LEVELUP

מתמטיקה בחוויה אחרת ÷ √ × π

קורס בגרות במתמטיקה · 4 יחידות

מחברת הקורס

שאלון 471

כל נושאי הקורס המלא – תרגול מדורג לכל נושא, תשובות סופיות,
סרטוני הסבר מהערוץ והמחשות אינטראקטיביות

1,554	44	21	155
תרגילים	נושאים	פרקים	ברקודים

אילון פרץ · LevelUp

levelupmath.co.il · YouTube · 050-5100170 💬

תוכן העניינים

1 הבסיס – אלגברה

1.1 סדר פעולות, מספרים מכוונים, חזקות ושורשים 35
1.2 פירוק לגורמים – גורם משותף, כפל מקוצר וטרינום 33
1.3 משוואות ריבועיות ונוסחת השורשים 33
1.4 מערכות של שתי משוואות 32
1.5 משוואות ממעלות גבוהות ומשתנה עזר 33
1.6 שברים אלגבריים ומשוואות עם נעלם במכנה 32
1.7 משוואות אי-רציונליות 33
1.8 אי-שוויונות – קווי, ריבועי, שברים, "או" ו"וגם" 34
1.9 משוואות עם פרמטרים 32

2 הבסיס – קו ישר

2.1 מערכת צירים, משוואת ישר ונקודות חיתוך 37

3 הבסיס – פרבולה

3.1 קודקוד, נקודות חיתוך, תחומי חיוביות ושליליות 33
3.2 תחומי עלייה וירידה וחקירת פרבולה 34

4 סטטיסטיקה והתפלגות נורמלית

4.1 סטטיסטיקה תיאורית – סוגי משתנים, שכיחויות, דיאגרמות ומדדים 37
4.2 התפלגות נורמלית – טבלת Z ועקומת הפעמון 36

5 רגרסיה לינארית ומקדם מתאם

5.1 דיאגרמת פיזור, מקדם המתאם וישר הרגרסיה 36

6 גיאומטריה – משולשים

6.1 זוויות, ידע כללי וטענה-נימוק 35
6.2 חפיפת משולשים ומשולש שווה שוקיים 50
6.3 משולש ישר זווית ונקודות מפגש במשולש 45
6.4 קטעי אמצעים, דמיון ושטחים 36

7 גיאומטריה – מרובעים

7.1 מקבילית, מלבן, מעוין וריבוע 32
7.2 טרפז ודלתון 31

8 גיאומטריה – פרופורציות

8.1 משפט תאלס ודמיון משולשים 31

9 גיאומטריה – מעגלים

9.1 אנך ממרכז המעגל, מיתרים וזוויות במעגל 45
9.2 משיקים למעגל 30

10 הסתברות

10.1 מאורעות, "או", טבלה דו-ממדית, מאורעות זרים ובלתי תלויים 35
10.2 עץ הסתברות והסתברות מותנית 35

11 טריגונומטריה

11.1 סינוס, קוסינוס וטנגנס במשולש ישר זווית ובמרובעים 36
11.2 משפט הסינוסים ושטח משולש בעזרת טריגונומטריה 32

12 גיאומטריה אנליטית – הישר

12.1 שיפוע, ישרים מקבילים ומאונכים, אמצע קטע, אורך קטע וצורות 42

13 גיאומטריה אנליטית – המעגל

13.1 משוואת מעגל, מציאת מעגל, נקודות על המעגל ומעגל וישר 41

14 קדם אנליזה

14.1 התנהגות פולינום באינסוף וסביב ציר x 33
14.2 הזזות ומתיחות מתוך גרף 40

15 מתחילים לחקור!

15.1 נגזרת וכללי גזירה 36
15.2 משיק לפונקציה 33
15.3 נקודות קיצון, חקירת פולינום ומציאת פרמטרים 35

16 מורכבת ומכפלה

16.1 נגזרת מורכבת ומכפלה וחקירת מכפלה 31
16.2 קשר גרף–נגזרת, זוגיות והטרנספורמציה 32 $f^2(x)$

17 חקירת פונקציית שורש

17.1 תחום הגדרה, נגזרת וחקירת פונקציית שורש 37

18 חקירת פונקציית מנה

18.1 תחום הגדרה ואסימפטוטות – אנכית ואופקית 33

18.2 נגזרת, נקודות קיצון וחקירה מלאה של פונקציית מנה 32

19 סיכום החקירות וטרנספורמציות

19.1 טכניקות גזירה, טרנספורמציות (הזזה, מתיחה, ערך מוחלט) וסעיפי חשיבה 45

20 אינטגרלים

20.1 פונקציה קדומה וטכניקות אינטגרציה 34

20.2 חישוב שטחים בעזרת אינטגרלים 32

21 בעיות קיצון

21.1 בעיות קיצון – אלגבריות, גרפיות וגיאומטריות 35

💡 לחיצה על שם נושא מעבירה ישר אליו · כל ברקוד בחוברת גם לחיץ

פרק 1

הבסיס – אלגברה

כל הכלים האלגבריים לשאלון 471: חזקות, פירוק לגורמים, משוואות, שברים ואי-שוויונות

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

1.1	סדר פעולות, מספרים מכוונים, חזקות ושורשים	35 תרגילים
1.2	פירוק לגורמים – גורם משותף, כפל מקוצר וטרינום	33 תרגילים
1.3	משוואות ריבועיות ונוסחת השורשים	33 תרגילים
1.4	מערכות של שתי משוואות	32 תרגילים
1.5	משוואות ממעלות גבוהות ומשתנה עזר	33 תרגילים
1.6	שברים אלגבריים ומשוואות עם נעלם במכנה	32 תרגילים
1.7	משוואות אי-רציונליות	33 תרגילים
1.8	אי-שוויונות – קווי, ריבועי, שברים, "או" ו"וגם"	34 תרגילים
1.9	משוואות עם פרמטרים	32 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



פירוק לגורמים – כל הפירוקים וסדר פעולות

YouTube · 6:30



פתרון משוואה ריבועית – כל השיטות

YouTube · 7:51



פתרון משוואות עם נעלם במכנה צעד אחר צעד

YouTube · 8:13



פתרון אי-שוויון ריבועי

YouTube · 9:36

המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף



משוואה ואי-שוויון ריבועי

שנו את a, b, c וראו את הדיסקרימיננטה, את השורשים ואת פתרון אי-השוויון על ציר המספרים.

1.1 סדר פעולות, מספרים מכוונים, חזקות ושורשים

סוגריים ← חזקות ושורשים ← כפל וחילוק ← חיבור וחיסור. מינוס כפול מינוס – פלוס.

חוקי חזקות: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

צפו לפני שמתחילים:



סדר פעולות חשבון
YouTube · 8:11



מספרים מכוונים – חיבור, חיסור, כפל וחילוק
YouTube · 11:03



חוקי חזקות – כל החוקים שחייבים לדעת
YouTube · 8:09



חוקי שורשים – הסבר פשוט ודוגמאות
YouTube · 4:47

1. חשבו: $-9 + 14 - 8$

2. חשבו: $-20 - (-13) + 4$

3. כפל וחילוק עם סימנים: $(-5) \cdot (-6) : (-3)$

4. סדר פעולות: $7 - 2 \cdot 5 + 12 : 4$

5. עם סוגריים: $(7 - 2) \cdot (5 + 12) : 17$

6. חשבו את -3^2 ואת $(-3)^2$ והסבירו את ההבדל.

7. חשבו: $(-2)^3 - (-1)^7 + 2^2$

8. סוגריים מרובעים: $3 \cdot [4 - (6 - 11)] - 20$

9. שברים עם סימנים: $\frac{-14}{-7} + \frac{-36}{9}$

10. ערך מוחלט: $2 \cdot |5 - 9| - |-12|$

11 חיבור שברים: $\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$

12 כפל שברים: $-\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{8}$

13 חילוק שברים: $\frac{2}{3}:\left(-\frac{4}{9}\right)$

14 שבר מורכב: $\frac{5-(-3)}{-2-6}$

15 הציבו $a=-3$, $b=2$ בביטוי a^2-ab-b^2.

16 הציבו $x=\frac{1}{2}$ בביטוי $8x^2-6x+1$.

17 חוקי חזקות: פשטו $x^4\cdot x^7$

18 פשטו: $\frac{a^{10}}{a^3}$

19 חזקה של חזקה ומכפלה: $(3x^2)^3$

20 פשטו: $\frac{18a^6b^2}{6a^2b}$

21 חזקת אפס וחזקה שלילית: 7^0+2^{-2}

22 שבר בחזקה שלילית: $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

23 כתבו בלי מעריכים שליליים: $\frac{x^{-3}y^2}{x^2y^{-1}}$

24 עברו לבסיס משותף: $\frac{9^3\cdot3^2}{27^2}$

25 חשבו: $\sqrt{81}-\sqrt{16}+\sqrt[3]{8}$

26 הוציאו מהשורש: $\sqrt{72}$

27 חיבור שורשים: $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{5}$

28 כפל שורשים: $\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}$

29 חילוק שורשים: $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$

30 בטלו את השורש מהמכנה: $\frac{10}{\sqrt{5}}$

31 חזקה עם מעריך שבור: $8^{\frac{2}{3}}$

32 חזקה שבורה ושלילית: $25^{-\frac{1}{2}}$

33 פתחו: $(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})$

34 מצאו את n: $3^n=81$

35 איזה מספר גדול יותר: $\sqrt{50}$ או 7? נמקו בלי מחשבון.

✔ תשובות סופיות – נושא 1.1

1	-3
2	-3
3	-10
4	0
5	5
6	$(-3)^2=9\ ;\ -3^2=-9$
7	-3
8	7
9	-2
10	4
11	$-\frac{1}{12}$
12	$-\frac{3}{2}$
13	$-\frac{3}{2}$
14	-1
15	11
16	0
17	x^{11}
18	a^7
19	$27x^6$
20	$3a^4b$
21	$\frac{5}{4}$
22	$\frac{25}{9}$
23	$\frac{y^3}{x^5}$

24	9
25	7
26	$6\sqrt{2}$
27	$4\sqrt{5}$
28	12
29	7
30	$2\sqrt{5}$
31	4
32	$\frac{1}{5}$
33	5
34	$n=4$
35	$\sqrt{50}$, כי $7=\sqrt{49}<\sqrt{50}$

1.2 פירוק לגורמים – גורם משותף, כפל מקוצר וטרינום

סדר עבודה: גורם משותף ← כפל מקוצר ($a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$) ← טרינום ← פירוק בקבוצות.

צפו לפני שמתחילים:



פירוק לגורמים – כל הפירוקים וסדר פעולות
YouTube · 6:30



הוצאת גורם משותף
YouTube · 9:53



פירוק לפי קבוצות
YouTube · 4:33

1. הוציאו גורם משותף: $5x-20$
2. הוציאו גורם משותף: $8x^2+12x$
3. גורם משותף בשני משתנים: $-9a^2b+3ab^2$
4. גורם משותף שהוא סוגריים: $x(x+5)-4(x+5)$
5. הוציאו גורם משותף עם מינוס: $-6x^2-3x$
6. הפרש ריבועים: x^2-49
7. הפרש ריבועים עם מקדמים: $25x^2-4$
8. הפרש ריבועים בשני משתנים: x^2-9y^2
9. ריבוע של סכום: $x^2+8x+16$
10. ריבוע של הפרש: $9x^2-6x+1$

11 גורם משותף ואז הפרש ריבועים: $3x^2 - 27$

12 גורם משותף ואז ריבוע: $2x^2 - 12x + 18$

13 טרינום: $x^2 + 7x + 10$

14 טרינום: $x^2 - 9x + 14$

15 טרינום עם מקדם חופשי שלילי: $x^2 + 3x - 18$

16 טרינום: $x^2 - 4x - 21$

17 טרינום כשהמקדם של x^2 שונה מ-1: $2x^2 - 5x - 3$

18 טרינום: $3x^2 + 8x + 4$

19 טרינום עם מקדם מוביל שלילי: $-x^2 + x + 12$

20 פרקו עד הסוף: $x^4 - 16$

21 גורם משותף ואז טרינום: $x^3 - 5x^2 + 6x$

22 פירוק בקבוצות: $x^3 - 3x^2 + 2x - 6$

23 פירוק בקבוצות בשני משתנים: $xy - 2x + 5y - 10$

24 הפרש ריבועים כשאחד מהם סוגריים: $(x-3)^2 - 16$

25 טרינום דו-ריבועי: $x^4 - 10x^2 + 9$

26 פתחו סוגריים: $(2x+5)^2$

27 פתחו סוגריים: $(3a-b)(3a+b)$

28 השלימו: $x^2-10x+\square=(x-\square)^2$

29 חשבו בלי מחשבון בעזרת הפרש ריבועים: 53^2-47^2

30 האם אפשר לפרק את x^2+9 לגורמים? נמקו.

31 צמצמו אחרי פירוק: $\frac{x^2-4}{x+2}$

32 מצאו את k כך ש-x^2+kx+9 יהיה ריבוע של סכום.

33 גורם משותף ואז הפרש ריבועים: $2x^3-8x$

✔ תשובות סופיות – נושא 1.2

1	$5(x-4)$
2	$4x(2x+3)$
3	$-3ab(3a-b)$
4	$(x-4)(x+5)$
5	$-3x(2x+1)$
6	$(x-7)(x+7)$
7	$(5x-2)(5x+2)$
8	$(x-3y)(x+3y)$
9	$(x+4)^2$
10	$(3x-1)^2$
11	$3(x-3)(x+3)$
12	$2(x-3)^2$
13	$(x+2)(x+5)$
14	$(x-7)(x-2)$
15	$(x-3)(x+6)$
16	$(x-7)(x+3)$
17	$(x-3)(2x+1)$
18	$(x+2)(3x+2)$
19	$-(x-4)(x+3)$
20	$(x-2)(x+2)(x^2+4)$
21	$x(x-3)(x-2)$
22	$(x-3)(x^2+2)$
23	$(x+5)(y-2)$

24	$(x-7)(x+1)$
25	$(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)$
26	$4x^2+20x+25$
27	$9a^2-b^2$
28	$5\ ;\ 25$
29	600
30	לא - סכום ריבועים; למשוואה $x^2+9=0$ אין פתרון
31	$x-2$ (עבור $x\neq -2$)
32	$k=6$ (או $k=-6$ לריבוע של הפרש)
33	$2x(x-2)(x+2)$

1.3 משוואות ריבועיות ונוסחת השורשים

$ax^2+bx+c=0 \Longleftarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. לפי $\Delta=b^2-4ac$: חיובית – שני פתרונות, אפס – אחד, שלילית – אין.

צפו לפני שמתחילים:

פתרון משוואה ריבועית – כל השיטות
YouTube · 7:51

הוכחה לנוסחת השורשים
YouTube · 4:33

1. פתרו: $x^2-16=0$
2. פתרו (בלי לחלק ב-x): $x^2=7x$
3. פתרו: $3x^2-12=0$
4. פתרו בעזרת טרינום: $x^2-7x+10=0$
5. פתרו: $x^2+4x-12=0$
6. פתרו בנוסחת השורשים: $2x^2+x-6=0$
7. פתרו: $x^2-10x+25=0$. כמה פתרונות יש?
8. פתרו: $x^2+3x+7=0$
9. פתרונות לא שלמים: $x^2-2x-4=0$
10. פתרו: $3x^2+5x-2=0$
11. בלי לפתוח סוגריים: $(x+2)^2=25$
12. פתחו סוגריים ופתרו: $(x-2)(x+3)=14$

13 פתרו: $x(x+4)=3x+6$

14 משוואה עם שברים: $\frac{x^2}{2}-x=4$

15 מקדם x^2 שלילי: $-x^2+5x-4=0$

16 פתרו: $4x^2+12x+9=0$

17 פתרו: $(x+1)^2+(x-2)^2=17$

18 פתרו: $5x^2-3x=0$

19 פתרו: $2x^2-7x+3=0$

20 פתרו: $(2x-3)(x+1)=x^2$

21 מקדם עשרוני: $0.2x^2-x=0$

22 פתרו בשיטת השלמה לריבוע: $x^2-8x+12=0$

23 פתרו: $x^2-3=2x$

24 ריבועו של מספר גדול פי 5 מהמספר עצמו. מצאו את המספר.

25 מכפלתם של שני מספרים זוגיים עוקבים היא 48. מהם המספרים?

26 אורכו של מלבן גדול ב-2 מרוחבו ושטחו 35 סמ"ר. מצאו את מידותיו.

