסיס: $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$.

פתרון משוואות

- $\ln A = \ln B \Rightarrow A = B$; $\ln A = k \Rightarrow A = e^k$.
- מצמצמים לפי החוקים ללוגריתם יחיד בכל אגף.
- **חובה:** בודקים כל פתרון בתחום ההגדרה של כל ה-$\ln$ במשוואה המקורית.

תחום הגדרה

- $\ln g(x)$: דורשים $g(x) > 0$ (אי-שוויון!).
- $\frac{1}{\ln x}$: גם $x > 0$ וגם $\ln x \neq 0$, כלומר $x \neq 1$.
- $\sqrt{\ln x}$: $\ln x \geq 0$, כלומר $x \geq 1$.

נגזרות

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$.
- $(x \ln x)' = \ln x + 1$; $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2}$.
- $(\ln(kx))' = \frac{1}{x}$ – הקבוע k "נעלם".

חקירה

- תחום ← אסימפטוטה אנכית בקצה התחום ← חיתוכים ← $f'(x) = 0$ ← טבלה ← סקיצה.
- בטבלת הסימנים מסמנים רק את התחום שבו הפונקציה מוגדרת.
- מכאן – $x \to 0^+$ כאשר $\ln x \to -\infty$ האסימפטוטה $x = 0$.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לכתוב $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$ – זה לא חוק!
- לשכוח לפסול פתרון שלא בתחום ההגדרה.
- לכתוב $(\ln(x^2+1))' = \frac{1}{x^2+1}$ – חסרה הנגזרת הפנימית $2x$.
- להתחיל טבלת סימנים מ-$-\infty$ כשהפונקציה מוגדרת רק ל-$x > 0$.

💡 **הטיפ של אילון:** במשוואות $\ln$ – הדבר הראשון שאני כותב בדף הוא תחום ההגדרה, עוד לפני שאני פותר. ככה בסוף אני רק בודק כל פתרון מול השורה הזו, ולא מפסיד נקודות על פתרון מיותר.

פרק 5

אינטגרלים

פונקציה קדומה של e^x ושל $\frac{1}{x}$, אינטגרל מסוים וחישובי שטחים

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

5.1	אינטגרלים של	e^x	ושל פונקציות שנותנות	$\ln$, וחישובי שטחים

37 תרגילים

סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



כל טכניקות האינטגרל – הסבר וסיכום מלא לבגרות

YouTube · 10:04



האינטגרל הלא מסוים – פונקציית e

YouTube · 1:41



האינטגרל הלא מסוים – פונקציית ln

YouTube · 5:41



אינטגרל – שטח כלוא בין פונקציה לציר האיקס

YouTube · 6:18

המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף



שטח מתחת לגרף

הזיזו את גבולות האינטגרל והגדילו את מספר המלבנים – וראו איך הסכום מתקרב לשטח.

5.1 אינטגרלים של e^x ושל פונקציות שנותנות $\ln$, וחישובי שטחים

$\int e^x dx = e^x + C$; $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$; $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ (עבור $x > 0$) ; $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + C$; $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln g(x) + C$ (כאשר $g(x) > 0$). שטח: אינטגרל של (פונקציה עליונה פחות תחתונה) בין נקודות החיתוך.

צפו לפני שמתחילים:

האינטגרל הלא מסוים – פונקציית e
YouTube · 1:41

האינטגרל הלא מסוים – פונקציית ln, טכניקה והיגיון
YouTube · 5:41

אינטגרלים עם e – כל הטכניקות וזיהוי נגזרת פנימית
YouTube · 4:01

אינטגרלים – שטח כלוא בין פונקציות ושטח מפוצל
YouTube · 5:32

1. חשבו: $\int e^{3x}\,dx$.
2. חשבו: $\int (e^x + 2x)\,dx$.
3. חשבו: $\int e^{2x-1}\,dx$.
4. חשבו: $\int e^{-x}\,dx$.
5. חשבו: $\int 4e^{\frac{x}{2}}\,dx$.
6. חשבו: $\int \frac{1}{x}\,dx$. (עבור $x > 0$)
7. חשבו: $\int \frac{3}{x}\,dx$.
8. חשבו: $\int \frac{1}{2x+1}\,dx$.
9. חשבו: $\int \frac{x+1}{x}\,dx$.

10 חשבו: $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$.

11 חשבו: $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$.

12 חשבו: $\int \left(e^x+\frac{1}{x}\right)\,dx$.

13 חשבו: $\int \frac{e^{2x}+e^x}{e^x}\,dx$.

14 מצאו את הפונקציה $F(x)$ שמקיימת $F'(x)=e^x$ ו-$F(0)=3$.

15 מצאו את הפונקציה $F(x)$ שמקיימת $F'(x)=\frac{1}{x}$ ו-$F(1)=2$ (עבור $x>0$).

16 הנגזרת של $f(x)$ היא $f'(x)=2e^{2x}$, וגרף $f(x)$ עובר בנקודה $(0,5)$. מצאו את $f(x)$.

17 $F'(x)=\frac{1}{x-1}$ עבור $x>1$, ו-$F(2)=0$. מצאו את $F(x)$ ואת $F(e+1)$.

18 חשבו: $\int_0^1 e^x\,dx$.

19 חשבו: $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$.

20 חשבו: $\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx$.

21 חשבו: $\int_1^{e^2} \frac{2}{x}\,dx$.

22 חשבו: $\int_0^{\ln 3} e^x\,dx$.

23 חשבו: $\int_1^3 \frac{dx}{x}$.

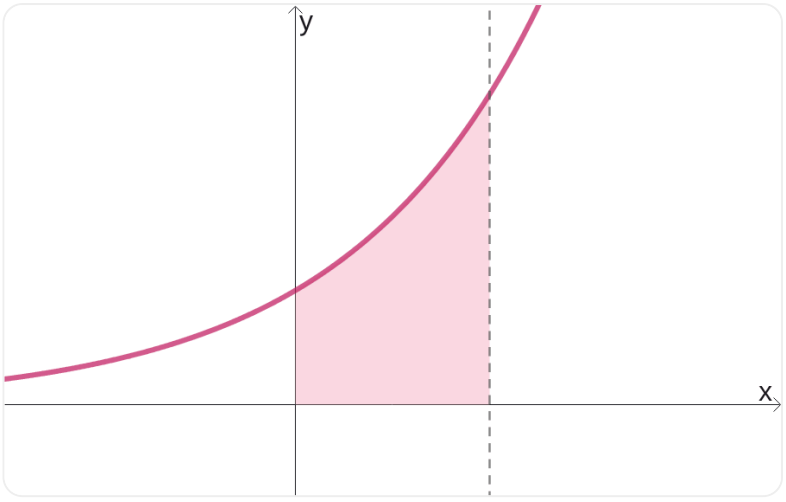
24 חשבו: $\int_0^1 e^{-x}\,dx$.

25 מצאו את $a>0$ שעבורו $\int_0^a e^x\,dx=3$.

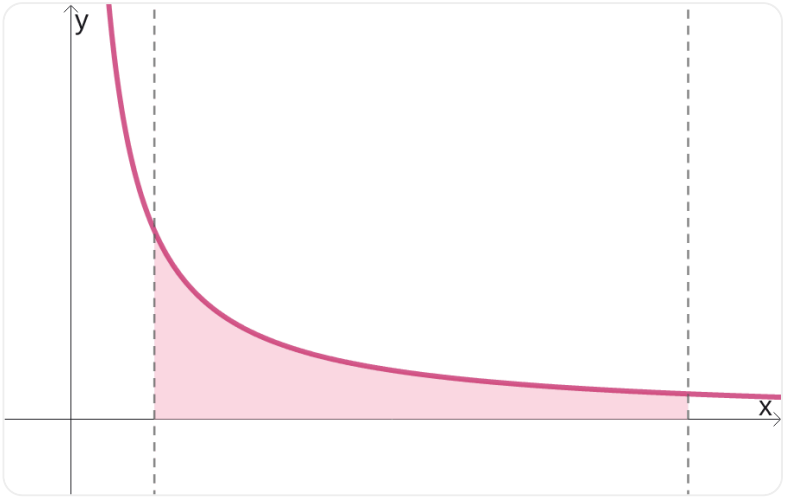
26 מצאו את $a>1$ שעבורו $\int_1^a \frac{dx}{x}=2$.

27 מצאו את $a > 0$ שעבורו $\int_0^a 2e^{2x}\,dx = 8$.