27 בלי לפתור: כמה פתרונות יש ל-$x^2-4x+5=0$?

28 בלי לפתור: כמה פתרונות יש ל-$2x^2-8x+8=0$?

29 כתבו משוואה ריבועית שפתרונותיה $x=3$ ו-$x=-4$.

30 אחד הפתרונות של $x^2+bx-10=0$ הוא $x=2$. מצאו את b ואת הפתרון השני.

31 סכום שני מספרים הוא 11 ומכפלתם 28. מצאו אותם.

32 פתרו: $\frac{1}{3}x^2-x-6=0$

33 צלעו של ריבוע הוגדלה ב-3 ס"מ ושטחו גדל ב-39 סמ"ר. מה הייתה הצלע המקורית?

✔ תשובות סופיות – נושא 1.3

1	$x_2 = 4 \ , x_1 = -4$
2	$x_2 = 7 \ , x_1 = 0$
3	$x_2 = 2 \ , x_1 = -2$
4	$x_2 = 5 \ , x_1 = 2$
5	$x_2 = 2 \ , x_1 = -6$
6	$x_2 = \frac{3}{2} \ , x_1 = -2$
7	$x = 5$
8	אין פתרון
9	$x_2 = 1 + \sqrt{5} \ , x_1 = 1 - \sqrt{5}$
10	$x_2 = \frac{1}{3} \ , x_1 = -2$
11	$x_2 = 3 \ , x_1 = -7$
12	$x_2 = 4 \ , x_1 = -5$
13	$x_2 = 2 \ , x_1 = -3$
14	$x_2 = 4 \ , x_1 = -2$
15	$x_2 = 4 \ , x_1 = 1$
16	$x = -\frac{3}{2}$
17	$x_2 = 3 \ , x_1 = -2$
18	$x_2 = \frac{3}{5} \ , x_1 = 0$
19	$x_2 = 3 \ , x_1 = \frac{1}{2}$
20	$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \ , x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$
21	$x_2 = 5 \ , x_1 = 0$
22	$x_2 = 6 \ , x_1 = 2$
23	$x_2 = 3 \ , x_1 = -1$

24 0 או 5

25 6 ו-8, או -8 ו--6

26 רוחב 5, אורך 7

27 $\Delta = -4 < 0$ – אין פתרון

28 $\Delta = 0$ – פתרון אחד

29 $x^2 + x - 12 = 0$ (או כל כפולה שלה)

30 $b = 3$; $x = -5$

31 4 ו-7

32 $x_1 = -3$, $x_2 = 6$

33 5 ס"מ

1.4 מערכות של שתי משוואות

מעלה ראשונה – השוואת מקדמים או הצבה. מעלה ראשונה ושנייה – מבודדים נעלם מהמשוואה הקווית ומציבים בשנייה. כל פתרון הוא זוג (x,y).

צפו לפני שמתחילים:



2 משוואות עם 2 נעלמים ממעלה ראשונה

YouTube · 10:51



שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה שנייה

YouTube · 7:08

1 השוואת מקדמים:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases}$$

2 פתרו:

$$\begin{cases} 3x+y=11 \\ x-y=1 \end{cases}$$

3 פתרו:

$$\begin{cases} 2x+3y=13 \\ x+2y=8 \end{cases}$$

4 שיטת ההצבה:

$$\begin{cases} y=3x-2 \\ 2x+y=8 \end{cases}$$

5 פתרו:

$$\begin{cases} 4x-3y=1 \\ 2x+y=13 \end{cases}$$

6 מקדמים שליליים:

$$\begin{cases} -x+2y=7 \\ 3x-y=-1 \end{cases}$$

7 עם שברים:

$$\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=4 \\ x-y=2 \end{cases}$$

8 פתחו סוגריים:

$$\begin{cases} 3(x+1)=2y \\ x-(y-4)=0 \end{cases}$$

9 עשרוניים: $\begin{cases} 0.5x + 0.2y = 3 \\ x + y = 9 \end{cases}$

10 פתרו והסבירו: $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$

11 פתרו והסבירו: $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + 6y = 8 \end{cases}$

12 משתנים בשני האגפים: $\begin{cases} 5x - 2 = 3y \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

13 ממעלה ראשונה ושנייה: $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$

14 פתרו: $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

15 פתרו: $\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = 2x \end{cases}$

16 פתרו: $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$

17 פתרו: $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x^2 + y = 10 \end{cases}$

18 פתרו: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 6 \end{cases}$

19 פתרו: $\begin{cases} x = 2y \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$

20 פתרו: $\begin{cases} xy = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$

21 פתרו: $\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = -x \end{cases}$

22 פתרו: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + xy = 3 \end{cases}$

23 פתרו: $\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

24 פתרו (שימו לב לתוצאה): $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x - 2 \end{cases}$

25 סכום שני מספרים 27 והפרשם 5. מצאו אותם.

26 בחנות: 3 מחברות ו-2 עטים עולים 26 ש"ח, ומחברת ו-4 עטים עולים 22 ש"ח. מה מחיר כל מוצר?

27 במלבן ההיקף 26 והשטח 40. מצאו את אורכי הצלעות.

28 סכום שני מספרים 10 וסכום ריבועיהם 58. מצאו אותם.

29 מספר דו-ספרתי: סכום ספרותיו 9, ואם מחליפים את סדר הספרות המספר גדל ב-27. מהו המספר?

30 בכיתה 32 תלמידים. מספר הבנות גדול ב-6 ממספר הבנים. כמה בנות בכיתה?

31 מצאו את נקודות החיתוך של הישר $y = x + 3$ עם הפרבולה $y = x^2 + 1$.

32 מצאו את a ו-b אם הנקודה $(2, 1)$ פותרת את המערכת $\begin{cases} ax + y = 7 \\ x - by = 0 \end{cases}$

✔ תשובות סופיות – נושא 1.4

1	$(5,3)$
2	$(3,2)$
3	$(2,3)$
4	$(2,4)$
5	$(4,5)$
6	$(1,4)$
7	$(6,4)$
8	$(5,9)$
9	$(4,5)$
10	אין פתרון (ישרים מקבילים)
11	אינסוף פתרונות – כל זוג המקיים $x=4-3y$
12	$(\frac{26}{11},\frac{36}{11})$
13	$(2,3)$, $(3,2)$
14	$(-4,-3)$, $(3,4)$
15	$(-1,-2)$, $(3,6)$
16	$(5,3)$
17	$(-1,9)$, $(3,1)$
18	$(-2,4)$, $(3,9)$
19	$(-4,-2)$, $(4,2)$
20	$(-3,-4)$, $(4,3)$
21	$(0,0)$, $(3,-3)$
22	$(3,-2)$
23	$(1,3)$

24	אין פתרון
25	16 ו-11
26	מחברת 6 ש"ח, עט 4 ש"ח
27	5 ו-8
28	3 ו-7
29	36
30	19
31	$(-1,2)$,$(2,5)$
32	$a=3$,$b=2$

1.5 משוואות ממעלות גבוהות ומשתנה עזר

מפרקים לגורמים (גורם משותף, קבוצות). כשמופיעים x^4 ו-x^2, או אותו ביטוי פעמיים – מציבים משתנה עזר t, פותרים, וחוזרים ל-x. ערך עזר שאינו אפשרי נפסל.

1. הוציאו גורם משותף: $x^3 - 9x = 0$
2. פתרו: $x^3 - 4x^2 = 0$
3. פתרו: $2x^3 - 8x = 0$
4. גורם משותף וטרינום: $x^3 - x^2 - 6x = 0$
5. פתרו: $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$
6. פירוק בקבוצות: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$
7. פירוק בקבוצות: $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$
8. מכפלה שווה לאפס: $(x-1)(x^2-9) = 0$
9. פתרו: $x^4 - x^2 = 0$
10. משוואה דו-ריבועית: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
11. משוואה דו-ריבועית: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
12. דו-ריבועית שאחד מפתרונות העזר נפסל: $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
13. דו-ריבועית: $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$
14. דו-ריבועית בלי פתרון? בדקו: $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$

15 דו-ריבועית: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

16 עם מקדם מוביל: $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

17 משתנה עזר לסוגריים: $(x+1)^2 - 5(x+1) + 6 = 0$

18 משתנה עזר: $(x^2-1)^2 - 11(x^2-1) + 24 = 0$

19 משתנה עזר לביטוי ריבועי: $(x^2+x)^2 - 8(x^2+x) + 12 = 0$

20 משתנה עזר: $(x-2)^2 - 2(x-2) - 3 = 0$

21 פתרו: $x^4 = 16$

22 פתרו: $x^3 = -27$

23 פתרו: $x^3 - 8 = 0$

24 פתרו: $x^5 - 16x = 0$

25 פתרו: $x^4 - 2x^3 = 0$

26 פתרו: $x^3 = x$

27 פתרו: $(x^2-4)(x^2-2x-3) = 0$

28 פתרו: $x^4 - 9x^2 = 0$

29 פתרו: $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

30 כמה פתרונות יש למשוואה $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$? פתרו.

31 מצאו מספר שריבוע ריבועו פחות 17 פעמים ריבועו שווה ל--16.

32 בלי לפתור: הסבירו מדוע ל-$x^4+x^2+1=0$ אין פתרון.

33 משתנה עזר: $\left(\frac{x}{2}\right)^2-3\cdot\frac{x}{2}+2=0$

✔ תשובות סופיות – נושא 1.5

1	$x_3 = 3\ ,x_2 = 0\ ,x_1 = -3$
2	$x_2 = 4\ ,x_1 = 0$
3	$x_3 = 2\ ,x_2 = 0\ ,x_1 = -2$
4	$x_3 = 3\ ,x_2 = 0\ ,x_1 = -2$
5	$x_3 = 0\ ,x_2 = -2\ ,x_1 = -3$
6	$x_3 = 2\ ,x_2 = 1\ ,x_1 = -1$
7	$x_3 = 2\ ,x_2 = -2\ ,x_1 = -3$
8	$x_3 = 3\ ,x_2 = 1\ ,x_1 = -3$
9	$x_3 = 1\ ,x_2 = 0\ ,x_1 = -1$
10	$x_4 = 2\ ,x_3 = 1\ ,x_2 = -1\ ,x_1 = -2$
11	$x_4 = 3\ ,x_3 = 2\ ,x_2 = -2\ ,x_1 = -3$
12	$x_2 = 2\ ,x_1 = -2$
13	$x_2 = \sqrt{2}\ ,x_1 = -\sqrt{2}$
14	אין פתרון
15	$x_4 = 3\ ,x_3 = 1\ ,x_2 = -1\ ,x_1 = -3$
16	$x_4 = 1\ ,x_3 = \frac{1}{2}\ ,x_2 = -\frac{1}{2}\ ,x_1 = -1$
17	$x_2 = 2\ ,x_1 = 1$
18	$x_4 = 3\ ,x_3 = 2\ ,x_2 = -2\ ,x_1 = -3$
19	$x_4 = 2\ ,x_3 = 1\ ,x_2 = -2\ ,x_1 = -3$
20	$x_2 = 5\ ,x_1 = 1$
21	$x_2 = 2\ ,x_1 = -2$
22	$x = -3$
23	$x = 2$

24 $x_1=-2\ ,x_2=0\ ,x_3=2$

25 $x_1=0\ ,x_2=2$

26 $x_1=-1\ ,x_2=0\ ,x_3=1$

27 $x_1=-2\ ,x_2=-1\ ,x_3=2\ ,x_4=3$

28 $x_1=-3\ ,x_2=0\ ,x_3=3$

29 $x_1=-1\ ,x_2=-\frac{1}{3}\ ,x_3=\frac{1}{3}\ ,x_4=1$

30 ארבעה: $x=\pm 1\ ,x=\pm\sqrt{5}$

31 ± 1 או ± 4

32 כל המחוברים חיוביים - $x^4+x^2+1\geq 1$

33 $x_1=2\ ,x_2=4$

1.6 שברים אלגבריים ומשוואות עם נעלם במכנה

מצמצמים רק גורמים (אחרי פירוק). במשוואה: קודם תחום הגדרה (מכנה $\neq 0$), אחר כך כופלים במכנה המשותף ובודקים כל פתרון.

צפו לפני שמתחילים:



צמצום שברים אלגבריים – איך עושים נכון
YouTube · 4:19



חיבור וחיסור שברים אלגבריים
YouTube · 10:28



פתרון משוואות עם נעלם במכנה צעד אחר צעד
YouTube · 8:13



משוואות ריבועיות עם נעלם במכנה
YouTube · 13:22

1 צמצמו: $\dfrac{3x+6}{x+2}$

2 צמצמו: $\dfrac{x^2-9}{x-3}$

3 צמצמו: $\dfrac{x^2+5x}{x^2-25}$

4 צמצמו: $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

5 צמצמו: $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+4x+4}$

6 צמצמו: $\dfrac{2x^2-8}{x^2+x-6}$

7 צמצמו (שימו לב לסימן): $\dfrac{5-x}{x-5}$

8 חברו: $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x}$

9 חברו: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}$

10 חסרו: $\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x}$

11 חברו: $\frac{x}{x-3}+\frac{3}{3-x}$

12 חסרו: $\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}$

13 כפל שברים: $\frac{x^2-1}{x}\cdot\frac{x^2}{x+1}$

14 חילוק שברים: $\frac{x+3}{x}:\frac{x^2-9}{x^2}$

15 מכנה מספרי: $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5$

16 מכנה מספרי: $\frac{x-1}{4}-\frac{x+2}{6}=1$

17 נעלם במכנה: $\frac{6}{x}=2$

18 נעלם במכנה: $\frac{4}{x-1}=\frac{2}{x+1}$

19 פתרו: $\frac{x+3}{x}=4$

20 פתרו: $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}=\frac{3}{4}$

21 משוואה ריבועית: $x+\frac{6}{x}=5$

22 פתרו: $\frac{x}{x-2}=\frac{3}{x}$

23 פתרון שנפסל? $\frac{x^2}{x-3}=\frac{9}{x-3}$

24 פתרו: $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{5}{x^2-1}$

25 פתרו: $\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x}=1$

26 פתרו: $\frac{3}{x}-\frac{2}{x+2}=1$

27 פתרו: $\frac{x+1}{x-1}=\frac{x+3}{x}$

28 פתרו: $\frac{12}{x}-\frac{12}{x+1}=1$

29 פתרו: $\frac{x-4}{x^2-4x}=\frac{1}{2}$

30 מהו תחום ההגדרה של הביטוי $\frac{5}{x^2-x-6}$?

31 פועל אחד מסיים עבודה ב-x שעות ופועל שני ב-$x+2$ שעות. יחד הם מסיימים אותה ב-$\frac{15}{8}$ שעות. מצאו את x.

32 מכונית נסעה 120 ק"מ. אילו נסעה מהר יותר ב-20 קמ"ש, הייתה מגיעה חצי שעה קודם. מה הייתה מהירותה?

✔ תשובות סופיות – נושא 1.6

1	3
2	$x+3$
3	$\frac{x}{x-5}$
4	$\frac{x-2}{x+2}$
5	$\frac{x-3}{x+2}$
6	$\frac{2(x+2)}{x+3}$
7	-1
8	$\frac{5}{x}$
9	$\frac{2x+1}{x(x+1)}$
10	$\frac{2(x+1)}{x(x-2)}$
11	1
12	$-\frac{1}{x+2}$
13	$x(x-1)$
14	$\frac{x}{x-3}$
15	$x=6$
16	$x=19$
17	$x=3$
18	$x=-3$
19	$x=1$
20	$x=2$
21	$x_1=2\ ,x_2=3$
22	אין פתרון
23	$x=-3$

24	$x=\frac{6}{5}$
25	$x=-2$
26	$x_1=-3\ ,x_2=2$
27	$x=3$
28	$x_1=-4\ ,x_2=3$
29	$x=2$
30	$x\neq 3\ ,x\neq -2$
31	$x=3$
32	60 קמ"ש

1.7 משוואות אי-רציונליות

מבודדים את השורש, מעלים בריבוע ופותרים – **ובודקים** כל פתרון במשוואה המקורית, כי ההעלאה בריבוע יכולה להוסיף פתרון זר.

צפו לפני שמתחילים:

פתרון משוואות אי-רציונליות (משוואות עם שורש)
YouTube · 7:33

1. פתרו: $\sqrt{x}=5$
2. פתרו: $\sqrt{x+3}=4$
3. פתרו: $\sqrt{2x-1}=3$
4. האם יש פתרון? $\sqrt{x-2}=-3$
5. פתרו: $\sqrt{x+7}-2=1$
6. פתרו: $3\sqrt{x}=12$
7. פתרו (ובדקו!): $\sqrt{x+2}=x$
8. פתרו: $\sqrt{x+6}=x$
9. פתרו: $\sqrt{2x+3}=x$
10. פתרו: $\sqrt{x+1}=x-1$
11. פתרו: $x-\sqrt{x}=6$
12. פתרו: $\sqrt{3x+4}=x$

13 פתרו: $\sqrt{x^2+9}=5$

14 פתרו: $\sqrt{x^2-7}=3$

15 פתרו: $\sqrt{5x-1}=\sqrt{x+7}$

16 פתרו: $\sqrt{x+5}=x-1$

17 פתרו: $x=\sqrt{12-x}$

18 פתרו: $\sqrt{4x+1}=2x-1$

19 פתרו: $\sqrt{x}+2=x$

20 פתרו: $2\sqrt{x+1}=x+1$

21 פתרו: $\sqrt{x^2+x+4}=x+2$

22 פתרו: $\sqrt{6-x}=x$

23 פתרו: $x+\sqrt{x+1}=5$

24 פתרו: $\sqrt{x-3}+1=x-4$

25 פתרו: $\sqrt{9-x^2}=x+3$

26 פתרו: $\sqrt{2x^2-7}=x$

27 פתרו: $\sqrt{x+10}=x-2$

28 פתרו: $\sqrt{x}=\frac{x}{3}$

29 מהו התחום שבו מוגדר הביטוי $\sqrt{8-2x}$?

30 מצאו את התחום שבו המשוואה $\sqrt{x+4}=x-2$ יכולה להתקיים (לפני פתרון), ואז פתרו.

31 הסבירו מדוע $x=-1$ אינו פתרון של $\sqrt{x+2}=x$, למרות שהוא פותר את המשוואה אחרי ההעלאה בריבוע.

32 פתרו: $\sqrt{x+3}=\frac{x+3}{2}$

33 פתרו: $\sqrt{x}=\frac{x}{2}-4$

✔ תשובות סופיות – נושא 1.7

1	$x = 25$
2	$x = 13$
3	$x = 5$
4	אין פתרון
5	$x = 2$
6	$x = 16$
7	$x = 2$
8	$x = 3$
9	$x = 3$
10	$x = 3$
11	$x = 9$
12	$x = 4$
13	$x_1 = -4\ ,x_2 = 4$
14	$x_1 = -4\ ,x_2 = 4$
15	$x = 2$
16	$x = 4$
17	$x = 3$
18	$x = 2$
19	$x = 4$
20	$x_1 = -1\ ,x_2 = 3$
21	$x = 0$
22	$x = 2$
23	$x = 3$

24 $x = 7$

25 $x_1 = -3\ ,\ x_2 = 0$

26 $x = \sqrt{7}$

27 $x = 6$

28 $x_1 = 0\ ,\ x_2 = 9$

29 $x \leq 4$

30 $x = 5\ ;\ x \geq 2$

31 $\sqrt{1} = 1 \neq -1$ – פתרון זר

32 $x_1 = -3\ ,\ x_2 = 1$

33 $x = 16$

1.8 אי-שוויונות – קווי, ריבועי, שברים, "או" ו"וגם"

קווי – כפל/חילוק במספר שלילי הופך את הסימן. ריבועי – שורשים וסקיצה של פרבולה.
שבר – לא כופלים במכנה, בונים טבלת סימנים. "וגם" – חיתוך, "או" – איחוד.

צפו לפני שמתחילים:



פתרון אי-שוויון ריבועי
YouTube · 9:36



אי-שוויונות – ניווט בין הסוגים
YouTube · 8:42

1 פתרו: $3x - 5 > 7$

2 היפוך כיוון: $-2x + 4 \leq 10$

3 פתרו: $\frac{x}{3} - 1 < \frac{x}{2}$

4 פתרו: $5(x - 1) \geq 2x + 7$

5 מערכת "וגם": $x > -2$ וגם $x \leq 5$. הציגו על ציר המספרים.

6 "וגם": $2x - 1 > 3$ וגם $x + 4 < 10$

7 "או": $x < -1$ או $x \geq 3$ – האם $x = 0$ מקיים? ומה עם $x = 3$?

8 "וגם" ללא פתרון? $x > 4$ וגם $x < 1$

9 "או" שמכסה הכול? $x > 1$ או $x < 5$

10 פתרו: $-3 < 2x + 1 \leq 7$

11 ריבועי: $x^2 - 9 > 0$

12 ריבועי: $x^2 - 4x < 0$

13 פתרו: $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

14 פתרו: $x^2 + 2x - 8 > 0$

15 מקדם שלילי: $-x^2 + x + 6 \geq 0$

16 פתרו: $x^2 < 16$

17 פתרו: $x^2 \geq 5x$

18 פתרו: $2x^2 - x - 3 > 0$

19 דיסקרימיננטה שלילית: $x^2 + x + 3 > 0$

20 דיסקרימיננטה שלילית: $x^2 + 2x + 5 < 0$

21 ריבוע שלם: $x^2 - 6x + 9 > 0$

22 ריבוע שלם: $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

23 העבירו אגפים: $x^2 > 2x + 3$

24 פתרו: $(x-1)(x+4) \leq 6$

25 שבר: $\frac{x-2}{x+3} > 0$

26 שבר: $\frac{x+1}{x-4} \leq 0$

27 שבר עם מונה קבוע: $\frac{3}{x-1} < 0$

28 אל תכפילו במכנה! $\frac{2x}{x+1} > 1$

29 פתרו: $\frac{x}{x-2} \geq 2$

30 שבר עם מכנה ריבועי: $\frac{x-3}{x^2+1} < 0$

31 פולינום ממעלה 3: $x(x-2)(x+3) > 0$

32 מערכת: $x^2 - 4 > 0$ וגם $x < 5$

33 לאילו ערכי x הביטוי $\sqrt{x^2 - x - 12}$ מוגדר?

34 מצאו את המספרים השלמים המקיימים $x^2 - 3x - 4 < 0$.

✔ תשובות סופיות – נושא 1.8

1	$x > 4$
2	$x \geq -3$
3	$x > -6$
4	$x \geq 4$
5	$-2 < x \leq 5$
6	$2 < x < 6$
7	0 – לא ; 3 – כן
8	אין פתרון
9	לכל x
10	$-2 < x \leq 3$
11	$x < -3$ או $x > 3$
12	$0 < x < 4$
13	$2 \leq x \leq 3$
14	$x < -4$ או $x > 2$
15	$-2 \leq x \leq 3$
16	$-4 < x < 4$
17	$x \leq 0$ או $x \geq 5$
18	$x < -1$ או $x > \frac{3}{2}$
19	לכל x
20	אין פתרון
21	$x \neq 3$
22	$x = 3$
23	$x < -1$ או $x > 3$

24	$-5 \leq x \leq 2$
25	$x < -3$ או $x > 2$
26	$-1 \leq x < 4$
27	$x < 1$
28	$x < -1$ או $x > 1$
29	$2 < x \leq 4$
30	$x < 3$
31	$-3 < x < 0$ או $x > 2$
32	$x < -2$ או $2 < x < 5$
33	$x \leq -3$ או $x \geq 4$
34	$0, 1, 2, 3$

1.9 משוואות עם פרמטרים

פרמטר הוא מספר קבוע לא ידוע. במשוואה ריבועית מספר הפתרונות נקבע לפי Δ; אם נתון פתרון – מציבים אותו ומוצאים את הפרמטר.

צפו לפני שמתחילים:



משוואות ממעלה ראשונה עם פרמטרים
YouTube · 4:29



משוואה ממעלה שנייה עם פרמטרים
YouTube · 7:55

1 פתרו את המשוואה $ax=6$ עבור $a\neq 0$. מה קורה כאשר $a=0$?

2 פתרו: $2x+m=8$ (הביעו את x בעזרת m).

3 פתרו: $kx-3=x+5$ עבור $k\neq 1$.

4 לאיזה ערך של m הפתרון של $3x-m=5$ הוא $x=4$?

5 לאיזה ערך של a המשוואה $(a-2)x=a+3$ אין לה פתרון?

6 מצאו את k אם $x=2$ הוא פתרון של $x^2+kx-10=0$.

7 מצאו את m אם $x=-1$ הוא פתרון של $2x^2-mx+3=0$, ומצאו את הפתרון השני.

8 לאילו ערכי k למשוואה $x^2+6x+k=0$ יש שני פתרונות שונים?

9 לאיזה ערך של k למשוואה $x^2-8x+k=0$ יש פתרון יחיד? מהו הפתרון?

10 לאילו ערכי k למשוואה $x^2+4x+k=0$ אין פתרון?

11 לאילו ערכי b למשוואה $x^2+bx+9=0$ יש פתרון יחיד?

12 לאילו ערכי m למשוואה $mx^2-4x+1=0$ יש שני פתרונות שונים? ($m\neq 0$)

13 לאילו ערכי a למשוואה $2x^2-ax+2=0$ אין פתרון?

14 לאיזה ערך של k הפתרונות של $x^2-kx+12=0$ הם 3 ו-4?

15 למשוואה $x^2-10x+m=0$ פתרון אחד גדול פי 4 מהשני. מצאו את m.

16 למשוואה $x^2+px+q=0$ הפתרונות -2 ו-5. מצאו את p ואת q.

17 מצאו את k כך שהפרבולה $y=x^2-2x+k$ תשיק לציר x.

18 לאילו ערכי k הישר $y=k$ חותך את הפרבולה $y=x^2-4x$ בשתי נקודות?

19 לאיזה ערך של m הישר $y=2x+m$ משיק לפרבולה $y=x^2$?

20 פתרו את המערכת $\begin{cases}x+y=a\\x-y=4\end{cases}$ (הביעו בעזרת a).

21 לאיזה ערך של a למערכת $\begin{cases}2x+ay=4\\x+3y=2\end{cases}$ יש אינסוף פתרונות?

22 לאיזה ערך של a למערכת $\begin{cases}ax+2y=5\\3x+y=1\end{cases}$ אין פתרון?

23 לאילו ערכי t הביטוי $x^2-2tx+9$ חיובי לכל x?

24 מצאו את a אם $x=3$ פותר את $\frac{a}{x-1}=2$.

25 לאיזה a המשוואה $\sqrt{x+a}=3$ פתרונה $x=5$?

26 מצאו c כך שלמשוואה $x^2+2x+c=0$ אחד הפתרונות הוא 0, ומצאו את הפתרון השני.

27 לאילו ערכי k למשוואה $(k-1)x^2+2x+1=0$ יש פתרון יחיד? (בדקו גם $k=1$)

28 למשוואה $x^2-(m+1)x+m=0$ הראו ש-$x=1$ תמיד פתרון, ומצאו את הפתרון השני.

29 לאילו ערכי m הישר $y=mx$ חותך את הפרבולה $y=x^2+1$?

30 מצאו את k אם סכום הפתרונות של $x^2-kx+5=0$ הוא 6 (הפתרונות ממשיים).

31 מצאו את b אם לפרבולה $y=x^2+bx+5$ קודקוד ב-$x=2$.

32 לאיזה ערך של a לשתי המשוואות $x^2-a=0$ ו-$x-3=0$ יש פתרון משותף?

✔ תשובות סופיות – נושא 1.9

1	$x=\frac{6}{a}$; עבור $a=0$ אין פתרון
2	$x=\frac{8-m}{2}$
3	$x=\frac{8}{k-1}$
4	$m=7$
5	$a=2$
6	$k=3$
7	$m=-5$; $x=-\frac{3}{2}$
8	$k<9$
9	$k=16$; $x=4$
10	$k>4$
11	$b=6$ או $b=-6$
12	$m<4$,$m\neq 0$
13	$-4<a<4$
14	$k=7$
15	$m=16$
16	$p=-3$,$q=-10$
17	$k=1$
18	$k>-4$
19	$m=-1$
20	$x=\frac{a+4}{2}$,$y=\frac{a-4}{2}$
21	$a=6$
22	$a=6$
23	$-3<t<3$

24	$a=4$
25	$a=4$
26	$x=-2\ ;\ c=0$
27	$k=1$ (פתרון $x=-\frac{1}{2}$) או $k=2$ (פתרון $x=-1$)
28	$x=m$
29	$m\le -2$ או $m\ge 2$
30	$k=6$
31	$b=-4$
32	$a=9$

פרק 1 סיכומון סוף פרק – הבסיס – אלגברה

סדר פעולות ומספרים מכוונים

- סוגריים ← חזקות ושורשים ← כפל וחילוק ← חיבור וחיסור (משמאל לימין).
- מינוס כפול מינוס – פלוס; $(-a)^2 = a^2$ אבל $-a^2 = -(a^2)$.

חזקות ושורשים

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$.
- $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

פירוק לגורמים

- גורם משותף ← כפל מקוצר ← טרינום ← קבוצות.
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
- $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

משוואה ריבועית

- $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$.
- $\Delta > 0$ – שני פתרונות, $\Delta = 0$ – אחד, $\Delta < 0$ – אין.

מערכות משוואות

- קווית: השוואת מקדמים או הצבה.
- קווית + ריבועית: מבודדים נעלם מהקווית ומציבים בשנייה.

מעלות גבוהות ומשתנה עזר

- גורם משותף או קבוצות, ואז "מכפלה $= 0$".
- דו-ריבועית: $t = x^2$, ופוסלים $t < 0$.

שברים ושורשים

- תחום הגדרה: מכנה $\neq 0$; פסלו פתרון שמאפס מכנה.
- שורש: מבודדים, מעלים בריבוע – **ובודקים** בהצבה.

אי-שוויונות

- כפל במספר שלילי הופך את סימן אי-השוויון.
- ריבועי – לפי סקיצת פרבולה; שבר – טבלת סימנים.
- "וגם" – חיתוך, "או" – איחוד.

פרמטרים

- ריבועית: מספר הפתרונות לפי Δ.
- נתון פתרון – מציבים אותו ומוצאים את הפרמטר.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$ – לא לשכוח את $2ab$.
- לחלק ב-x במשוואה כמו $x^2 = 5x$ ולאבד את $x = 0$.
- לא לבדוק פתרון במשוואה עם שורש או פתרון שמאפס מכנה.
- לכפול אי-שוויון במכנה בלי לדעת את סימנו.

💡 **הטיפ של אילון:** לפני כל תרגיל שאלו: אפשר לפרק לגורמים? ברוב המקרים הפירוק הוא חצי מהפתרון.

פרק 2

הבסיס – קו ישר

מערכת צירים, שיפוע, משוואת ישר ונקודות חיתוך – הבסיס לגיאומטריה האנליטית ולחקירות

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

2.1 מערכת צירים, משוואת ישר ונקודות חיתוך

37 תרגילים

סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

קורס הקו הישר – מבוא
YouTube · 6:25

קורס קו ישר – הביטוי y=mx+b
YouTube · 4:16

קורס הקו הישר – נקודת חיתוך בין ישרים
YouTube · 2:40

המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

מעבדת הקו הישר
שנו שיפוע ונקודת חיתוך עם ציר y וראו איך הישר זז ואיפה הוא חותך את הצירים.

2.1 מערכת צירים, משוואת ישר ונקודות חיתוך

שיפוע: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. משוואת ישר: $y=mx+b$ או $y-y_1=m(x-x_1)$. חיתוך עם ציר y – מציבים $x=0$; עם ציר x – מציבים $y=0$; בין שני ישרים – משווים את ה-y-ים.

צפו לפני שמתחילים:

קורס הקו הישר – מבוא
YouTube · 6:25

קורס קו ישר – השיפוע
YouTube · 6:42

איך מוצאים משוואת ישר?
YouTube · 6:50

קורס הקו הישר – נקודות חיתוך עם הצירים
YouTube · 3:58

1. באיזה רביע נמצאת כל אחת מהנקודות $A(3,-2)$, $B(-1,-5)$, $C(-4,2)$?
2. נקודה נמצאת על ציר x, משמאל לראשית, במרחק 5 ממנה. מהם שיעוריה?
3. מה שיעור ה-x של כל נקודה הנמצאת על ציר y?
4. הנקודה $(a+1,4)$ נמצאת על ציר y. מצאו את a.
5. מצאו את שיפוע הישר העובר דרך $A(2,1)$ ו-$B(5,10)$.
6. מצאו את שיפוע הישר העובר דרך $A(-1,6)$ ו-$B(3,-2)$. האם הישר עולה או יורד?
7. מצאו את שיפוע הישר העובר דרך $A(-2,3)$ ו-$B(4,3)$, וכתבו את משוואתו.
8. הישר עובר דרך $A(4,-2)$ ו-$B(4,5)$. כתבו את משוואתו. האם יש לו שיפוע?
9. מה השיפוע ומה נקודת החיתוך עם ציר y של $y=5x-3$?
10. כתבו את $3y-6x=9$ בצורה $y=mx+b$.