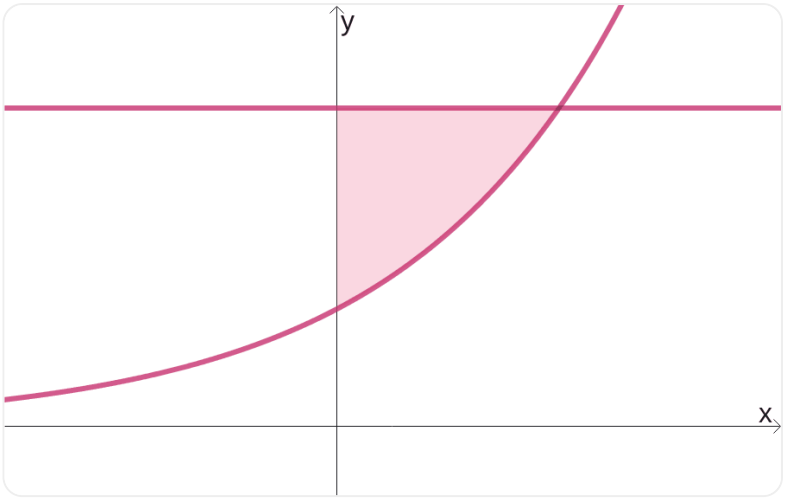
28 בציור: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x) = e^x$, ציר x, ציר y והישר $x = 1$.
חשבו את השטח.



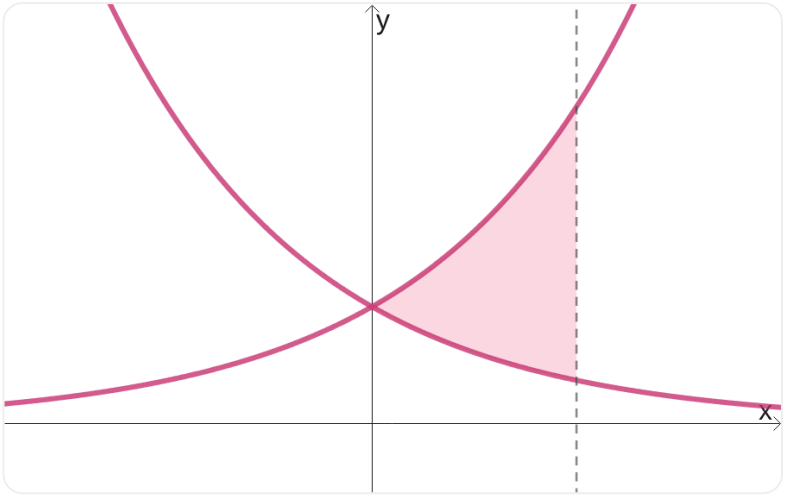
29 בציור: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$, ציר x והישרים $x = 1$ ו- $x = e^2$. חשבו את השטח.



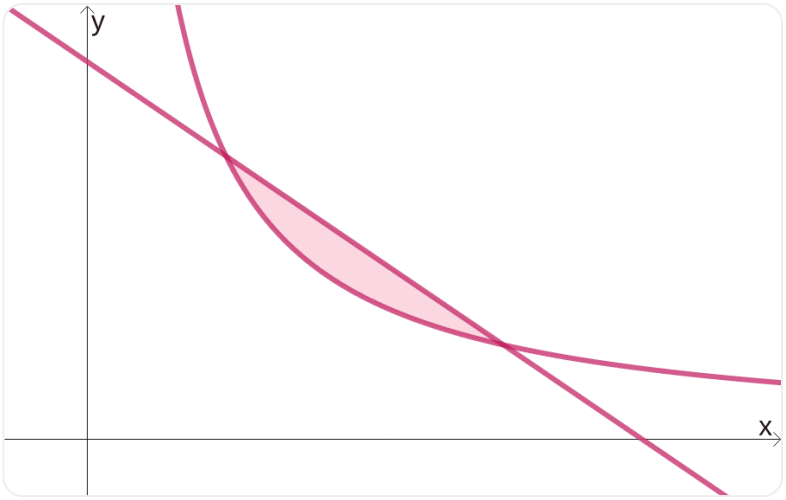
30 בציור: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)=e^x$, הישר $y=e$ וציר y. חשבו את השטח.



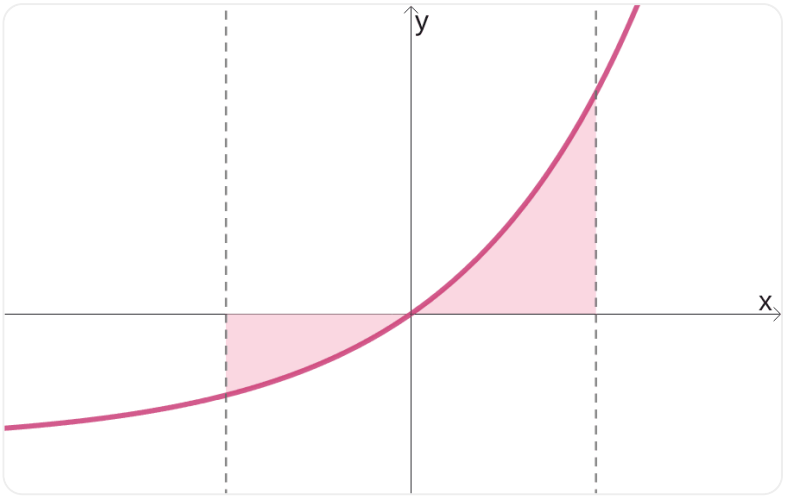
31 בציור: השטח המוגבל על ידי הגרפים של $f(x)=e^x$ ו- $g(x)=e^{-x}$ והישר $x=1$. חשבו את השטח.



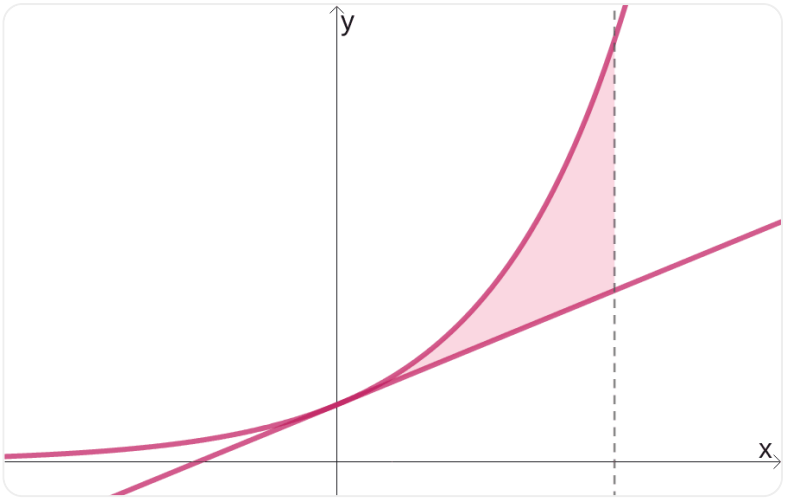
32 בציור: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)=\frac{3}{x}$ והישר $y=4-x$. מצאו את נקודות החיתוך וחשבו את השטח.



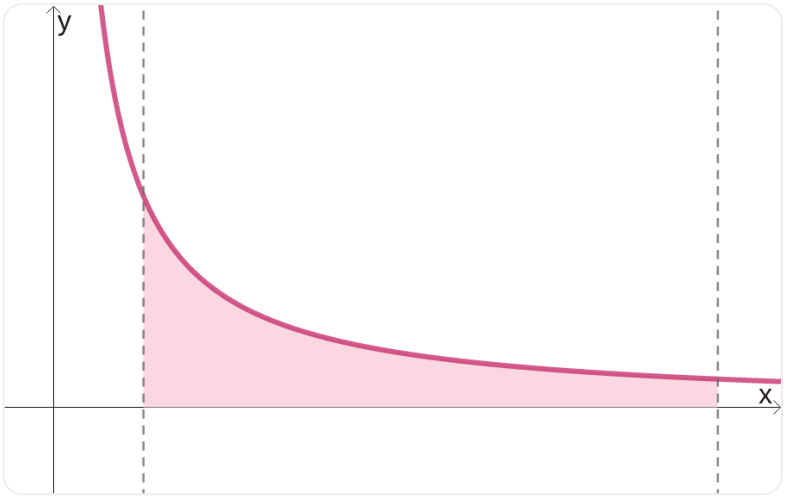
33 בציור: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)=e^x-1$, ציר x והישרים $x=-1$ ו-$x=1$. שימו לב – חלק מהשטח מתחת לציר!