11 מצאו את שיפוע הישר $2x+5y=10$.

12 כתבו את משוואת הישר ששיפועו 3 ועובר בנקודה $(1,5)$.

13 כתבו את משוואת הישר ששיפועו -2 ועובר בנקודה $(-3,4)$.

14 כתבו את משוואת הישר ששיפועו $\frac{1}{2}$ ועובר בנקודה $(4,0)$.

15 כתבו את משוואת הישר העובר דרך $A(1,2)$ ו-$B(3,8)$.

16 כתבו את משוואת הישר העובר דרך $A(-2,7)$ ו-$B(2,-1)$.

17 כתבו את משוואת הישר העובר דרך הראשית ודרך $(2,-6)$.

18 כתבו את משוואת הישר העובר דרך $(0,4)$ ו-$(2,0)$.

19 כתבו את משוואת הישר העובר דרך $(-3,-1)$ ו-$(3,3)$.

20 האם הנקודה $(2,7)$ נמצאת על הישר $y=3x+1$? ומה עם $(-1,-3)$?

21 הנקודה $(k,5)$ נמצאת על הישר $y=2x-3$. מצאו את k.

22 הנקודה $(3,t)$ נמצאת על הישר $y=-x+8$. מצאו את t.

23 הישר $y=mx+2$ עובר בנקודה $(2,8)$. מצאו את m.

24 מצאו את נקודות החיתוך של $y=2x-6$ עם הצירים.

25 מצאו את נקודות החיתוך של $y=-\frac{1}{3}x+2$ עם הצירים.

26 מצאו את נקודות החיתוך של $4x+3y=12$ עם הצירים.

27 מצאו את נקודת החיתוך של הישרים $y=x+1$ ו-$y=-2x+7$.

28 מצאו את נקודת החיתוך של הישרים $y=3x-4$ ו-$y=x+2$.

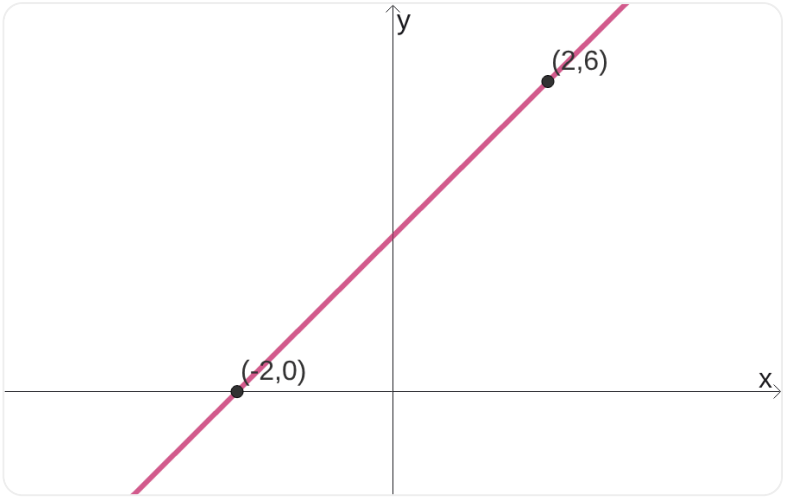
29 מצאו את נקודת החיתוך של $y=2x+1$ עם הישר $y=5$.

30 מצאו את נקודת החיתוך של $y=-x+4$ עם הישר $x=-1$.

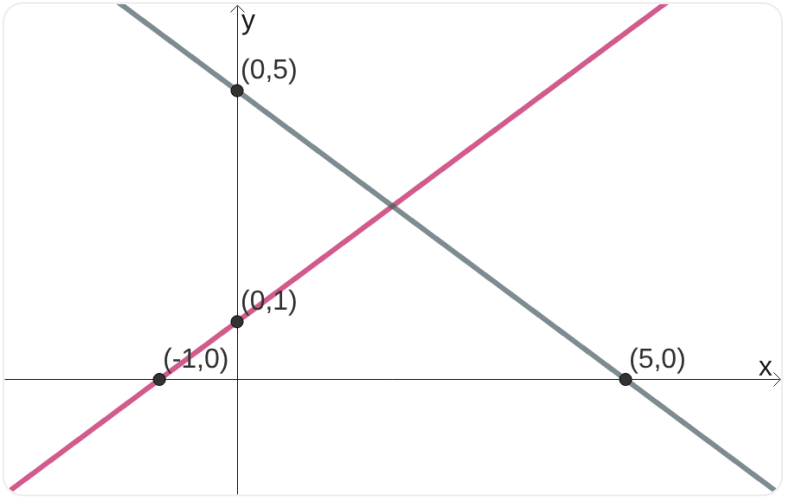
31 הסבירו מדוע לישרים $y=2x+1$ ו-$y=2x-3$ אין נקודת חיתוך.

32 כתבו את משוואת הישר המקביל ל-$y=-3x+5$ ועובר בנקודה $(1,1)$.

33 בציור ישר העובר בשתי הנקודות המסומנות. מצאו את משוואתו.



34 בציור שני ישרים. מצאו את משוואת כל אחד מהם ואת נקודת החיתוך ביניהם.



35 בציור הישר $y=-\frac{1}{2}x+3$, החותך את הצירים בנקודות A ו-B. מצאו את שיעורי A ו-B ואת שטח המשולש AOB.



36 ישר עובר דרך $(1,3)$ ונקודת החיתוך שלו עם ציר y היא $(0,5)$. כתבו את משוואתו ומצאו את החיתוך עם ציר x.

37 הישרים $y=x$, $y=-x+6$ וציר x יוצרים משולש. מצאו את קודקודיו ואת שטחו.

✔ תשובות סופיות – נושא 2.1

1	A – רביע רביעי, B – רביע שלישי, C – רביע שני
2	$(-5,0)$
3	$x=0$
4	$a=-1$
5	$m=3$
6	$m=-2$; יורד
7	$m=0$; $y=3$
8	$x=4$; ישר אנכי – אין שיפוע
9	$m=5$; $(0,-3)$
10	$y=2x+3$
11	$m=-\frac{2}{5}$
12	$y=3x+2$
13	$y=-2x-2$
14	$y=\frac{1}{2}x-2$
15	$y=3x-1$
16	$y=-2x+3$
17	$y=-3x$
18	$y=-2x+4$
19	$y=\frac{2}{3}x+1$
20	$(2,7)$ – כן ; $(-1,-3)$ – לא
21	$k=4$
22	$t=5$
23	$m=3$

24 ציר x: $(3,0)$; ציר y: $(0,-6)$

25 ציר x: $(6,0)$; ציר y: $(0,2)$

26 ציר x: $(3,0)$; ציר y: $(0,4)$

27 $(2,3)$

28 $(3,5)$

29 $(2,5)$

30 $(-1,5)$

31 אותו שיפוע – ישרים מקבילים

32 $y=-3x+4$

33 $y=\frac{3}{2}x+3$

34 $y=x+1$; $y=-x+5$; $(2,3)$

35 $A(6,0)$,$B(0,3)$; שטח 9

36 $y=-2x+5$; $(\frac{5}{2},0)$

37 $(0,0)$,$(6,0)$,$(3,3)$; שטח 9

פרק 2 סיכומון סוף פרק – הבסיס – קו ישר

מערכת צירים

- נקודה (x,y): קודם שיעור ה-x ואחר כך שיעור ה-y.
- על ציר x: $y=0$; על ציר y: $x=0$.

נקודה על ישר

- נקודה על הישר $\iff$ שיעוריה מקיימים את המשוואה.
- פרמטר חסר – מציבים את הנקודה ופותרים.

שיפוע

- $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.
- $m>0$ – עולה, $m<0$ – יורד, $m=0$ – ישר אופקי $y=c$.
- ישר אנכי $x=c$ – אין לו שיפוע.

נקודות חיתוך

- עם ציר y: $x=0$; עם ציר x: $y=0$.
- בין שני ישרים: משווים את ה-y-ים ומוצאים x.
- שיפועים שווים – מקבילים, אין חיתוך.

משוואת ישר

- $y=mx+b$: m – שיפוע, b – חיתוך עם ציר y.
- מנקודה ושיפוע: $y-y_1=m(x-x_1)$.
- משתי נקודות: מחשבים שיפוע, ואז מציבים נקודה.

שטח משולש עם הצירים

- מוצאים את החיתוכים $(a,0)$, $(0,b)$.
- שטח $=\frac{|a|\cdot|b|}{2}$.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- להחליף בין x ל-y בנוסחת השיפוע (מונה ומכנה).
- לשכוח את המינוס כשמעבירים $3y-6x=9$ לצורה $y=mx+b$.
- לחשוב ש-$x=4$ הוא ישר אופקי – זה ישר אנכי!

💡 **הטיפ של אילון:** לפני שמתחילים – שרטטו סקיצה של הנקודות. היא מראה מיד אם השיפוע חיובי או שלילי, ומונעת טעויות סימן.

פרק 3

הבסיס – פרבולה

שלוש הצגות של פרבולה, חקירה מלאה ופגישה של פרבולה עם ישר

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

3.1 **קודקוד, נקודות חיתוך, תחומי חיוביות ושליליות** — 33 תרגילים

3.2 **תחומי עלייה וירידה וחקירת פרבולה** — 34 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

פרבולה – סיכום מלא מהבסיס ועד חקירה
YouTube · 17:14

פרבולה – מעבר בין ייצוגים
YouTube · 6:27

פרבולה – ייצוג סטנדרטי
YouTube · 11:27

🧩 המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

מעבדת הפרבולה
הזיזו את a, p, k בהצגה הקודקודית וראו את הקודקוד, החיתוכים ותחום החיוביות.

3.1 קודקוד, נקודות חיתוך, תחומי חיוביות ושליליות

הצגה סטנדרטית $f(x)=ax^2+bx+c$, קודקודית $f(x)=a(x-p)^2+k$, כפלית $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$. שיעור ה-x של הקודקוד: $x=-\frac{b}{2a}$. $a>0$ – פרבולה מחייכת, $a<0$ – בוכה.

צפו לפני שמתחילים:

פרבולה – מבוא
YouTube · 6:48

פרבולה – הצגה קודקודית
YouTube · 8:10

פרבולה – ייצוג כפלי
YouTube · 3:01

פרבולה – נקודות סימטריות
YouTube · 5:44

1. האם הפרבולה $f(x)=-2x^2+3x+1$ "מחייכת" או "בוכה"? נמקו.
2. מצאו את הקודקוד של $f(x)=x^2-6x+5$.
3. מצאו את הקודקוד של $f(x)=-x^2+4x+1$.
4. מצאו את הקודקוד של $f(x)=2x^2+8x$.
5. מהו הקודקוד של $f(x)=(x-3)^2+2$? (הצגה קודקודית)
6. מהו הקודקוד של $f(x)=-2(x+1)^2+8$?
7. מצאו את נקודות החיתוך של $f(x)=x^2-x-12$ עם הצירים.
8. מצאו את נקודות החיתוך של $f(x)=-x^2+9$ עם הצירים.
9. מצאו את נקודות החיתוך של $f(x)=x^2-4x$ עם הצירים.

10 מצאו את נקודות החיתוך של $f(x)=(x-2)(x+5)$ עם ציר x – בלי לפתוח סוגריים.

11 לפרבולה $f(x)=x^2-6x+9$ יש נקודת חיתוך אחת עם ציר x. מצאו אותה. מה המיוחד בה?

12 הראו שלפרבולה $f(x)=x^2+2x+5$ אין נקודות חיתוך עם ציר x, ומצאו את נקודת החיתוך עם ציר y.

13 מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)=x^2-5x+4$.

14 מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)=-x^2+2x+8$.

15 מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)=x^2-9x$.

16 מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)=2x^2+x-1$.

17 מתי הפונקציה $f(x)=x^2-8x+16$ חיובית? והאם היא שלילית אי-פעם?

18 מתי הפונקציה $f(x)=-x^2-1$ חיובית? ומתי שלילית?

19 פתחו סוגריים ועברו להצגה סטנדרטית: $f(x)=2(x-1)^2-3$.

20 עברו להצגה קודקודית (השלמה לריבוע): $f(x)=x^2+6x+5$.

21 כתבו בהצגה כפלית: $f(x)=x^2-2x-15$.

22 הנקודות $(1,0)$ ו-$(7,0)$ על פרבולה. מהו שיעור ה-x של הקודקוד? (נקודות סימטריות)

23 הנקודות $(-2,5)$ ו-$(6,5)$ נמצאות על פרבולה. מהו ציר הסימטריה שלה?

24 כתבו פרבולה שקודקודה $(2,-3)$ ושהמקדם של x^2 בה הוא 1.

25 מצאו פרבולה $f(x)=a(x-1)^2+4$ העוברת בנקודה $(3,0)$.

26 מצאו פרבולה שנקודות החיתוך שלה עם ציר x הן $(-1,0)$ ו-$(3,0)$ והיא עוברת ב-$(0,-6)$.

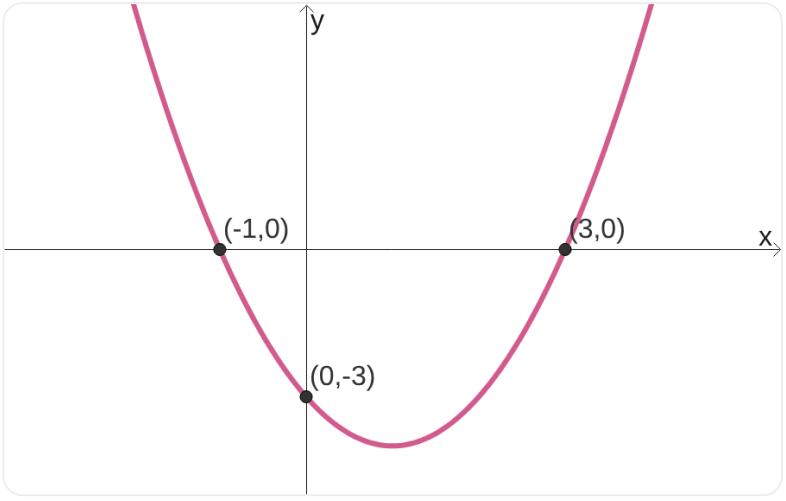
27 מצאו את c אם הפרבולה $f(x)=x^2-4x+c$ עוברת בנקודה $(1,2)$.

28 מצאו את b אם לפרבולה $f(x)=x^2+bx+3$ קודקוד ב-$x=-3$.

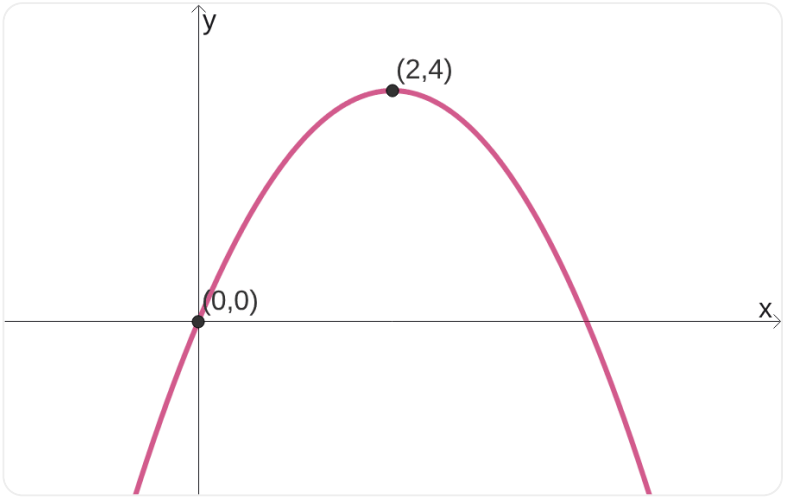
29 מהו הערך הקטן ביותר של $f(x)=x^2-10x+30$, ועבור איזה x הוא מתקבל?

30 מהו הערך הגדול ביותר של $f(x)=-x^2+6x$?

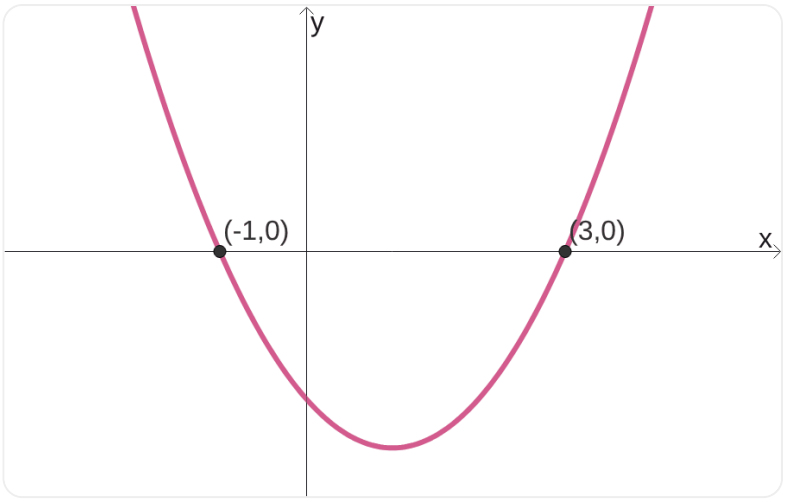
31 בציור פרבולה. מצאו את הפונקציה שלה בהצגה כפלית בעזרת הנקודות המסומנות.



32 בציור פרבולה שקודקודה מסומן. מצאו את הפונקציה בהצגה קודקודית ואת נקודות החיתוך עם ציר x.



33 בציור הפרבולה $f(x)=x^2-2x-3$. מצאו מהגרף ומהחישוב את תחום השליליות.



✔ תשובות סופיות – נושא 3.1

1. בוכה, כי $a=-2<0$
2. $(3,-4)$
3. $(2,5)$
4. $(-2,-8)$
5. $(3,2)$
6. $(-1,8)$
7. ציר x: $(-3,0)$, $(4,0)$; ציר y: $(0,-12)$
8. ציר x: $(-3,0)$, $(3,0)$; ציר y: $(0,9)$
9. ציר x: $(0,0)$, $(4,0)$; ציר y: $(0,0)$
10. $(-5,0)$, $(2,0)$
11. $(3,0)$ – זה גם הקודקוד; הפרבולה משיקה לציר
12. $\Delta=-16<0$; $(0,5)$
13. חיובית: $x<1$ או $x>4$; שלילית: $1<x<4$
14. חיובית: $-2<x<4$; שלילית: $x<-2$ או $x>4$
15. חיובית: $x<0$ או $x>9$; שלילית: $0<x<9$
16. חיובית: $x<-1$ או $x>\frac{1}{2}$; שלילית: $-1<x<\frac{1}{2}$
17. חיובית: $x\neq 4$; אף פעם לא שלילית
18. אף פעם חיובית ; שלילית לכל x
19. $f(x)=2x^2-4x-1$
20. $f(x)=(x+3)^2-4$
21. $f(x)=(x-5)(x+3)$
22. $x=4$
23. $x=2$

24 $f(x)=(x-2)^2-3$

25 $f(x)=-(x-1)^2+4\ ;\ a=-1$

26 $f(x)=2(x+1)(x-3)$

27 $c=5$

28 $b=6$

29 $x=5\ ;\ 5$

30 9 (ב-$x=3$)

31 $f(x)=(x+1)(x-3)$

32 $f(x)=-(x-2)^2+4\ ;\ (0,0)\ ,(4,0)$

33 $-1<x<3$

3.2 תחומי עלייה וירידה וחקירת פרבולה

פרבולה מחייכת יורדת משמאל לקודקוד ועולה מימינו; בוכה – להפך. חקירה מלאה: קודקוד, חיתוכים עם הצירים, חיוביות ושליליות, עלייה וירידה – וסקיצה. חיתוך עם ישר: משווים ופותרים משוואה ריבועית.

צפו לפני שמתחילים:

פרבולה – עלייה, ירידה, חיוביות ושליליות
YouTube · 12:50

פרבולה – חקירה בהצגה הקודקודית
YouTube · 16:27

חיתוך בין פרבולה וישר וחיתוך בין פרבולות
YouTube · 10:37

פרבולה – סיכום מלא מהבסיס ועד חקירה
YouTube · 17:14

1. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)=x^2-4x+1$.
2. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)=-x^2-6x$.
3. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)=3x^2-12$.
4. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)=-2(x-5)^2+1$ בלי לפתוח סוגריים.
5. בצעו חקירה מלאה של $f(x)=x^2-2x-8$: קודקוד, חיתוכים, חיוביות ושליליות, עלייה וירידה. סרטטו סקיצה.
6. בצעו חקירה מלאה של $f(x)=-x^2+4x+5$ וסרטטו סקיצה.
7. בצעו חקירה מלאה של $f(x)=x^2+4x+4$. מה מיוחד בפרבולה זו?
8. בצעו חקירה מלאה של $f(x)=x^2-2x+3$. האם הפרבולה חותכת את ציר x?
9. בתחום $x<2$ פרבולה עולה ובתחום $x>2$ היא יורדת. מה שיעור ה-x של הקודקוד, והאם הפרבולה מחייכת או בוכה?

10 הפרבולה $f(x)=ax^2+bx+c$ יורדת לכל $x<-1$ ועולה לכל $x>-1$. מה ניתן לומר על הסימן של a?

11 מצאו את נקודות החיתוך של הפרבולה $f(x)=x^2-3$ והישר $y=2x$.

12 מצאו את נקודות החיתוך של $f(x)=x^2-4x+6$ והישר $y=x+2$.

13 הראו שהישר $y=2x-1$ משיק לפרבולה $f(x)=x^2$, ומצאו את נקודת ההשקה.

14 הראו שהישר $y=x-5$ אינו חותך את הפרבולה $f(x)=x^2+1$.

15 מצאו את נקודות החיתוך של שתי הפרבולות $f(x)=x^2-2$ ו-$g(x)=-x^2+6$.

16 מצאו את נקודות החיתוך של $f(x)=x^2+x$ ו-$g(x)=2x^2-x-3$.

17 לאילו ערכי x הפרבולה $f(x)=x^2-1$ נמצאת מעל הישר $y=x+1$?

18 לאילו ערכי x הפרבולה $f(x)=-x^2+5$ נמצאת מעל הישר $y=4$?

19 לאילו ערכי k הישר $y=k$ חותך את $f(x)=x^2-6x+5$ בשתי נקודות?

20 לאילו ערכי k הישר $y=k$ אינו פוגש את $f(x)=-x^2+2x+3$?

21 מצאו את m כך שהישר $y=m$ ישיק לפרבולה $f(x)=2x^2-8x+11$.

22 הקודקוד של $f(x)=x^2+bx+c$ הוא $(3,-1)$. מצאו את b ואת c.

23 הפרבולה $f(x)=-x^2+bx+c$ חותכת את ציר x ב-$x=1$ וב-$x=5$. מצאו את b, c ואת הקודקוד.

24 הפרבולה $f(x)=ax^2+4x+1$ עוברת בנקודה $(1,3)$. מצאו את a ואת תחומי העלייה והירידה.

25 שתי פרבולות: $f(x)=(x-1)^2$ ו-$g(x)=(x-1)^2+3$. מה הקשר בין הגרפים ומה הקודקוד של כל אחת?

26 הפרבולה $f(x)=x^2$ הוזזה 2 ימינה ו-5 למטה. כתבו את הפרבולה החדשה ומצאו את הקודקוד שלה.

27 מלבן שהיקפו 20 ס"מ: הביעו את שטחו $S(x)$ כפונקציה של אחת הצלעות x, ומצאו את השטח המקסימלי.

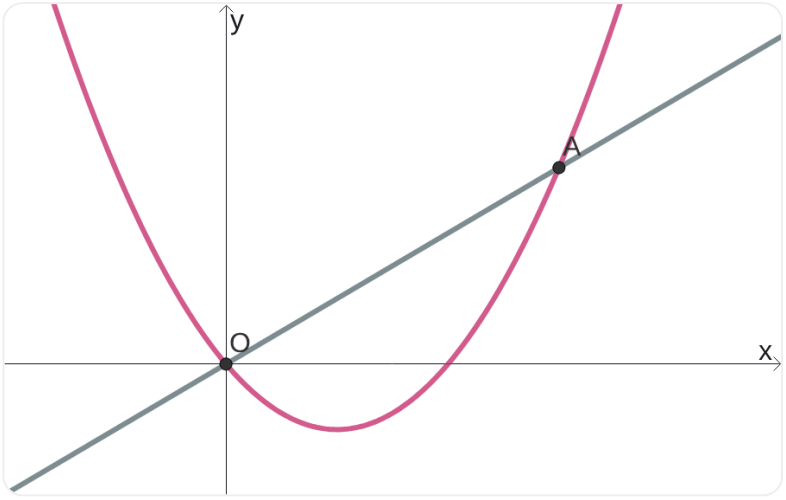
28 כדור נזרק ונמצא בגובה $h(t)=-5t^2+20t$ מטר אחרי t שניות. מה הגובה המקסימלי ומתי הכדור חוזר לקרקע?

29 מצאו את שני המספרים שסכומם 14 ומכפלתם מקסימלית.

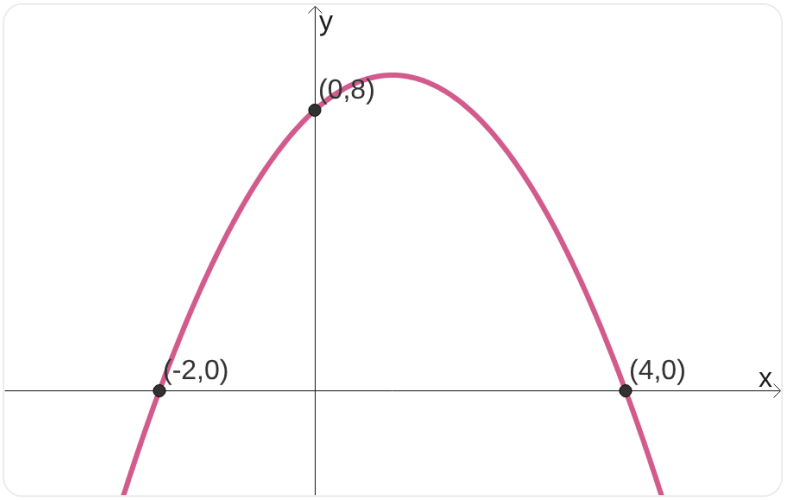
30 לפרבולה $f(x)=x^2-4x+3$ ולישר $y=x-1$ יש שתי נקודות חיתוך A ו-B. מצאו אותן ואת אמצע הקטע AB.

31 הפרבולה $f(x)=-x^2+6x$ חותכת את ציר x בנקודות O ו-A, וקודקודה B. מצאו את שטח המשולש OAB.

32 בציור פרבולה וישר. מצאו את נקודות החיתוך ביניהם, אם הפרבולה $f(x)=x^2-2x$ והישר $y=x$.



33 בציור פרבולה העוברת דרך הנקודות המסומנות. מצאו את הפונקציה, ואת התחום שבו היא עולה.



34 לאילו ערכי x מתקיים $x^2-4x\le -3$? פתרו בעזרת סקיצה של $f(x)=x^2-4x$ והישר $y=-3$.

✔ תשובות סופיות – נושא 3.2

1. קודקוד $(2,-3)$; עלייה: $x>2$; ירידה: $x<2$
2. קודקוד $(-3,9)$; עלייה: $x<-3$; ירידה: $x>-3$
3. קודקוד $(0,-12)$; עלייה: $x>0$; ירידה: $x<0$
4. קודקוד $(5,1)$; עלייה: $x<5$; ירידה: $x>5$
5. קודקוד $(1,-9)$; עלייה: $x>1$; ירידה: $x<1$; חיתוכים: $(-2,0)$, $(4,0)$, $(0,-8)$; חיובית: $x<-2$ או $x>4$; שלילית: $-2<x<4$
6. קודקוד $(2,9)$; עלייה: $x<2$; ירידה: $x>2$; חיתוכים: $(-1,0)$, $(5,0)$, $(0,5)$; חיובית: $-1<x<5$; שלילית: $x<-1$ או $x>5$
7. קודקוד $(-2,0)$; עלייה: $x>-2$; ירידה: $x<-2$; משיקה לציר x בקודקוד ; חיובית: $x\neq -2$
8. קודקוד $(1,2)$; עלייה: $x>1$; ירידה: $x<1$; אין חיתוך עם ציר x ; חיובית לכל x ; חיתוך עם y: $(0,3)$
9. $x=2$; בוכה
10. $a>0$
11. $(-1,-2)$, $(3,6)$
12. $(1,3)$, $(4,6)$
13. $x^2-2x+1=0$ – פתרון יחיד ; $(1,1)$
14. $x^2-x+6=0$, $\Delta=-23<0$
15. $(-2,2)$, $(2,2)$
16. $(-1,0)$, $(3,12)$
17. $x<-1$ או $x>2$
18. $-1<x<1$
19. $k>-4$
20. $k>4$

21 $m = 3$

22 $b = -6$, $c = 8$

23 $b = 6$, $c = -5$; $(3, 4)$

24 $a = -2$; עלייה: $x < 1$; ירידה: $x > 1$

25 $g(x)$ מוזזת 3 למעלה ; $(1, 0)$ ו-$(1, 3)$

26 $g(x) = (x - 2)^2 - 5$; $(2, -5)$

27 $S(x) = x(10 - x)$; 25 סמ"ר (ב-$x = 5$)

28 20 מ' (ב-$t = 2$) ; $t = 4$

29 7 ו-7 (מכפלה 49)

30 $A(1, 0)$, $B(4, 3)$; $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$

31 $O(0, 0)$, $A(6, 0)$, $B(3, 9)$; שטח 27

32 $(0, 0)$, $(3, 3)$

33 $f(x) = -(x + 2)(x - 4)$; עלייה: $x < 1$

34 $1 \leq x \leq 3$

פרק 3 סיכומון סוף פרק – הבסיס – פרבולה

שלוש הצגות

- סטנדרטית: $f(x)=ax^2+bx+c$ – חיתוך עם ציר y הוא $(0,c)$.
- קודקודית: $f(x)=a(x-p)^2+k$ – הקודקוד (p,k).
- כפלית: $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ – החיתוכים עם ציר x.

הקודקוד

- $x_v=-\frac{b}{2a}$, ואת y מציבים בפונקציה.
- שתי נקודות עם אותו y – הקודקוד באמצע ביניהן.
- $a>0$ – הקודקוד מינימום; $a<0$ – מקסימום.

חיתוכים עם הצירים

- ציר y: מציבים $x=0$.
- ציר x: פותרים $f(x)=0$ – לפי Δ: 2, 1 (השקה) או 0 נקודות.

חיוביות ושליליות

- מחייכת: חיובית מחוץ לשורשים, שלילית ביניהם.
- בוכה: חיובית בין השורשים, שלילית מחוץ להם.
- אין שורשים – הסימן קבוע לפי a.

עלייה וירידה

- מחייכת: יורדת ל-$x<x_v$, עולה ל-$x>x_v$.
- בוכה: עולה ל-$x<x_v$, יורדת ל-$x>x_v$.

פרבולה וישר

- משווים $f(x)=mx+b$ ופותרים משוואה ריבועית.
- שני פתרונות – חיתוך, אחד – השקה, אין – לא נפגשים.
- "מעל הישר" – פותרים אי-שוויון $f(x)>mx+b$.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לשכוח שבהצגה $a(x-p)^2+k$ הקודקוד הוא (p,k) – ב-$(x+3)^2$ הקודקוד ב-$x=-3$.
- לבלבל בין "חיובית" (מעל ציר x) לבין "עולה".
- לשכוח את המקדם a כשכותבים פרבולה מתוך נקודות החיתוך.

💡 **הטיפ של אילון:** התחילו כל שאלת פרבולה בסקיצה מהירה: כיוון הפתיחה והקודקוד כבר מראים לכם כמעט את כל התשובות.