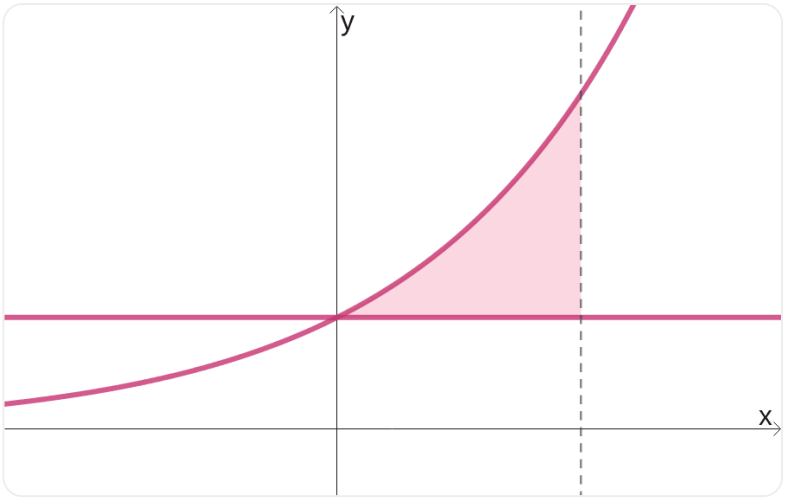
34 בציור: גרף הפונקציה $f(x)=e^{2x}$ והמשיק לו בנקודה $x=0$. מצאו את משוואת המשיק, וחשבו את השטח המוגבל על ידי הגרף, המשיק והישר $x=1$.



35 בציור: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$, ציר x והישרים $x=e$ ו- $x=e^3$. חשבו את השטח.



36 בציור: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)=e^x$, הישר $y=1$ והישר $x=\ln 3$. חשבו את השטח.



37 השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)=e^x$, ציר x, ציר y והישר $x=k$ (כאשר $k>0$) שווה ל-6. מצאו את k.

✔ תשובות סופיות – נושא 5.1

1	$\frac{1}{3}e^{3x}+C$
2	$e^{x}+x^{2}+C$
3	$\frac{1}{2}e^{2x-1}+C$
4	$-e^{-x}+C$
5	$8e^{\frac{x}{2}}+C$
6	$\ln x+C$
7	$3\ln x+C$
8	$\frac{1}{2}\ln(2x+1)+C$
9	$x+\ln x+C$
10	$\ln(x^{2}+1)+C$
11	$\ln(e^{x}+1)+C$
12	$e^{x}+\ln x+C$
13	$e^{x}+x+C$
14	$F(x)=e^{x}+2$
15	$F(x)=\ln x+2$
16	$f(x)=e^{2x}+4$
17	$F(e+1)=1\ ;\ F(x)=\ln(x-1)$
18	$e-1$
19	1
20	$\frac{3}{2}$
21	4
22	2
23	$\ln 3$

24 $1-\frac{1}{e}$

25 $a=\ln 4$

26 $a=e^2$

27 $a=\ln 3$

28 $e-1$

29 2

30 1

31 $e+\frac{1}{e}-2$

32 נקודות החיתוך $(1,3)$, $(3,1)$; השטח $4-3\ln 3$

33 $e+\frac{1}{e}-2$

34 המשיק $y=2x+1$; השטח $\frac{e^2-5}{2}$

35 2

36 $2-\ln 3$

37 $k=\ln 7$

פרק 5 סיכומון סוף פרק – אינטגרלים

אינטגרלים של e

- $\int e^x dx = e^x + C$.
- $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$ – מחלקים במקדם של x.
- $\int k\, e^x dx = k\, e^x + C$.

אינטגרלים שנותנים $\ln$

- $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ (עבור $x > 0$).
- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + C$.
- $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln g(x) + C$ – המונה הוא הנגזרת של המכנה.

לפני שמבצעים אינטגרל

- מפצלים שבר: $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$.
- מחלקים: $\frac{e^{2x}+e^x}{e^x} = e^x + 1$.
- בודקים תמיד: גוזרים את התשובה – וחוזרים לפונקציה.

פונקציה קדומה עם תנאי

- מוצאים $F(x) + C$ ואז מציבים את הנקודה הנתונה כדי למצוא את C.

אינטגרל מסוים

- $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.
- $e^{\ln k} = k$; $\ln e^k = k$; $\ln 1 = 0$ – מקצרים את החישוב.

חישובי שטחים

- שטח בין גרף לציר x: אם הגרף מתחת לציר – לוקחים ערך מוחלט.
- שטח מפוצל: מחלקים בנקודת החיתוך עם הציר ומחשבים כל חלק בנפרד.
- שטח בין שני גרפים: $\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$, $f(x)$ העליונה.
- קודם מוצאים את נקודות החיתוך – הן גבולות האינטגרל.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- $\int e^{3x} dx = 3e^{3x}$ – טעות! מחלקים ב-3: $\frac{1}{3} e^{3x}$.
- לשכוח את $+C$ באינטגרל לא מסוים.
- לחשב שטח מפוצל באינטגרל אחד – החלקים מתקזזים.
- $\int \frac{1}{2x+1} dx = \ln(2x+1)$ – חסר המקדם $\frac{1}{2}$.

💡 **הטיפ של אילון:** בכל שאלת שטח – לפני שכותבים אינטגרל, שרטטו (גם סקיצה גסה) וסמנו מי למעלה ומי למטה. רוב הטעויות בשטחים הן לא בחישוב, אלא בהחלפה בין הפונקציה העליונה לתחתונה.

פרק 6

גדילה ודעיכה

תהליכים מעריכיים: אחוזים, מקדם גדילה, זמן מחצית חיים ושימוש בלוגריתם

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

6.1 שאלות גדילה ודעיכה

35 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



גדילה ודעיכה במתמטיקה – הסבר מלא + פתרון שאלות בגרות

YouTube · 25:26



מפה לחומר של שאלון 472 – כל החומר לבגרות 4 יחידות

YouTube · 6:20



גדילה ודעיכה – תרגול והסברים

YouTube · 6:20

6.1 שאלות גדילה ודעיכה

הנוסחה: $M(t) = M_0 \cdot q^t$. M_0 – הכמות ההתחלתית; $q > 1$ – גדילה, $0 < q < 1$ – דעיכה; גדילה ב-$p\%$: $q = 1 + \frac{p}{100}$, דעיכה ב-$p\%$: $q = 1 - \frac{p}{100}$. **חשוב:** t נמדד ביחידת הזמן של התהליך עצמו – אם הכמות מוכפלת כל 3 שעות, כל עלייה של 1 ב-t היא 3 שעות. תהליך עם קצב אחר – מקבל משתנה חדש (למשל k).

צפו לפני שמתחילים:

גדילה ודעיכה במתמטיקה – הסבר מלא + פתרון שאלות בגרות | 4 ו-5 יחידות
YouTube · 25:26

גדילה ודעיכה – תרגול והסברים
YouTube · 6:20

1. כמות של חיידקים מוכפלת פי 2 כל 3 שעות. בהתחלה יש 500 חיידקים. נסמן ב-t את מספר פרקי הזמן של 3 שעות שעברו. כתבו ביטוי לכמות החיידקים $M(t)$, ומצאו כמה חיידקים יהיו אחרי 12 שעות.

2. חומר רדיואקטיבי מאבד מחצית ממסתו כל 5 שנים. בהתחלה יש 640 גרם. כאשר t הוא מספר פרקי הזמן של 5 שנים, כתבו את $M(t)$ ומצאו את המסה אחרי 20 שנה.

3. ערך של מכונית יורד ב-10% בכל שנה. מחירה ההתחלתי 120,000 ש"ח. מהו מקדם הדעיכה q, ומה יהיה ערך המכונית אחרי 3 שנים?

4. סכום של 10,000 ש"ח הופקד בתוכנית שמוסיפה 5% בכל שנה. כמה כסף יהיה בתוכנית אחרי 2 שנים?

5. אוכלוסייה גדלה ב-20% בכל עשור. כאשר t הוא מספר העשורים, כתבו את $M(t)$ אם בהתחלה יש 50,000 תושבים, ומצאו את מספר התושבים אחרי 30 שנה.

6. כמות של חומר גדלה מ-200 גרם ל-450 גרם בתוך 2 שעות. הגדילה היא בכל שעה באותו אחוז. מצאו את מקדם הגדילה לשעה ואת אחוז הגדילה.

7. מחיר של מוצר ירד מ-800 ש"ח ל-512 ש"ח בתוך 2 שנים, באחוז קבוע בכל שנה. בכמה אחוזים ירד המחיר בכל שנה?

8 מספר הצופים בסרטון גדל פי 3 בכל יום. ביום הראשון ($t=0$) היו 200 צופים. אחרי כמה ימים יהיו 16,200 צופים?

9 כמות של תרופה בדם יורדת ב-25% בכל שעה. כעבור 2 שעות נשארו 36 מ"ג. כמה מ"ג היו בהתחלה?

10 כמות חיידקים גדלה באחוז קבוע בכל יום. אחרי 2 ימים היו 360 חיידקים ואחרי 4 ימים היו 1440 חיידקים. מצאו את מקדם הגדילה ואת הכמות ההתחלתית.

11 כמות של 1000 גרם דועכת לפי $M(t)=1000\cdot 0.8^t$ (t בשנים). אחרי כמה שנים תישאר כמות של 512 גרם?

12 השקעה של 5000 ש"ח גדלה ב-10% בכל שנה. אחרי כמה שנים לפחות היא תעלה על 8000 ש"ח? (היעזרו בלוגריתם.)

13 כמות חיידקים מוכפלת כל 4 שעות (t = פרקי זמן של 4 שעות). אחרי כמה שעות הכמות תגדל פי 32?

14 חומר מאבד $\frac{1}{3}$ ממסתו בכל יום. אחרי כמה ימים יישאר פחות מ-10% מהמסה ההתחלתית?

15 זמן מחצית החיים של חומר הוא 8 שעות. כאשר t הוא מספר פרקי הזמן של 8 שעות, מה החלק מהחומר שנשאר אחרי יממה (24 שעות)?

16 אוכלוסייה של 2000 חרקים גדלה לפי $M(t)=2000\cdot 1.25^t$ (t בשבועות). אחרי כמה שבועות האוכלוסייה תגיע ל-3125?

17 כמות גדלה ב-10% בכל שנה. בכמה אחוזים היא גדלה בסך הכול במשך 2 שנים? הסבירו מדוע התשובה איננה 20%.

18 מחיר עלה ב-20% ואחר כך ירד ב-20%. האם חזר למחירו ההתחלתי? מה השינוי הכולל באחוזים?

19 כמות דועכת ב-50% בכל שעה. איזה אחוז מהכמות ההתחלתית נשאר אחרי 3 שעות?

20 כמות א' גדלה לפי $A(t)=100\cdot 2^t$ וכמות ב' דועכת לפי $B(t)=6400\cdot 0.5^t$ (t בימים). אחרי כמה ימים הכמויות יהיו שוות?

21 בנק א' מוסיף 4% בשנה ובנק ב' מוסיף 2% בכל חצי שנה. בכל בנק הופקדו 1000 ש"ח. איזה בנק משתלם יותר אחרי שנה? (בבנק ב' – נסמן ב-k את מספר חצאי השנה.)

22 כמות חיידקים א' מוכפלת כל 2 שעות (t = פרקי זמן של 2 שעות), וכמות חיידקים ב' גדלה פי 4 כל 6 שעות (נסמן ב-k את מספר פרקי הזמן של 6 שעות). בהתחלה בשתיהן 100 חיידקים. איזו כמות גדולה יותר אחרי 6 שעות?

23 בטבלה שלפניכם כמות של חומר לפי הזמן t (בשעות):

t	$M(t)$
0	2400
1	1800
2	1350

הראו שמדובר בדעיכה מעריכית, ומצאו את $M(t)$.

24 כמות גדלה בכל שעה פי q. ידוע ש-$M(1)=60$ ו-$M(3)=135$. מצאו את q ואת $M(0)$.

25 כמות דועכת לפי $M(t)=M_0\cdot q^t$. אחרי 3 שעות נשארה שמינית מהכמות. מצאו את q.

26 $M(t)=3000\cdot 0.9^t$. חשבו את $M(1)-M(0)$ ואת $M(2)-M(1)$. מדוע הירידה השנייה קטנה יותר?

27 כמות של 800 גרם גדלה ב-25% בכל שבוע. ידוע שאחרי t שבועות הכמות היא 1250 גרם. מצאו את t.

28 כמות של חומר משתנה לפי $M(t)=200e^{0.1t}$ (t בשעות). מהי הכמות ההתחלתית, ואחרי כמה שעות הכמות תגיע ל-$200e$?

29 $M(t)=500e^{-0.2t}$ (t בימים). אחרי כמה ימים תישאר מחצית מהכמות? תנו תשובה מדויקת ומקורבת.

30 $M(t)=1000e^{kt}$, ואחרי 2 שנים הכמות היא $1000e^{0.6}$. מצאו את k – האם זו גדילה או דעיכה?

31 $M(t) = M_0 e^{-0.5t}$. הוכיחו שבכל יחידת זמן הכמות מוכפלת באותו מספר, ומצאו אותו.

32 בבריכה יש אצות שמכסות שטח שמוכפל כל יום. אחרי 20 ימים הבריכה מכוסה כולה. אחרי כמה ימים הייתה מכוסה רבע ממנה?

33 ברכישת מכונה במחיר $50{,}000$ ש"ח ערכה יורד ב-15% בכל שנה. בעל המכונה מתכנן למכור אותה כשערכה יירד מתחת ל-$25{,}000$ ש"ח. אחרי כמה שנים שלמות ימכור?

34 כמות של חומר א' היא $A(t) = 1600 \cdot 0.5^t$ וכמות של חומר ב' היא $B(t) = 100 \cdot 2^t$ (t בשעות). מתי הכמויות יהיו שוות, ומה הכמות אז?

35 כמות גדלה ב-$p\%$ בכל שנה, ובתוך 2 שנים גדלה מ-2500 ל-3025. מצאו את p.

✔ תשובות סופיות – נושא 6.1

1. $M(t)=500\cdot 2^t$; אחרי 12 שעות $t=4$: 8000 חיידקים
2. $M(t)=640\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t$; $t=4$: 40 גרם
3. $q=0.9$; 87,480 ש"ח
4. 11,025 ש"ח
5. $M(t)=50{,}000\cdot 1.2^t$; 86,400 תושבים
6. $q=1.5$; 50% בשעה
7. 20% ($q=0.8$)
8. אחרי 4 ימים ($3^4=81$)
9. 64 מ"ג
10. $q=2$; 90 חיידקים
11. $t=3$ שנים
12. $t=\frac{\ln 1.6}{\ln 1.1}\approx 4.93$; לכן אחרי 5 שנים
13. $2^t=32\Rightarrow t=5$; 20 שעות
14. $\left(\frac{2}{3}\right)^t<0.1\Rightarrow t>5.68$; אחרי 6 ימים
15. $t=3$; $\frac{1}{8}$ מהכמות
16. $t=2$ שבועות
17. 21% ($1.1^2=1.21$) – הגידול השני מחושב גם על הגידול הראשון
18. לא ; ירידה של 4% ($1.2\cdot 0.8=0.96$)
19. 12.5%
20. $4^t=64\Rightarrow t=3$ ימים
21. בנק א': 1040 ; בנק ב' ($k=2$): 1040.4 – בנק ב' משתלם מעט יותר
22. א': $t=3$, 800 ; ב': $k=1$, 400 – כמות א' גדולה יותר
23. היחס קבוע 0.75 ; $M(t)=2400\cdot 0.75^t$

24	$M(0)=40$; $q=1.5$
25	$q=\frac{1}{2}$
26	-300 ; -270 ; הירידה היא 10% מכמות שכבר קטנה
27	$t=2$ שבועות
28	200 ; אחרי 10 שעות
29	$t=5\ln 2\approx 3.47$ ימים
30	$k=0.3$; גדילה
31	$\frac{M(t+1)}{M(t)}=e^{-0.5}\approx 0.607$
32	אחרי 18 ימים
33	$0.85^t<0.5\Rightarrow t>4.27$; אחרי 5 שנים
34	400 ; $t=2$
35	$p=10$

פרק 6 סיכומון סוף פרק – גדילה ודעיכה

הנוסחה

- $M(t) = M_0 \cdot q^t$; $M_0 = M(0)$ – הכמות בהתחלה.
- $q > 1$ – גדילה ; $0 < q < 1$ – דעיכה.