פרק 4

סטטיסטיקה והתפלגות נורמלית

איך מתארים נתונים – ממוצע, חציון, שכיח, פיזור – ואיך עובדים עם עקומת הפעמון

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

4.1 **סטטיסטיקה תיאורית – סוגי משתנים, שכיחויות, דיאגרמות ומדדים** — 37 תרגילים

4.2 **התפלגות נורמלית – טבלת Z ועקומת הפעמון** — 36 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

ממוצע בסטטיסטיקה – הסבר ותרגול
YouTube · 6:42

סטיית תקן בסטטיסטיקה – הסבר ותרגול
YouTube · 6:35

התפלגות נורמלית בקלות
YouTube · 13:45

התפלגות נורמלית 471 – מאפס עד מאה
YouTube · 1:09:04

🎛️ המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

מעבדת הפעמון
בחרו ממוצע, סטיית תקן וגבולות – וראו את השטח מתחת לפעמון, את ציון התקן ואת ההסתברות.

4.1 סטטיסטיקה תיאורית – סוגי משתנים, שכיחויות, דיאגרמות ומדדים

ממוצע: $\bar{x}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{N}$, כאשר $N=f_1+f_2+\cdots+f_n$. חציון – הנתון האמצעי אחרי סידור (במספר זוגי של נתונים – ממוצע שני האמצעיים). שכיח – הנתון שמופיע הכי הרבה פעמים. טווח = הגדול פחות הקטן. סטיית תקן:

$$S=\sqrt{\frac{f_1(x_1-\bar{x})^2+\cdots+f_n(x_n-\bar{x})^2}{N}}.$$

צפו לפני שמתחילים:

ממוצע בסטטיסטיקה – הסבר ותרגול
YouTube · 6:42

חציון בסטטיסטיקה – הסבר ותרגול
YouTube · 11:47

חישוב טווח בסטטיסטיקה
YouTube · 2:40

סטיית תקן בסטטיסטיקה – הסבר ותרגול
YouTube · 6:35

1 קבעו לכל משתנה את סוגו (איכותי / כמותי בדיד / כמותי רציף): צבע עיניים, מספר האחים במשפחה, גובה תלמיד, זמן ריצה של 100 מ', מספר נעליים.

2 נתונים: $4,\ 7,\ 7,\ 9,\ 13$. מצאו את הממוצע, החציון, השכיח והטווח.

3 נתונים: $12,\ 15,\ 9,\ 20,\ 14,\ 8$. מצאו את הממוצע ואת החציון. שימו לב שמספר הנתונים זוגי.

4 נתונים: $2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 7,\ 9$. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן.

5 חשבו את סטיית התקן של הנתונים $6,\ 8,\ 10$ (עד שתי ספרות אחרי הנקודה).

6 בטבלה התפלגות הציונים בכיתה:

ציון	מספר תלמידים
60	2
70	5
80	8
90	4
100	1

כמה תלמידים בכיתה? מצאו את הממוצע, החציון והשכיח.

7 לפי הטבלה בתרגיל הקודם: איזה אחוז מהתלמידים קיבלו ציון 90 ומעלה?

8 לפי אותה טבלה: חשבו את השכיחות היחסית של כל ציון. מה סכום השכיחויות היחסיות?

9 ממוצע של 5 מספרים הוא 12. ארבעה מהם הם 15, 9, 14, 10. מצאו את המספר החמישי.

10 ממוצע הציונים של 30 תלמידים הוא 76. תלמיד נוסף שציונו 92 הצטרף לכיתה. מהו הממוצע החדש?

11 לכל אחד מהנתונים בקבוצה מוסיפים 5. כיצד משתנים הממוצע, החציון וסטיית התקן? נמקו.

12 כל אחד מהנתונים בקבוצה מוכפל ב-2. ממוצע הנתונים המקורי 15 וסטיית התקן 3. מה הממוצע וסטיית התקן החדשים?

13 בקבוצה א' 20 תלמידים שממוצע ציוניהם 70, ובקבוצה ב' 30 תלמידים שממוצע ציוניהם 80. מהו ממוצע הציונים של כל 50 התלמידים?

14 מספר הילדים במשפחות בשכונה:

מספר ילדים	מספר משפחות
1	3
2	4
3	5
4	4

מצאו את החציון ואת השכיח.

15 הנתונים $3,\ 5,\ x,\ 9,\ 11$ מסודרים בסדר עולה, וממוצעם 7. מצאו את x ואת החציון.

16 בטבלה ערכים ושכיחויות:

ערך	שכיחות
1	4
2	k
3	6

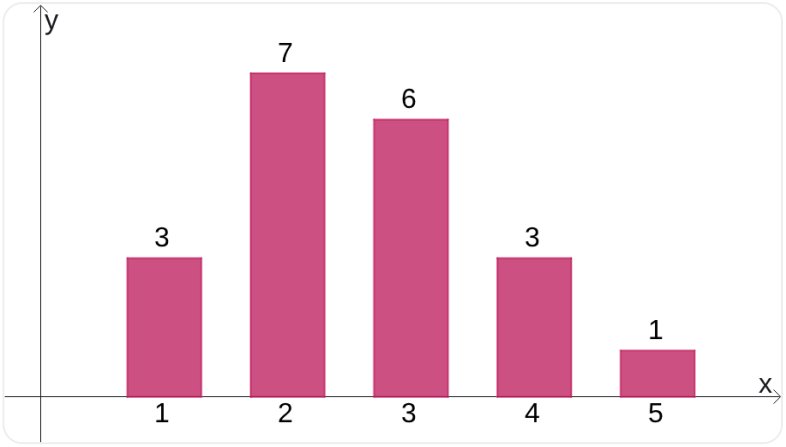
ממוצע הנתונים הוא 2.1. מצאו את k.

17 זמני ההמתנה (בדקות) בתור:

זמן (דקות)	מספר אנשים
$0-10$	8
$10-20$	12
$20-30$	5

חשבו את הממוצע המשוער בעזרת אמצעי המחלקות.

18 בדיאגרמת המקלות מתואר מספר הספרים שקרא כל תלמיד בחופש (ציר אופקי – מספר ספרים, ציר אנכי – מספר תלמידים, המספרים רשומים מעל כל עמודה). כמה תלמידים נשאלו? מהו השכיח, ומהו הממוצע?



19 לפי הדיאגרמה בתרגיל הקודם: מצאו את החציון ואת הטווח.

20 בדיאגרמת עוגה מתואר חלוקת התלמידים לפי מגמות. הגזרה של מגמת ביולוגיה היא בזווית 90° והגזרה של פיזיקה בזווית 72°. איזה אחוז מהתלמידים בכל אחת מהמגמות? אם יש 300 תלמידים – כמה לומדים פיזיקה?

21 לשתי קבוצות נתונים אותו ממוצע 10: קבוצה א': $9,\ 10,\ 11$; קבוצה ב': $2,\ 10,\ 18$. בלי לחשב – באיזו קבוצה סטיית התקן גדולה יותר? אמתו בחישוב.

22 כל הנתונים בקבוצה שווים ל-7. מה סטיית התקן? מה הטווח?

23 בקבוצה של 10 נתונים: סכום הנתונים 50 וסכום ריבועי הנתונים 290. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן (היעזרו בכך ש-S^2 שווה לממוצע הריבועים פחות ריבוע הממוצע).

24 נתונים: $2,\ 3,\ 3,\ 5,\ 7,\ 7,\ 8$. מצאו את השכיח (שימו לב!) ואת החציון.

25 בטבלה שכיחות מצטברת של נתונים:

ערך	שכיחות מצטברת
10	6
20	15
30	27
40	40

כמה נתונים יש? מהי השכיחות של הערך 30? מצאו את החציון.

26 מקבוצת נתונים מוציאים נתון אחד ששווה בדיוק לממוצע. מה קורה לממוצע? ומה קורה לסטיית התקן – גדלה, קטנה או נשארת? נמקו.

27 המשכורות בחברה קטנה (באלפי ₪): 8, 9, 9, 10, 11, 43. חשבו ממוצע וחציון. איזה מדד מייצג טוב יותר את המשכורת "הטיפוסית"? מדוע?

28 ממוצע הנתונים 50 וסטיית התקן 4. איזה ערך נמצא בדיוק שתי סטיות תקן מעל הממוצע? ואיזה – סטיית תקן אחת מתחת?

29 לשני מספרים ממוצע 10 וסטיית תקן 3. מצאו את המספרים.

30 הראו שלכל x, סטיית התקן של הנתונים $x,\ x+2,\ x+4$ זהה. מה ערכה?

31 נתונים: 3, 5, 6, 6, 8, 9, 12. מצאו את הממוצע. איזה אחוז מהנתונים נמצאים מתחת לממוצע?

32 התאימו לכל משתנה דיאגרמה מתאימה (עוגה / מקלות / היסטוגרמה): מפלגה שבה בוחרים, מספר שגיאות כתיב בחיבור, משקל תינוקות בלידה.

33 ציון סופי מחושב כך: מבחן (70%) ועבודה (30%). תלמידה קיבלה 80 במבחן ו-90 בעבודה. מה הציון הסופי?

34 ממוצע של 8 נתונים הוא 6. אחד הנתונים, שערכו 6, הוחלף בנתון 14. מהו הממוצע החדש?

35 כל העובדים בחברה קיבלו העלאה של 10% במשכורת. ממוצע המשכורות היה 9000 ₪ וסטיית התקן 1500 ₪. מה הממוצע וסטיית התקן אחרי ההעלאה?

36 בקבוצת הנתונים $5,\ 7,\ 8,\ 8,\ 12$ הוסיפו נתון a, והממוצע לא השתנה. מצאו את a. האם החציון השתנה?

37 הציונים של דן: $x,\ 90,\ 85,\ 70$. איזה ציון x עליו לקבל כדי שהממוצע יהיה בדיוק 85? האם אפשר להגיע לממוצע 90 (ציון מקסימלי 100)?

✔ תשובות סופיות – נושא 4.1

1	צבע עיניים – איכותי ; מספר אחים – כמותי בדיד ; גובה – כמותי רציף ; זמן ריצה – כמותי רציף ; מספר נעליים – כמותי בדיד
2	ממוצע 8 ; חציון 7 ; שכיח 7 ; טווח 9
3	ממוצע 13 ; חציון 13
4	ממוצע 5 ; סטיית תקן 2
5	ממוצע 8 ; $S=\sqrt{\frac{8}{3}}\approx 1.63$
6	20 תלמידים ; ממוצע 78.5 ; חציון 80 ; שכיח 80
7	25%
8	0.1, 0.25, 0.4, 0.2, 0.05 ; הסכום 1
9	12
10	76.52
11	הממוצע והחציון גדלים ב-5 ; סטיית התקן לא משתנה
12	ממוצע 30 ; סטיית תקן 6
13	76
14	חציון 3 ; שכיח 3
15	$x=7$; חציון 7
16	$k=10$
17	13.8
18	20 תלמידים ; שכיח 2 ; ממוצע 2.6
19	חציון 2.5 ; טווח 4
20	ביולוגיה 25%, פיזיקה 20% ; 60 תלמידים
21	בקבוצה ב' ; בקבוצה א' $S\approx 0.82$, בקבוצה ב' $S\approx 6.53$
22	סטיית תקן 0 ; טווח 0

23 ממוצע 5 ; $S=2$

24 שני שכיחים: 3 ו-7 ; חציון 5

25 40 נתונים ; 12 ; חציון 30

26 הממוצע לא משתנה ; סטיית התקן גדלה (סכום ריבועי הסטיות נשאר, ומחלקים במספר קטן יותר)

27 ממוצע 15 ; חציון 9.5 ; החציון – הנתון 43 חריג ומושך את הממוצע

28 58 ; 46

29 7 ו-13

30 $\sqrt{\frac{8}{3}}\approx 1.63$ – הזזה לא משנה פיזור

31 ממוצע 7 ; $\frac{4}{7}\approx 57.14\%$

32 מפלגה – עוגה ; מספר שגיאות – מקלות ; משקל – היסטוגרמה

33 83

34 7

35 ממוצע 9900 ₪ ; סטיית תקן 1650 ₪

36 $a=8$; החציון נשאר 8

37 $x=95$; לא – נדרש $x=115$

4.2 התפלגות נורמלית – טבלת Z ועקומת הפעמון

ציון תקן: $z=\frac{x-\bar{x}}{S}$. בטבלה רשום השטח משמאל ל-a, כלומר $P(Z<a)$. שימושי:
$P(Z>a)=1-P(Z<a)$, $P(Z<-a)=1-P(Z<a)$,
$P(a<Z<b)=P(Z<b)-P(Z<a)$. קטע מטבלת Z לשימוש בתרגילים:

$P(Z<a)$	a
0.5987	0.25
0.6915	0.5
0.7486	0.67
0.7995	0.84
0.8413	1
0.8997	1.28
0.9332	1.5
0.9599	1.75
0.9772	2
0.9901	2.33
0.9938	2.5
0.9987	3

צפו לפני שמתחילים:

התפלגות נורמלית בקלות – איך ניגשים לשאלות בגרות
YouTube · 13:45

התפלגות נורמלית 471 – מאפס עד מאה
YouTube · 1:09:04

1. חשבו את $P(Z<1)$.
2. חשבו את $P(Z>1.5)$.
3. חשבו את $P(-1<Z<1)$. מה המשמעות במונחים של סטיות תקן?

4 חשבו את $P(Z < -0.5)$ (היעזרו בסימטריה של הפעמון).

5 חשבו את $P(0.5 < Z < 2)$.

6 מצאו את a אם $P(Z < a) = 0.9332$.

7 מצאו את a אם $P(Z > a) = 0.1587$.

8 מצאו את $a > 0$ אם $P(-a < Z < a) = 0.9544$.

9 משתנה X מתפלג נורמלית עם ממוצע 70 וסטיית תקן 10. חשבו את $P(X < 85)$.

10 X מתפלג נורמלית עם ממוצע 70 וסטיית תקן 10. חשבו את $P(X > 60)$.

11 X מתפלג נורמלית עם ממוצע 70 וסטיית תקן 10. חשבו את $P(60 < X < 90)$.

12 ציוני מבחן מתפלגים נורמלית עם ממוצע 70 וסטיית תקן 10. איזה אחוז מהנבחנים קיבלו מעל 95?

13 גובה תלמידי השכבה מתפלג נורמלית עם ממוצע 170 ס"מ וסטיית תקן 8 ס"מ. איזה אחוז מהתלמידים גובהם בין 162 ל-178 ס"מ?

14 בהמשך: בשכבה 1000 תלמידים. כמה תלמידים גבוהים מ-186 ס"מ (בקירוב)?

15 X מתפלג נורמלית עם ממוצע $\bar{x}$ וסטיית תקן S. ל-84.13% מהנתונים ערך קטן מ-x_0. בטאו את x_0 בעזרת $\bar{x}$ ו-S.

16 ציוני בחינה מתפלגים נורמלית עם ממוצע 500 וסטיית תקן 100. מצאו את הציון המינימלי של 10% הנבחנים הטובים ביותר (בקירוב, היעזרו בטבלה).

17 X מתפלג נורמלית עם ממוצע 50, ו-$P(X < 56) = 0.8413$. מצאו את סטיית התקן.

18 X מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 4, ו-$P(X > 30) = 0.0228$. מצאו את הממוצע.

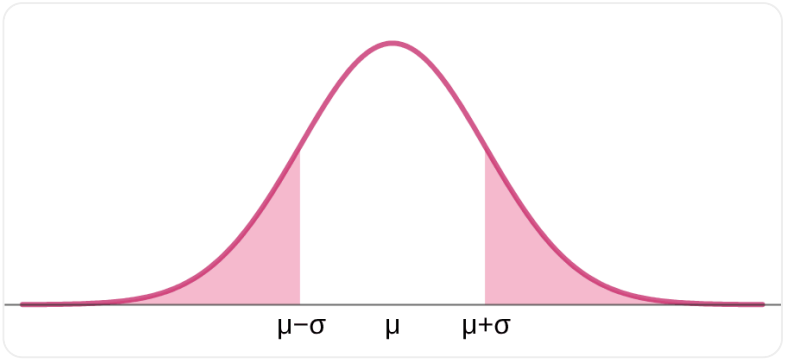
19 X מתפלג נורמלית. ידוע ש- $P(X<40)=0.1587$ ו- $P(X<70)=0.9772$. מצאו את הממוצע ואת סטיית התקן.

20 מהי ההסתברות שערך של משתנה נורמלי יהיה קטן מהממוצע? נמקו.