מאחוזים למקדם

- גדילה ב-$p\%$: $q = 1 + \frac{p}{100}$ (למשל $5\% \Rightarrow 1.05$).
- דעיכה ב-$p\%$: $q = 1 - \frac{p}{100}$ (למשל $20\% \Rightarrow 0.8$).
- "מוכפל" – $q = 2$; "מחצית" – $q = \frac{1}{2}$.

מהו t?

- t = מספר פרקי הזמן של התהליך עצמו.
- מוכפל כל 3 שעות: אחרי 12 שעות $t = 4$.
- שני תהליכים בקצבים שונים – משתנה נוסף (למשל k).

מציאת q ו-M_0

- משתי מדידות: $\frac{M(4)}{M(2)} = q^2$.
- אחר כך מציבים באחת המדידות כדי למצוא את M_0.

מציאת הזמן

- $q^t = c \Rightarrow t = \frac{\ln c}{\ln q}$.
- "אחרי כמה שנים לפחות" – מעגלים למספר השלם הבא.

אחוזים מצטברים

- 10% במשך 2 שנים זה 21%, לא 20%.
- עלייה ב-20% ואחריה ירידה ב-20%: $1.2 \cdot 0.8 = 0.96$.

עם e

- $M(t) = M_0 e^{kt}$: $k > 0$ גדילה, $k < 0$ דעיכה.
- $e^{kt} = c \Rightarrow t = \frac{\ln c}{k}$.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- להציב $t = 12$ כשהתהליך מוכפל כל 3 שעות – נכון $t = 4$.
- לכתוב $q = 0.2$ לירידה של 20% – נכון 0.8.
- לחבר אחוזים של שנים שונות.
- לעגל למטה בשאלת "אחרי כמה שנים לפחות".

💡 **הטיפ של אילון:** לפני שאתם כותבים נוסחה – כתבו במילים: "כל ___ הכמות מוכפלת פי ___". מה שבחלל הראשון זו יחידת הזמן של t, ומה שבשני זה q.

פרק 7

סדרה חשבונית

איבר כללי, הוכחות, איברים חיוביים ושליליים, נוסחת הסכום ובעיות מילוליות

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

7.1 **האיבר הכללי, הוכחה שסדרה חשבונית ואיברים חיוביים ושליליים** — 35 תרגילים

7.2 **סכום סדרה חשבונית – סכום לפי מיקומים, זוגיים ואי-זוגיים וטרנספורמציות** — 35 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

קורס סדרה חשבונית – מבוא
YouTube · 8:16

סדרה חשבונית – האיבר הכללי
YouTube · 6:47

סדרה חשבונית – נוסחת הסכום
YouTube · 4:44

כל מה שצריך לדעת על סדרות (4–5 יח"ל)
YouTube · 5:09

🧩 המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

מעבדת הסדרות
בחרו איבר ראשון והפרש וראו את האיברים כעמודות ואת הסכום מצטבר.

7.1 האיבר הכללי, הוכחה שסדרה חשבונית ואיברים חיוביים ושליליים

סדרה חשבונית: $a_{n+1}-a_n=d$ קבוע. האיבר הכללי: $a_n=a_1+(n-1)d$. כדי להוכיח שסדרה חשבונית – מראים ש-$a_{n+1}-a_n$ אינו תלוי ב-n. שלושה איברים עוקבים a,b,c מקיימים $2b=a+c$.

צפו לפני שמתחילים:

קורס סדרה חשבונית – מבוא
YouTube · 8:16

סדרה חשבונית – האיבר הכללי
YouTube · 6:47

סדרה חשבונית – איברים חיוביים ושליליים
YouTube · 5:31

סדרה חשבונית – התחלקות מספרים
YouTube · 2:52

1. בסדרה חשבונית $a_1=4$ וההפרש $d=6$. מצאו את a_{12}.
2. בסדרה חשבונית $a_1=31$ ו-$d=-4$. מצאו את a_9.
3. כתבו את האיבר הכללי a_n של הסדרה $2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \ldots$
4. כתבו את האיבר הכללי של הסדרה $40,\ 34,\ 28,\ \ldots$
5. כתבו את האיבר הכללי של הסדרה $1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ \ldots$
6. בסדרה $7,\ 12,\ 17,\ \ldots$ – איזה מקום תופס המספר 122?
7. האם 200 הוא איבר בסדרה $5,\ 13,\ 21,\ \ldots$? נמקו.
8. האם -41 הוא איבר בסדרה $19,\ 15,\ 11,\ \ldots$? אם כן, מהו מקומו?
9. בסדרה חשבונית $a_3=10$ ו-$a_8=30$. מצאו את a_1 ואת d.

10 בסדרה חשבונית $a_5 = -2$ ו-$a_{11} = -20$. מצאו את האיבר הכללי.

11 בסדרה חשבונית $a_2 + a_6 = 26$ ו-$a_4 + a_9 = 41$. מצאו את a_1 ואת d.

12 בסדרה חשבונית האיבר השמיני גדול פי 3 מהאיבר השלישי, ו-$a_4 = 14$. מצאו את a_1 ואת d.

13 הוכיחו שהסדרה $a_n = 5n + 2$ היא סדרה חשבונית ומצאו את ההפרש.

14 הוכיחו שהסדרה $a_n = 12 - \frac{3}{2}n$ היא סדרה חשבונית. האם היא עולה או יורדת?

15 הראו שהסדרה $a_n = n^2 - n$ אינה סדרה חשבונית.

16 נתונה הסדרה $a_n = \frac{4n-3}{2}$. הוכיחו שהיא חשבונית, ומצאו את a_1 ואת d.

17 המספרים $3x,\ x+4,\ x-2$ הם שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית. מצאו את x ואת שלושת האיברים.

18 המספרים $12,\ x^2,\ 2x$ הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית. מצאו את ערכי x.

19 הכניסו 3 מספרים בין 8 לבין 28 כך שיתקבלו 5 איברים של סדרה חשבונית.

20 הכניסו 6 מספרים בין 40 לבין 5 כך שתתקבל סדרה חשבונית.

21 כמה איברים יש בסדרה הסופית $9,\ 13,\ 17,\ \ldots,\ 97$?

22 כמה מספרים דו-ספרתיים מתחלקים ב-6?

23 כמה מספרים תלת-ספרתיים מתחלקים ב-9?

24 בסדרה $60,\ 57,\ 54,\ \ldots$ – מהו האיבר השלילי הראשון ומה מקומו?

25 בסדרה $-50,\ -46,\ -42,\ \ldots$ – מהו האיבר החיובי הראשון?

26 כמה איברים חיוביים יש בסדרה $a_n = 80 - 7n$?

27 בסדרה $a_n = 3n - 40$ – כמה איברים שליליים יש בסדרה?

28 בסדרה חשבונית $a_1 = 100$ ו-$d = -6$. החל מאיזה מקום האיברים קטנים מ-10?

29 בסדרה חשבונית $a_{10} = 0$. הראו ש-$a_7 = -a_{13}$.

30 בסדרה חשבונית האיבר ה-15 הוא 50 והאיבר ה-50 הוא 15. מצאו את האיבר ה-65.

31 בסדרה חשבונית שכל איבריה מספרים שלמים, סכום האיברים השני והחמישי הוא 23, ומכפלת האיבר הראשון באיבר השלישי היא 40. מצאו את a_1 ואת d.

32 מהסדרה $3,\ 7,\ 11,\ \ldots$ לוקחים רק את האיברים שבמקומות האי-זוגיים:
$a_1,\ a_3,\ a_5,\ \ldots$. הראו שגם זו סדרה חשבונית ומצאו את ההפרש שלה.

33 בסדרה חשבונית $a_1 = 5$ ו-$d = 3$. בונים סדרה חדשה $b_n = 2a_n - 1$. הוכיחו ש-b_n חשבונית ומצאו את b_1 ואת ההפרש שלה.

34 שלושה מספרים יוצרים סדרה חשבונית. סכומם 27 ומכפלתם 504. מצאו אותם.

35 זוויות משולש יוצרות סדרה חשבונית, והזווית הגדולה פי 2 מהקטנה. מצאו את הזוויות.

✔ תשובות סופיות – נושא 7.1

1. $a_{12} = 70$
2. $a_9 = -1$
3. $a_n = 3n - 1$
4. $a_n = 46 - 6n$
5. $a_n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$
6. $n = 24$
7. לא: $8n - 3 = 200$ נותן $n = \frac{203}{8}$
8. כן, $a_{16} = -41$
9. $a_1 = 2$,$d = 4$
10. $a_n = 13 - 3n$
11. $d = 3$,$a_1 = 4$
12. $d = 4$,$a_1 = 2$
13. $a_{n+1} - a_n = 5$
14. $a_{n+1} - a_n = -\frac{3}{2}$ – יורדת
15. $a_{n+1} - a_n = 2n$ – תלוי ב-n
16. $d = 2$,$a_1 = \frac{1}{2}$
17. $x = 5$: 3, 9, 15
18. $x = -2$ או $x = 3$
19. 13, 18, 23
20. 35, 30, 25, 20, 15, 10
21. 23
22. 15
23. 100

24	$a_{22} = -3$
25	$a_{14} = 2$
26	11
27	13
28	$n = 17$ -מ
29	$a_{13} = 3d$, $a_7 = -3d$
30	$a_{65} = 0$
31	$d = 3$, $a_1 = 4$
32	הפרש 8 (פי 2 מ-d)
33	$b_1 = 9$, הפרש 6
34	$4,\ 9,\ 14$ (או בסדר הפוך)
35	$40°,\ 60°,\ 80°$

7.2 סכום סדרה חשבונית – סכום לפי מיקומים, זוגיים ואי-זוגיים וטרנספורמציות

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. סכום בין לבין:

$a_k + \cdots + a_m = S_m - S_{k-1}$. מסכום לאיבר: $a_n = S_n - S_{n-1}$.

צפו לפני שמתחילים:



סדרה חשבונית – נוסחת הסכום

YouTube · 4:44



סדרה חשבונית – סכום איברים אחרונים

YouTube · 5:45



סדרה חשבונית – סכום איברים זוגיים ואי-זוגיים

YouTube · 5:24



מנוסחת סכום לאיבר כללי

YouTube · 4:50

1 חשבו את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה $3,\ 7,\ 11,\ \ldots$

2 חשבו את סכום 15 האיברים הראשונים בסדרה $50,\ 46,\ 42,\ \ldots$

3 חשבו את הסכום $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$.

4 חשבו את הסכום $5 + 10 + 15 + \cdots + 200$.

5 חשבו את סכום כל המספרים הדו-ספרתיים.

6 חשבו את סכום כל המספרים הדו-ספרתיים המתחלקים ב-4.

7 חשבו את סכום המספרים האי-זוגיים מ-1 עד 59.

8 בסדרה חשבונית $a_1 = 2$ ו-$a_{16} = 47$. חשבו את S_{16}.

9 בסדרה חשבונית $a_1 = 6$ ו-$S_{10} = 195$. מצאו את ההפרש.

10 בסדרה חשבונית $d = 5$ ו-$S_{12} = 402$. מצאו את a_1.

11 בסדרה $4, 9, 14, \ldots$ – כמה איברים יש לסכם כדי לקבל 378?

12 בסדרה $1, 3, 5, \ldots$ – כמה איברים ראשונים יש לסכם כדי שהסכום יהיה 400?

13 בסדרה חשבונית $S_5 = 40$ ו- $S_{10} = 155$. מצאו את a_1 ואת d.

14 סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא $S_n = n^2 + 3n$. מצאו את a_1 ואת a_5.

15 סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא $S_n = 2n^2 - n$. הראו שהסדרה חשבונית ומצאו את ההפרש.

16 בסדרה $2, 5, 8, \ldots$ חשבו את סכום האיברים מהאיבר ה- 11 עד האיבר ה- 20 (כולל).

17 בסדרה חשבונית $a_1 = 10$, $d = 2$. חשבו את $a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{30}$.

18 בסדרה חשבונית $a_1 = 3$ ו- $d = 2$. חשבו את סכום 10 האיברים האחרונים מתוך 30 האיברים הראשונים.

19 בסדרה $1, 4, 7, \ldots$ יש 40 איברים. חשבו את סכום האיברים שבמקומות הזוגיים ($a_2 + a_4 + \cdots + a_{40}$).

20 בסדרה חשבונית $a_1 = 5$, $d = 4$ ויש בה 30 איברים. חשבו את סכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים.

21 בסדרה חשבונית בת 20 איברים, סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 250 וסכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 220. מצאו את ההפרש.

22 בסדרה חשבונית בת $2n$ איברים, סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול ב- 36 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים, וההפרש $d = 4$. מצאו את מספר האיברים בסדרה.

23 בסדרה חשבונית סכום 3 האיברים הראשונים הוא 15 וסכום 3 האיברים הבאים הוא 42. מצאו את a_1 ואת d.

24 בסדרה $a_n = 2n + 1$ מוסיפים 3 לכל איבר. חשבו את סכום 10 האיברים הראשונים בסדרה החדשה.

25 בסדרה $a_n = 3n - 2$ מכפילים כל איבר ב-2. חשבו את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה החדשה.

26 נתונה הסדרה $a_n = 4n + 1$. בונים סדרה חדשה $b_n = a_{2n}$. הראו ש-b_n חשבונית וחשבו את סכום 15 האיברים הראשונים שלה.

27 נתונה הסדרה $a_n = 10 - 2n$. בונים את הסדרה $b_n = a_n + a_{n+1}$. הוכיחו ש-b_n חשבונית ומצאו את ההפרש שלה.

28 בסדרה $40, 37, 34, \ldots$ – מהו הסכום המקסימלי של איברים ראשונים, ולאחר כמה איברים מתקבל?

29 בסדרה חשבונית $a_1 = -30$ ו-$d = 4$. מהו המספר הקטן ביותר של איברים שסכומם חיובי?

30 באולם יש 20 שורות. בשורה הראשונה 12 כיסאות ובכל שורה 2 כיסאות יותר מהקודמת. כמה כיסאות יש באולם?

31 רץ מתאמן: ביום הראשון רץ 2 ק"מ, ובכל יום רץ 0.5 ק"מ יותר מהיום הקודם. כמה ק"מ ירוץ בסך הכול ב-30 ימים?

32 בערימה של צינורות יש 15 צינורות בשורה התחתונה, ובכל שורה צינור אחד פחות מהשורה שמתחתיה, עד שורה של צינור אחד. כמה צינורות בערימה?

33 סכום n האיברים הראשונים בסדרה חשבונית הוא $S_n = \frac{3n^2+n}{2}$. מצאו את a_{10}.

34 בסדרה חשבונית $a_1 + a_{20} = 50$. חשבו את S_{20} (בלי למצוא a_1 ו-d).

35 בסדרה חשבונית $a_8 = 13$. חשבו את S_{15}.

✔ תשובות סופיות – נושא 7.2

1	$S_{20}=820$
2	$S_{15}=330$
3	5050
4	4100
5	4905
6	1188
7	900
8	392
9	$d=3$
10	$a_1=6$
11	12 איברים
12	20
13	$a_1=2$, $d=3$
14	$a_1=4$, $a_5=12$
15	$a_n=4n-3$, $d=4$
16	455
17	590
18	520
19	1220
20	915
21	$d=3$
22	18 איברים
23	$a_1=2$, $d=3$

24	150
25	1180
26	$975\ ;\ b_n = 8n + 1$
27	$b_n = 18 - 4n$, הפרש -4
28	$S_{14} = 287$
29	$n = 17$
30	620
31	$\frac{555}{2}$ ק"מ
32	120
33	$a_{10} = 29$
34	$S_{20} = 500$
35	$S_{15} = 195$

פרק 7 סיכומון סוף פרק – סדרה חשבונית

הגדרה ואיבר כללי

- $a_{n+1}-a_n=d$ קבוע.
- $a_n=a_1+(n-1)d$; $a_m=a_k+(m-k)d$.

נוסחאות הסכום

- $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$.
- $S_n=\frac{n}{2}\left(2a_1+(n-1)d\right)$.
- $a_n=S_n-S_{n-1}$.

הוכחה שסדרה חשבונית

- מחשבים $a_{n+1}-a_n$ ומראים שאינו תלוי ב-n.
- a_n ליניארי ב-n (מהצורה $pn+q$) – חשבונית עם $d=p$.

סכום לפי מיקומים

- בין לבין: S_m-S_{k-1}.
- זוגיים / אי-זוגיים – סדרה חשבונית עם הפרש $2d$.
- בסדרה בת $2n$ איברים: (זוגיים) − (אי-זוגיים) $=nd$.