21 X מתפלג נורמלית עם ממוצע $\bar{x}$, ו- $P(X<\bar{x}-3)=0.3$. חשבו את $P(X>\bar{x}+3)$ ואת $P(\bar{x}-3<X<\bar{x}+3)$.

22 רון קיבל 80 במבחן שבו הציונים מתפלגים נורמלית עם ממוצע 70 וסטיית תקן 5. נועה קיבלה 85 במבחן אחר עם ממוצע 75 וסטיית תקן 10. למי הישג יחסי טוב יותר? נמקו בעזרת ציון תקן.

23 בציור פעמון של התפלגות נורמלית. השטח הצבוע הוא מחוץ לטווח של סטיית תקן אחת מהממוצע. חשבו את השטח הצבוע. מה השטח של כל אחד מ"הזנבות" בנפרד?



24 חשבו את $P(-1.5<Z<1.5)$.

25 חשבו את ההסתברות שמשתנה נורמלי יקבל ערך בין הממוצע לבין סטיית תקן אחת מעליו.

26 משקל אריזות במפעל מתפלג נורמלית עם ממוצע 500 גרם וסטיית תקן 4 גרם. אריזות שמשקלן פחות מ- 494 גרם נפסלות. איזה אחוז מהאריזות נפסלות?

27 בהמשך: מתוך 200 אריזות, כמה נפסלות בקירוב?

28 ציוני מבחן מתפלגים נורמלית עם ממוצע 60 וסטיית תקן 15. מצאו (בקירוב) את הציון ש- 75% מהנבחנים קיבלו פחות ממנו. ($P(Z<0.67)\approx 0.75$)

29 ההסתברות שאדם אקראי גבוה מ-$\bar{x}+S$ היא 0.1587. בוחרים שני אנשים באקראי, באופן בלתי תלוי. מה ההסתברות ששניהם גבוהים מ-$\bar{x}+S$?

30 ידוע ש-$P(X>\bar{x}+kS)=0.0062$. מצאו את k.

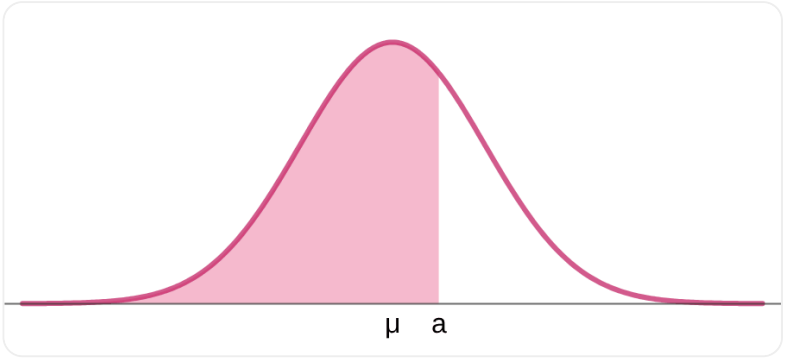
31 חשבו את $P(Z<-1.28)$.

32 מנת משכל מתפלגת נורמלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 15. באיזה טווח (סימטרי סביב הממוצע) נמצאים 95.44% מהאוכלוסייה?

33 X מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 10. ל-30.85% מהנתונים ערך קטן מ-45. מצאו את הממוצע.

34 מה גדול יותר: $P(X>\bar{x}+S)$ או $P(X<\bar{x}-2S)$? חשבו את שניהם.

35 בציור פעמון של משתנה נורמלי עם ממוצע $\bar{x}=40$ וסטיית תקן $S=6$. השטח הצבוע הוא 0.6915. מצאו את הערך a המסומן בציור.



36 זמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמלית עם ממוצע 40 דקות וסטיית תקן 5 דקות. העבודה מתחילה ב-$8:00$. באיזו שעה (לכל המאוחר) יש לצאת כדי להגיע בזמן בהסתברות 0.9772?

✔ תשובות סופיות – נושא 4.2

1	0.8413
2	0.0668
3	0.6826 – כ-68% מהנתונים בטווח סטיית תקן אחת מהממוצע
4	0.3085
5	0.2857
6	$a = 1.5$
7	$a = 1$
8	$a = 2$
9	0.9332
10	0.8413
11	0.8185
12	0.62%
13	68.26%
14	$1000 \cdot 0.0228 \approx 23$ תלמידים
15	$x_0 = \bar{x} + S$
16	$a \approx 1.28$; ציון ≈ 628
17	$S = 6$
18	$\bar{x} = 22$
19	$\bar{x} = 50$; $S = 10$
20	0.5 – הפעמון סימטרי סביב הממוצע
21	0.3 ; 0.4
22	לרון: $Z = 2$ לעומת $Z = 1$ לנועה
23	0.3174 ; כל זנב 0.1587

24	0.8664
25	0.3413
26	6.68%
27	≈ 13 אריזות
28	≈ 70.05
29	$0.1587^2 \approx 0.0252$
30	$k = 2.5$
31	0.1003
32	בין 70 ל-130
33	$\bar{x} = 50$
34	$P(X > \bar{x} + S) = 0.1587$ גדול יותר מ-$P(X < \bar{x} - 2S) = 0.0228$
35	$a = 43$
36	$7:10$ ($40 + 2 \cdot 5 = 50$ דקות לפני)

פרק 4 סיכומון סוף פרק – סטטיסטיקה והתפלגות נורמלית

סוגי משתנים ודיאגרמות

- איכותי (צבע, מגמה) – דיאגרמת עוגה או עמודות.
- כמותי בדיד (מספר אחים) – דיאגרמת מקלות.
- כמותי רציף (גובה, זמן) – היסטוגרמה, לפי מחלקות.

שינוי הנתונים

- מוסיפים קבוע c: הממוצע והחציון גדלים ב-c, סטיית התקן לא משתנה.
- כופלים ב-k: הממוצע וסטיית התקן מוכפלים ב-k.
- ממוצע משוקלל: $\bar{x}=\frac{n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2}{n_1+n_2}$.

מדדי מרכז

- ממוצע: $\bar{x}=\frac{f_1x_1+\cdots+f_nx_n}{N}$; במחלקות – לפי אמצע המחלקה.
- חציון: מסדרים, לוקחים את האמצעי (במספר זוגי – ממוצע שני האמצעיים).
- שכיח: הערך עם השכיחות הגבוהה ביותר (ייתכנו שניים).

מדדי פיזור

- טווח = הגדול פחות הקטן.
- סטיית תקן: $S=\sqrt{\frac{f_1(x_1-\bar{x})^2+\cdots+f_n(x_n-\bar{x})^2}{N}}$.
- קיצור דרך: S^2 = ממוצע הריבועים פחות ריבוע הממוצע.

התפלגות נורמלית – הבסיס

- ציון תקן: $z=\frac{x-\bar{x}}{S}$.
- בטבלה: השטח משמאל ל-a, כלומר $P(Z<a)$.
- $P(Z>a)=1-P(Z<a)$; $P(Z<-a)=1-P(Z<a)$.
- $P(a<Z<b)=P(Z<b)-P(Z<a)$.
- בטווח $\bar{x}\pm S$ כ-68%, בטווח $\bar{x}\pm 2S$ כ-95%.

מציאת נעלם בנורמלית

- נתונה הסתברות – מחפשים בטבלה את a ואז $x=\bar{x}+aS$.
- שתי הסתברויות נתונות – שתי משוואות, פותרים את $\bar{x}$ ואת S.
- שאלת "כמה אנשים" – מכפילים את ההסתברות במספר האנשים.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לשכוח לחלק ב-N (מספר הנתונים) בחישוב סטיית התקן.
- חציון בלי לסדר את הנתונים קודם.
- להשתמש בערך מהטבלה של $P(Z<a)$ כשהשאלה היא על "גדול מ-".
- לשכוח שבזנב השמאלי a שלילי – והטבלה נותנת רק ערכים חיוביים.

💡 **הטיפ של אילון:** בכל שאלה של התפלגות נורמלית – שרטטו פעמון קטן וצבעו את השטח שמבקשים. שנייה של ציור חוסכת את רוב הטעויות.

פרק 5

רגרסיה לינארית ומקדם מתאם

כמה חזק הקשר בין שני משתנים – ואיך משתמשים בו כדי לחזות

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

5.1 דיאגרמת פיזור, מקדם המתאם וישר הרגרסיה

36 תרגילים

סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

▶ מציאת מקדם מתאם – תרגול והסבר (471)
YouTube · 7:50

▶ סטטיסטיקה – מקדם מתאם וישר הרגרסיה
YouTube · 13:41

▶ תרגול – מקדם מתאם וישר הרגרסיה
YouTube · 10:28

5.1 דיאגרמת פיזור, מקדם המתאם וישר הרגרסיה

מקדם המתאם: $r=\frac{(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})+\cdots+(x_N-\bar{x})(y_N-\bar{y})}{N\cdot S_x\cdot S_y}$, ותמיד $-1\le r\le 1$. שיפוע ישר הרגרסיה: $m=r\cdot\frac{S_y}{S_x}$. משוואת ישר הרגרסיה לניבוי y על פי x: $y-\bar{y}=m(x-\bar{x})$ – הוא עובר תמיד דרך $(\bar{x},\bar{y})$, ולשיפוע שלו אותו סימן כמו ל-r.

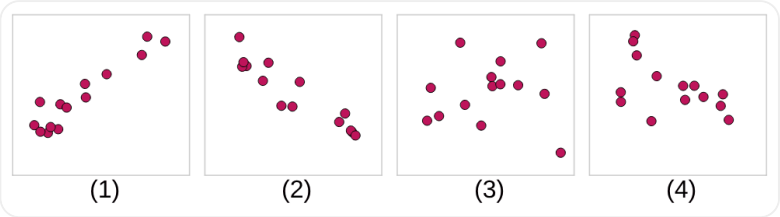
צפו לפני שמתחילים:

מציאת מקדם מתאם – תרגול והסבר (471)
YouTube · 7:50

סטטיסטיקה – מקדם מתאם וישר הרגרסיה
YouTube · 13:41

תרגול – מקדם מתאם וישר הרגרסיה
YouTube · 10:28

1 בציור ארבע דיאגרמות פיזור. התאימו לכל דיאגרמה את מקדם המתאם המתאים:
$r=-0.92$, $r=0.95$, $r=0.05$, $r=-0.5$.



2 מקדם המתאם בין שעות למידה לציון הוא $r=0.92$. תארו את הקשר במילים.

3 מקדם המתאם בין גובה למספר האחים הוא $r=-0.15$. מה אפשר לומר על הקשר?

4 תלמיד חישב וקיבל $r=1.3$. מדוע ברור שטעה?

5 ידוע: $\bar{x}=10$, $\bar{y}=50$, $S_x=2$, $S_y=8$, $r=0.75$. מצאו את משוואת ישר הרגרסיה של y על x, וחזו את y כאשר $x=12$.

6 ידוע: $\bar{x}=10$, $\bar{y}=50$, $S_x=2$, $S_y=8$, $r=-0.5$. מצאו את ישר הרגרסיה. מה סימן השיפוע ומדוע?

7 ישר הרגרסיה הוא $y = 2x + 3$ וממוצע ערכי x הוא 5. מצאו את ממוצע ערכי y.

8 ישר הרגרסיה הוא $y = -0.5x + 40$ ו-$\bar{x} = 20$. מצאו את $\bar{y}$. מה סימן מקדם המתאם?

9 שיפוע ישר הרגרסיה הוא 1.2, $S_x = 5$ ו-$S_y = 10$. מצאו את r.

10 שיפוע ישר הרגרסיה הוא 4, $r = 0.8$ ו-$S_x = 2$. מצאו את S_y.

11 נתונים:

y	x
2	1
4	2
5	3
4	4
5	5

חשבו את $\bar{x}$, $\bar{y}$, S_x, S_y ואת מקדם המתאם r.

12 בהמשך לתרגיל הקודם: מצאו את ישר הרגרסיה וחזו את y עבור $x = 6$.

13 נתונים:

y	x
3	1
5	2
7	3
9	4

בלי לחשב את הנוסחה המלאה – מה מקדם המתאם? מצאו את ישר הרגרסיה.

14 נתונים:

x	y
1	10
2	8
3	6
4	4
5	2

מהו מקדם המתאם? מהי משוואת הישר?

15 שעות למידה (x) וציון במבחן (y) של חמישה תלמידים:

שעות	ציון
2	60
3	65
4	75
5	80
6	90

חשבו את מקדם המתאם ואת ישר הרגרסיה. מה הציון החזוי לתלמיד שלמד 7 שעות?

16 בהמשך: האם סביר להשתמש בישר כדי לחזות ציון של תלמיד שלמד 30 שעות? נמקו.

17 לכל ערכי y בקבוצה מוסיפים 10. מה קורה למקדם המתאם? ולשיפוע ישר הרגרסיה?

18 את כל ערכי x מכפילים ב-(-1). מה קורה למקדם המתאם?

19 גובה נמדד בס"מ ואחר כך הומר למטרים. האם מקדם המתאם בין גובה למשקל משתנה?

20 $r=0$. מה צורת ישר הרגרסיה של y על x?

21 נמצא מתאם חיובי חזק בין מספר הגלידות הנמכרות לבין מספר טביעות בים. האם הגלידה גורמת לטביעות? הסבירו.

22 ישר הרגרסיה הוא $y = 0.8x + 10$. מה הערך החזוי עבור $x = 50$? אם הערך האמיתי הוא 47 – מה הסטייה (השארית)?

23 $\bar{x} = 4$, $\bar{y} = 20$ ושיפוע ישר הרגרסיה 3. מצאו את משוואת הישר.

24 לפי ישר רגרסיה, עבור $x = 2$ החיזוי הוא 11 ועבור $x = 6$ החיזוי הוא 23. מצאו את משוואת הישר.

25 ישר הרגרסיה הוא $y = 1.5x + 5$ ו-$\bar{y} = 35$. מצאו את $\bar{x}$.

26 ב-$N = 10$ זוגות נתונים: $(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \cdots + (x_{10} - \bar{x})(y_{10} - \bar{y}) = 48$, $S_x = 2$, $S_y = 3$. חשבו את r.

27 בהמשך לתרגיל הקודם: מצאו את שיפוע ישר הרגרסיה m.

28 באיזה מקרה הקשר הלינארי חזק יותר: $r = -0.85$ או $r = 0.6$? נמקו.

29 טמפרטורה (x, במעלות) ומכירות גלידה (y, בעשרות יחידות) בחמישה ימים:

טמפרטורה	מכירות
20	30
24	42
28	50
32	62
36	66

מצאו את מקדם המתאם ואת ישר הרגרסיה. חזו את המכירות ביום של 30°.

30 לקבוצת נתונים עם $r = 0.9$ מוסיפים נקודה אחת רחוקה מאוד מהמגמה (חריגה). כיצד צפוי להשתנות r?

31 נכון או לא נכון? (א) אם $r = 0.7$ אז 70% מהנקודות על הישר. (ב) אם $r < 0$ השיפוע שלילי. (ג) ישר הרגרסיה עובר תמיד דרך $(\bar{x}, \bar{y})$.

32 האם ייתכן ששיפוע ישר הרגרסיה הוא 2 ו-$r = -0.5$? נמקו.

33 $S_x = 4$, $S_y = 6$ ושיפוע ישר הרגרסיה -0.9. מצאו את r ותארו את הקשר.

34 ב-10 זוגות נתונים: סכום ערכי x הוא 50, סכום ערכי y הוא 200, ושיפוע ישר הרגרסיה 2. מצאו את משוואת הישר.

35 נתונים:

y	x
5	1
3	2
4	3
2	4
1	5

חשבו את מקדם המתאם ואת ישר הרגרסיה. בדקו שהישר עובר דרך $(\bar{x}, \bar{y})$.

36 נתונים: $(3,4)$, $(2,4)$, $(1,4)$, $(0,4)$. מה ניתן לומר על S_y? האם אפשר לחשב את r בנוסחה? מהו ישר הרגרסיה?