שלושה איברים עוקבים

- a,b,c עוקבים $\iff 2b=a+c$.
- שלושה מספרים בסדרה: $x-d,\ x,\ x+d$.

טרנספורמציות

- $b_n=k\cdot a_n+m$ – חשבונית עם הפרש kd.
- $b_n=a_{2n}$ – חשבונית עם הפרש $2d$.

איברים חיוביים ושליליים

- פותרים אי-שוויון $a_n>0$ (או <0) ולוקחים n טבעי.
- \"כמה איברים\" – ספירה של ערכי n המתאימים.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- $a_n=a_1+nd$ – שוכחים את ה-$(n-1)$.
- בסכום בין לבין: S_m-S_k במקום S_m-S_{k-1}.
- לתת n שאינו טבעי כתשובה.
- בבעיות מילוליות – לבלבל בין האיבר ה-n לסכום S_n.

💡 **הטיפ של אילון:** בכל שאלת סדרות – תרגמו כל נתון למשוואה עם a_1 ו-d בלבד. שתי משוואות, שני נעלמים – וזה נפתר.

פרק 8

סדרה הנדסית

איבר כללי, הוכחות וטרנספורמציות, סכומים, זוגיים ואי-זוגיים וסדרה אינסופית מתכנסת

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

8.1 **האיבר הכללי, הוכחה שסדרה הנדסית וטרנספורמציות לסדרה** — 35 תרגילים

8.2 **סכום סדרה הנדסית, זוגיים ואי-זוגיים וסדרה הנדסית אינסופית** — 33 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

סדרה הנדסית – סיכום מלא לבגרות | שאלון 472
YouTube · 43:59

סדרה הנדסית – איבר כללי
YouTube · 3:52

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת
YouTube · 5:23

סדרה הנדסית – התנהגויות ומצבים
YouTube · 5:50

🎛️ המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

מעבדת הסדרות

שנו את המנה q וראו מתי הסדרה מתכנסת ואיך הסכום האינסופי מתקרב ל- $\frac{a_1}{1-q}$.

8.1 האיבר הכללי, הוכחה שסדרה הנדסית וטרנספורמציות לסדרה

סדרה הנדסית: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ קבוע. האיבר הכללי: $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$. שלושה איברים עוקבים a,b,c מקיימים $b^2=ac$.

צפו לפני שמתחילים:



סדרה הנדסית – איבר כללי
YouTube · 3:52



סדרה הנדסית – התנהגויות ומצבים
YouTube · 5:50



סדרה הנדסית – הסבר ותרגול
YouTube · 13:14

1. בסדרה הנדסית $a_1=3$ והמנה $q=2$. מצאו את a_6.
2. בסדרה הנדסית $a_1=64$ ו-$q=\frac{1}{2}$. מצאו את a_7.
3. בסדרה הנדסית $a_1=5$ ו-$q=-3$. מצאו את a_5 ואת a_6.
4. כתבו את האיבר הכללי של הסדרה $2,\ 6,\ 18,\ 54,\ \ldots$
5. כתבו את האיבר הכללי של הסדרה $80,\ 40,\ 20,\ \ldots$
6. כתבו את האיבר הכללי של הסדרה $1,\ -4,\ 16,\ -64,\ \ldots$
7. בסדרה $3,\ 6,\ 12,\ \ldots$ – איזה מקום תופס המספר 768?
8. האם המספר 1000 הוא איבר בסדרה $2,\ 10,\ 50,\ \ldots$? נמקו.
9. בסדרה הנדסית $a_2=6$ ו-$a_5=162$. מצאו את a_1 ואת q.
10. בסדרה הנדסית $a_3=12$ ו-$a_5=48$. מצאו את a_1 ואת q (שתי אפשרויות).

11 בסדרה הנדסית חיובית $a_1 = 2$ ו-$a_7 = 128$. מצאו את a_4.

12 בסדרה הנדסית $a_4 = -24$ ו-$a_7 = 192$. מצאו את המנה ואת a_1.

13 בסדרה הנדסית $a_1 + a_2 = 12$ ו-$a_3 + a_4 = 48$. מצאו את q ואת a_1, אם ידוע ש-$q > 0$.

14 בסדרה הנדסית $a_2 - a_1 = 6$ ו-$a_3 - a_2 = 18$. מצאו את a_1 ואת q.

15 הוכיחו שהסדרה $a_n = 5 \cdot 2^n$ היא סדרה הנדסית, ומצאו את a_1 ואת המנה.

16 הוכיחו שהסדרה $a_n = \frac{3^{n+1}}{4}$ היא סדרה הנדסית ומצאו את המנה.

17 הוכיחו שהסדרה $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ היא סדרה הנדסית יורדת.

18 הראו שהסדרה $a_n = n \cdot 2^n$ אינה סדרה הנדסית.

19 המספרים $x,\ x+6,\ 4x$ הם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית. מצאו את x ($x > 0$) ואת המנה.

20 המספרים $4,\ x,\ 25$ הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית. מצאו את x.

21 המספרים $x-1,\ x+1,\ 2x+5$ הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית. מצאו את x.

22 הכניסו 3 מספרים חיוביים בין 2 לבין 162 כך שתתקבל סדרה הנדסית.

23 הכניסו 2 מספרים בין 250 לבין 2 כך שתתקבל סדרה הנדסית.

24 בסדרה הנדסית $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ – מהו האיבר הראשון שגדול מ-1000?

25 בסדרה $1024,\ 512,\ 256,\ \ldots$ – כמה איברים גדולים מ-1?

26 בסדרה הנדסית $q = -\frac{1}{2}$ ו-$a_1 = 32$. אילו מבין 6 האיברים הראשונים שליליים?

27 מסדרה הנדסית $a_1 = 2$, $q = 3$ לוקחים את האיברים שבמקומות הזוגיים: $a_2,\ a_4,\ a_6,\ \ldots$. הראו שזו סדרה הנדסית ומצאו את המנה שלה.

28 נתונה סדרה הנדסית a_n עם $a_1 = 4$, $q = 2$. בונים סדרה חדשה $b_n = 3a_n$. הוכיחו ש-b_n הנדסית ומצאו את b_1 ואת המנה.

29 נתונה סדרה הנדסית $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$. בונים את הסדרה $b_n = a_n^2$. האם b_n הנדסית? מהי המנה שלה?

30 נתונה סדרה הנדסית $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$. בונים את הסדרה $b_n = \frac{1}{a_n}$. הוכיחו ש-b_n הנדסית ומצאו את המנה.

31 נתונה סדרה הנדסית a_n עם מנה $q = 2$. בונים את הסדרה $b_n = a_n \cdot a_{n+1}$. הוכיחו ש-b_n הנדסית ומצאו את המנה שלה.

32 נתונה סדרה חשבונית $a_n = 2n + 1$. הוכיחו שהסדרה $b_n = 3^{a_n}$ היא סדרה הנדסית ומצאו את המנה.

33 שלושה מספרים יוצרים סדרה הנדסית שמכפלתם 216 וסכומם 21. מצאו אותם.

34 אוכלוסייה של 500 חיידקים מכפילה את עצמה כל שעה. כמה חיידקים יהיו בתום 8 שעות?

35 מכונית שווה $120{,}000$ ש"ח, וערכה יורד ב-10% בכל שנה. מה יהיה ערכה בתום 3 שנים?

✔ תשובות סופיות – נושא 8.1

1. $a_6 = 96$
2. $a_7 = 1$
3. $a_5 = 405$, $a_6 = -1215$
4. $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
5. $a_n = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
6. $a_n = (-4)^{n-1}$
7. $n = 9$
8. לא: $250 = 5^{n-1}$ אין פתרון שלם
9. $a_1 = 2$, $q = 3$
10. $q = 2,\ a_1 = 3$ או $q = -2,\ a_1 = 3$
11. $a_4 = 16$
12. $a_1 = 3$, $q = -2$
13. $a_1 = 4$, $q = 2$
14. $a_1 = 3$, $q = 3$
15. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$; $a_1 = 10$
16. $q = 3$
17. $q = \frac{1}{2}$, האיברים חיוביים – יורדת
18. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)}{n}$ – תלוי ב-n
19. $q = 2$, $x = 6$
20. $x = 10$ או $x = -10$
21. $x = 2$ או $x = -3$
22. $6,\ 18,\ 54$
23. $50,\ 10$

24	$a_{10} = 1536$
25	10
26	$a_2 = -16,\ a_4 = -4,\ a_6 = -1$
27	מנה 9 (q^2), איבר ראשון 6
28	$b_1 = 12$, מנה 2
29	כן, $b_n = 4 \cdot 9^{n-1}$, מנה 9
30	מנה $\frac{1}{2}$
31	מנה $q^2 = 4$
32	$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 3^2 = 9$
33	3, 6, 12 (או 12, 6, 3)
34	128000
35	87480 ש"ח

8.2 סכום סדרה הנדסית, זוגיים ואי-זוגיים וסדרה הנדסית אינסופית

$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$ $(q \neq 1)$. איברים במקומות זוגיים (או אי-זוגיים) יוצרים סדרה הנדסית עם מנה q^2. סדרה אינסופית מתכנסת כאשר $-1 < q < 1$, $q \neq 0$, וסכומה $S = \frac{a_1}{1-q}$.

צפו לפני שמתחילים:



סדרה הנדסית – הוכחת נוסחת הסכום
YouTube · 3:10



סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת – מבוא
YouTube · 5:23



נוסחת הסכום של סדרה אינסופית
YouTube · 2:41

1. חשבו את סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה $3,\ 6,\ 12,\ \ldots$

2. חשבו את סכום 6 האיברים הראשונים בסדרה $729,\ 243,\ 81,\ \ldots$

3. חשבו את סכום 5 האיברים הראשונים בסדרה $2,\ -6,\ 18,\ \ldots$

4. חשבו את הסכום $1+2+4+\cdots+512$.

5. בסדרה הנדסית $a_1=5$, $q=2$ ו-$S_n=315$. מצאו את n.

6. בסדרה הנדסית $q=3$ ו-$S_4=200$. מצאו את a_1.

7. בסדרה הנדסית $a_1=4$ והאיבר האחרון $a_n=324$, $q=3$. חשבו את סכום כל האיברים.

8. בסדרה הנדסית $S_2=9$ ו-$S_3=21$, $a_1=3$. מצאו את המנה.

9. בסדרה הנדסית $a_1=2$, $q=2$. חשבו את $a_6+a_7+\cdots+a_{10}$.

10 בסדרה $1,\ 3,\ 9,\ \ldots$ – חשבו את סכום האיברים מהאיבר הרביעי עד האיבר השביעי.

11 בסדרה הנדסית בת 10 איברים $a_1 = 1$, $q = 2$. חשבו את סכום האיברים שבמקומות הזוגיים.

12 בסדרה הנדסית בת 8 איברים $a_1 = 3$, $q = 2$. חשבו את סכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים.

13 בסדרה הנדסית בת $2n$ איברים, סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 3 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. מצאו את המנה.

14 בסדרה הנדסית בת 12 איברים סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 91 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 273. מצאו את המנה ואת סכום כל האיברים.

15 סכום 3 האיברים הראשונים בסדרה הנדסית הוא 14, וסכום 3 האיברים הבאים הוא 112. מצאו את q ואת a_1.

16 חשבו את הסכום של הסדרה האינסופית $8 + 4 + 2 + 1 + \ldots$

17 חשבו את הסכום של הסדרה האינסופית $27 + 9 + 3 + \ldots$

18 חשבו את הסכום של הסדרה האינסופית $10 - 5 + \frac{5}{2} - \ldots$

19 איזו מבין הסדרות מתכנסת? (1) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (2) $a_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ (3) $a_n = (-1.5)^n$. חשבו את סכום הסדרה המתכנסת.

20 סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת שסכומה 24 ו-$a_1 = 12$. מצאו את המנה.

21 סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת עם $q = \frac{3}{4}$ וסכום 40. מצאו את a_1 ואת a_2.

22 סכום סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת הוא 18 והאיבר השני הוא 4. מצאו את a_1 ואת q (שתי אפשרויות).

23 לאילו ערכי x מתכנסת הסדרה ההנדסית האינסופית $1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \ldots$?

24 לאילו ערכי x מתכנסת הסדרה $2+2(x-1)+2(x-1)^2+\ldots$? מה סכומה כאשר $x=\frac{1}{2}$?

25 בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת, סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 4 וסכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 8. מצאו את q ואת a_1.

26 בסדרה הנדסית אינסופית $a_1=9$, $q=\frac{1}{3}$. חשבו את סכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים בלבד.

27 בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת כל איבר גדול פי 4 מסכום כל האיברים שאחריו. מצאו את המנה.

28 כתבו את המספר $0.\overline{3}=0.333\ldots$ כשבר, בעזרת סכום סדרה הנדסית אינסופית.

29 כתבו את המספר $0.\overline{45}$ כשבר פשוט.

30 כדור נזרק מגובה 10 מטרים, ובכל קפיצה הוא עולה לגובה של $\frac{1}{2}$ מהגובה הקודם. מהו הגובה שאליו יעלה אחרי הפגיעה הרביעית בקרקע?

31 משקיעים 1000 ש"ח בתחילת כל שנה בתוכנית שמכפילה את הסכום פי 1.1 בכל שנה. כמה כסף יהיה בתוכנית בסוף השנה השלישית?

32 בסדרה הנדסית $a_1=1$, $q=2$. מצאו את המספר הקטן ביותר של איברים ראשונים שסכומם עולה על 1000.

33 בסדרה הנדסית חיובית $a_1=8$ ו-$S_3=56$. מצאו את המנה וחשבו את S_6.

✔ תשובות סופיות – נושא 8.2

1	765
2	1092
3	122
4	1023
5	$n = 6$
6	$a_1 = 5$
7	484
8	$q = 2$
9	1984
10	1080
11	682
12	255
13	$q = 3$
14	$q = 3$; 364
15	$q = 2$, $a_1 = 2$
16	16
17	$\frac{81}{2}$
18	$\frac{20}{3}$
19	(2), סכומה 15
20	$q = \frac{1}{2}$
21	$a_1 = 10$, $a_2 = \frac{15}{2}$
22	$a_1 = 6,\ q = \frac{2}{3}$ או $a_1 = 12,\ q = \frac{1}{3}$
23	$-3 < x < 3$

24	$\frac{4}{3}\ ;\ 0<x<2$
25	$a_1=6\ ,q=\frac{1}{2}$
26	$\frac{81}{8}$
27	$q=\frac{1}{5}$
28	$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\cdots=\frac{1}{3}$
29	$\frac{5}{11}$
30	$\frac{5}{8}$ מ'
31	3641 ש"ח
32	$n=10$
33	$504\ ;\ q=2$

פרק 8 סיכומון סוף פרק – סדרה הנדסית

הגדרה ואיבר כללי

- $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ קבוע.
- $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$; $a_m=a_k\cdot q^{m-k}$.

הוכחה שסדרה הנדסית

- מחשבים $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ומראים שאינו תלוי ב-n.
- $a_n=c\cdot p^n$ – הנדסית עם $q=p$.

שלושה איברים עוקבים

- a,b,c עוקבים $\iff b^2=ac$.
- שלושה מספרים: $x,\ xq,\ \frac{x}{q}$ – המכפלה x^3.

טרנספורמציות

- $k\cdot a_n$ – אותה מנה q.
- a_n^2 – מנה q^2 ; $\frac{1}{a_n}$ – מנה $\frac{1}{q}$.
- a_{2n} (מקומות זוגיים) – מנה q^2.

סכום

- $S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$, $q\neq 1$.
- בין לבין: S_m-S_{k-1}.
- זוגיים: $\frac{a_2\left((q^2)^n-1\right)}{q^2-1}$; (זוגיים) $\cdot q=$(אי-זוגיים).

סדרה אינסופית

- מתכנסת $-1<q<1$ $\iff$, $q\neq 0$.
- $S=\frac{a_1}{1-q}$.
- שבר מחזורי – סכום סדרה הנדסית אינסופית.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- $a_n=a_1q^n$ – שוכחים את ה-$(n-1)$.
- לשכוח את הפתרון השלילי של q כש-q^2 ידוע.
- להשתמש ב-$S=\frac{a_1}{1-q}$ כשהסדרה לא מתכנסת.
- לחלק משוואות בלי לבדוק ש-$a_1\neq 0$.

💡 **הטיפ של אילון:** כשיש שני נתונים על סכומים או איברים – חלקו את המשוואות זו בזו. ה-a_1 מצטמצם ונשארת משוואה ב-q בלבד.