✔ תשובות סופיות – נושא 5.1

1. (1) 0.95 ; (2) -0.92 ; (3) 0.05 ; (4) -0.5
2. קשר לינארי חיובי חזק – ככל שלומדים יותר הציון נוטה לעלות
3. קשר לינארי שלילי חלש מאוד – כמעט אין קשר
4. תמיד $-1 \le r \le 1$
5. $y = 3x + 20$; $y = 56$
6. $y = -2x + 70$; שלילי – כמו סימן r
7. $\bar{y} = 13$ – הישר עובר דרך $(\bar{x}, \bar{y})$
8. $\bar{y} = 30$; שלילי
9. $r = 0.6$
10. $S_y = 10$
11. $\bar{x} = 3$, $\bar{y} = 4$, $S_x \approx 1.41$, $S_y \approx 1.1$; $r \approx 0.77$
12. $y = 0.6x + 2.2$; $y = 5.8$
13. $r = 1$ (כל הנקודות על ישר) ; $y = 2x + 1$
14. $r = -1$; $y = -2x + 12$
15. $r \approx 0.993$; $y = 7.5x + 44$; ≈ 96.5
16. לא – זה חיזוי רחוק מתחום הנתונים, והציון היה יוצא מעל 100
17. שניהם לא משתנים (הישר רק עולה ב-10)
18. מחליף סימן – r הופך ל-$-r$
19. לא – שינוי יחידות לא משנה את r
20. ישר אופקי $y = \bar{y}$
21. לא – מתאם אינו סיבתיות; גורם משותף: חום הקיץ
22. 50 ; $47 - 50 = -3$
23. $y = 3x + 8$

24	$y = 3x + 5$
25	$\bar{x} = 20$
26	$r = \frac{48}{10 \cdot 2 \cdot 3} = 0.8$
27	$m = 0.8 \cdot \frac{3}{2} = 1.2$
28	$r = -0.85$ – הערך המוחלט גדול יותר
29	$r \approx 0.99$; $y = 2.3x - 14.4$; ≈ 54.6
30	הערך יקטן – הקשר הלינארי ייחלש
31	(א) לא נכון ; (ב) נכון ; (ג) נכון
32	לא – לשיפוע ול-r אותו סימן
33	$r = -0.6$ – קשר שלילי בינוני
34	$y = 2x + 10$
35	$r = -0.9$; $y = -0.9x + 5.7$; $(\bar{x}, \bar{y}) = (3, 3)$
36	$S_y = 0$ – אי אפשר לחלק באפס (r לא מוגדר) ; הישר $y = 4$

פרק 5 סיכומון סוף פרק – רגרסיה לינארית ומקדם מתאם

דיאגרמת פיזור

- כל זוג (x,y) הוא נקודה.
- נקודות שעולות משמאל לימין – קשר חיובי; יורדות – קשר שלילי.
- ככל שהנקודות קרובות יותר לקו ישר – הקשר הלינארי חזק יותר.

מקדם המתאם

- $r = \frac{(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})+\cdots+(x_N-\bar{x})(y_N-\bar{y})}{N \cdot S_x \cdot S_y}$.
- תמיד $-1 \le r \le 1$.
- $r = \pm 1$ – כל הנקודות על ישר אחד; $r \approx 0$ – אין קשר לינארי.
- חוזק: $|r|$ קרוב ל-1 – חזק, סביב 0.5 – בינוני, קרוב ל-0 – חלש.

ישר הרגרסיה

- $y - \bar{y} = m(x - \bar{x})$, כאשר $m = r \cdot \frac{S_y}{S_x}$.
- השיפוע m תמיד באותו סימן כמו r.
- הישר עובר תמיד דרך $(\bar{x}, \bar{y})$.

סדר עבודה

- מחשבים $\bar{x}$, $\bar{y}$.
- מחשבים $\bar{x}$, $\bar{y}$, S_x, S_y, ואז r.
- מחשבים r ואז את השיפוע ואת הישר.
- מציבים x כדי לחזות y.

מה משנה ומה לא

- הוספת קבוע או שינוי יחידות – r לא משתנה.
- הכפלה של משתנה במספר שלילי – r מחליף סימן.
- נקודה חריגה – בדרך כלל מחלישה את r.

פירוש נכון

- מתאם הוא לא סיבתיות – ייתכן גורם שלישי משותף.
- חיזוי רק בתוך תחום הנתונים או קרוב אליו.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לבלבל בין S_x ל-S_y בשיפוע – S_y במונה!
- לחשוב ש-$r = 0.7$ אומר ש-70% מהנקודות על הישר.
- לשכוח לחלק ב-N בחישוב סטיות התקן ומקדם המתאם.
- חיזוי רחוק מחוץ לתחום הנתונים.

💡 **הטיפ של אילון:** לפני שמחשבים – הסתכלו על הנתונים: עולים או יורדים? כך תדעו מראש את הסימן של r ותתפסו טעות חישוב מיד.

פרק 6

גיאומטריה – משולשים

זוויות, חפיפה, משולש שווה שוקיים, משולש ישר זווית, קטעי אמצעים, דמיון ושטחים

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

6.1	זוויות, ידע כללי וטענה-נימוק	35 תרגילים
6.2	חפיפת משולשים ומשולש שווה שוקיים	50 תרגילים
6.3	משולש ישר זווית ונקודות מפגש במשולש	45 תרגילים
6.4	קטעי אמצעים, דמיון ושטחים	36 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

קורס גיאומטריה – מבוא ותיאוריה
YouTube · 12:55

איך עושים טענה ונימוק בגיאומטריה?
YouTube · 11:03

כל משפטי משולש ישר זווית
YouTube · 10:16

כל משפטי השטחים בגיאומטריה
YouTube · 8:56

🎛️ המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

מעבדת המשולש



גררו את קודקודי המשולש וראו בזמן אמת: קטע אמצעים שווה לחצי הצלע, מפגש התיכונים מחלק ביחס 1 : 2, ותיכון ליתר שווה לחצי היתר.

6.1 זוויות, ידע כללי וטענה-נימוק

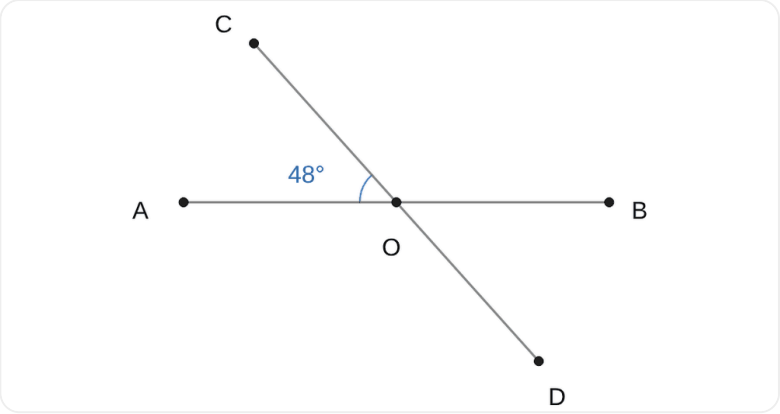
זוויות קודקודיות שוות, זוויות צמודות משלימות ל-$180°$. בין ישרים מקבילים: מתאימות ומתחלפות שוות, חד-צדדיות משלימות ל-$180°$. סכום זוויות משולש $180°$. בכל הוכחה – כל טענה עם נימוק.

צפו לפני שמתחילים:

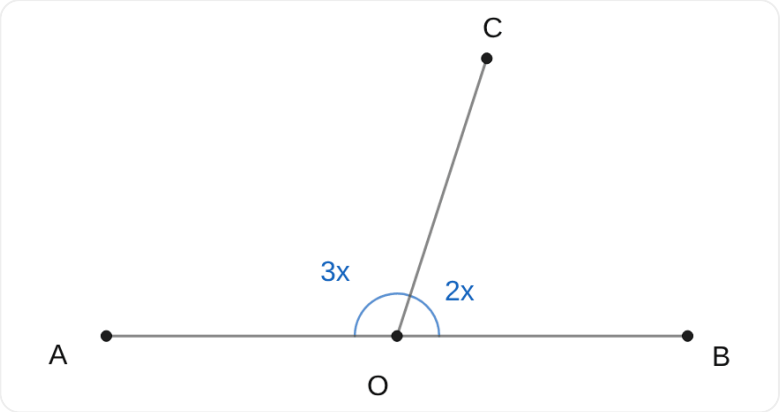
קורס גיאומטריה – מבוא ותיאוריה
YouTube · 12:55

איך עושים טענה ונימוק בגיאומטריה?
YouTube · 11:03

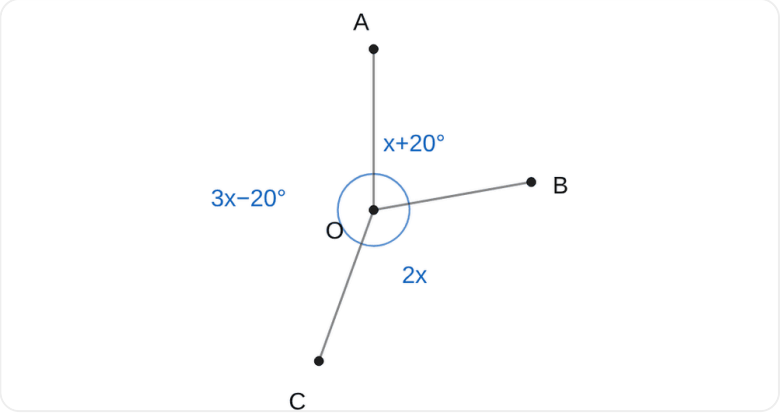
1 הישרים AB ו-CD נחתכים בנקודה O. נתון: $\sphericalangle AOC = 48°$. מצאו את $\sphericalangle BOD$ ואת $\sphericalangle AOD$.



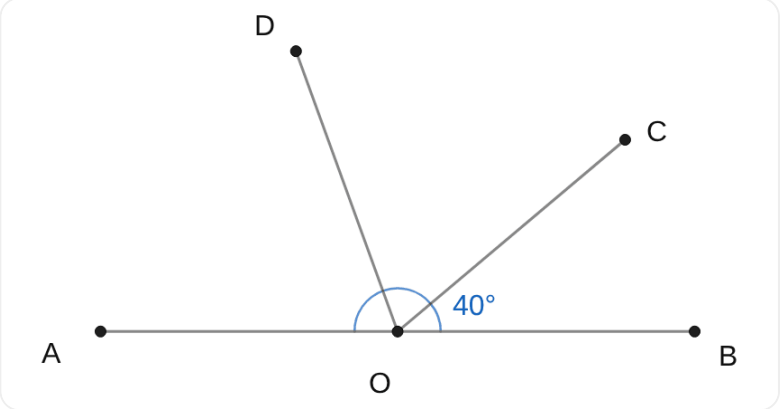
2 הנקודות A, O, B נמצאות על ישר אחד. נתון: $\sphericalangle AOC = 3x$, $\sphericalangle COB = 2x$. מצאו את x ואת שתי הזוויות.



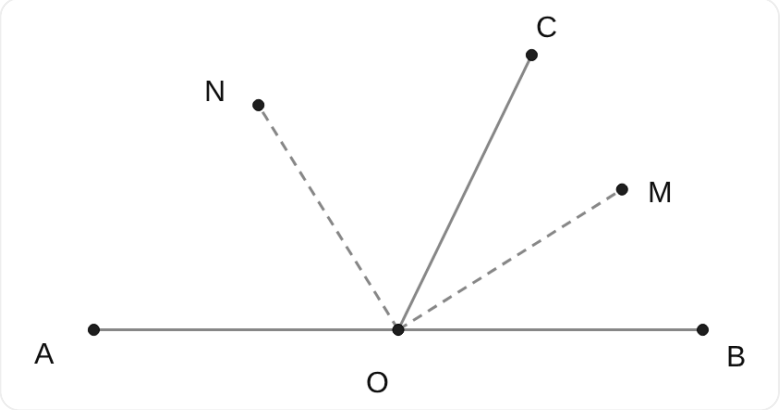
3 שלוש קרניים OA, OB, OC יוצאות מהנקודה O ומחלקות את הזווית השלמה לשלוש זוויות: $\sphericalangle AOB = x + 20°$, $\sphericalangle BOC = 2x$, $\sphericalangle COA = 3x - 20°$. מצאו את שלוש הזוויות.



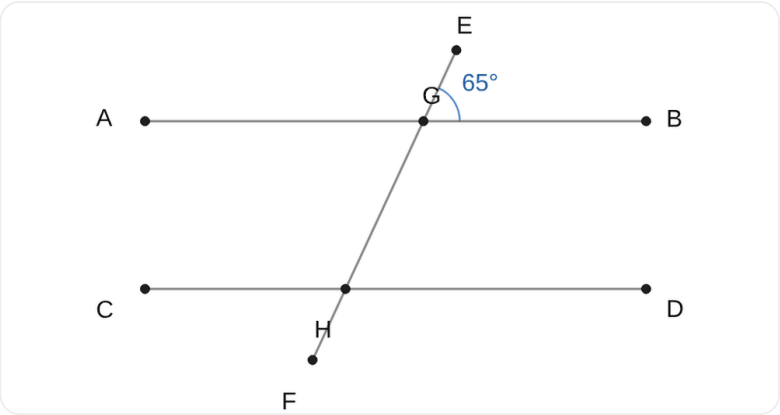
4 A, O, B על ישר אחד. $\sphericalangle COB = 40°$, והקרן OD חוצה את $\sphericalangle AOC$. מצאו את $\sphericalangle AOD$ ואת $\sphericalangle DOB$.



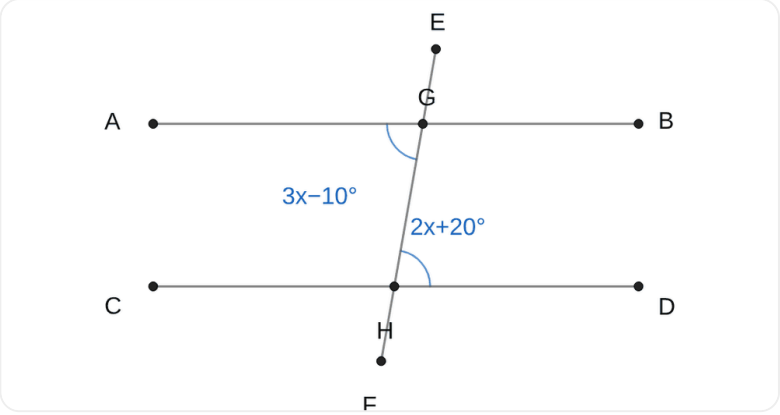
5 A, O, B על ישר אחד, ו-OC קרן כלשהי. OM חוצה את $\sphericalangle COB$ ו-ON חוצה את $\sphericalangle AOC$. הוכיחו ש-$OM \perp ON$, כלומר מצאו את $\sphericalangle MON$.



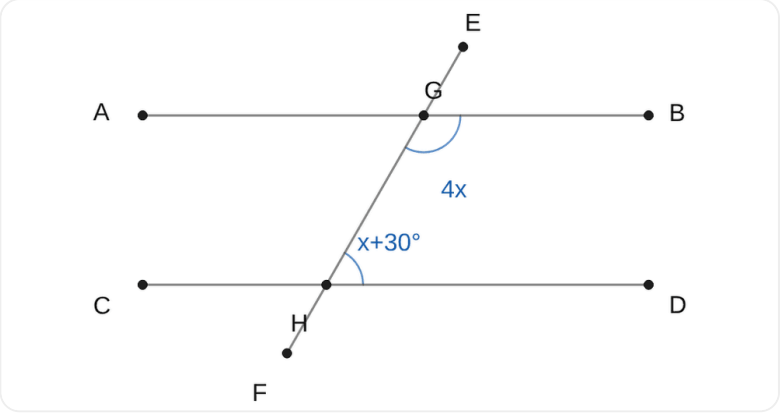
6 $AB \parallel CD$ והישר EF חותך אותם בנקודות G ו-H. נתון: $\sphericalangle EGB = 65°$. מצאו את $\sphericalangle GHD$ ואת $\sphericalangle GHC$.



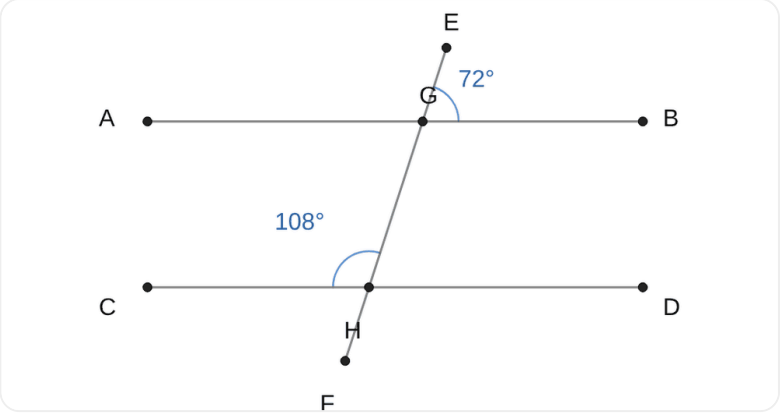
7 $AB \parallel CD$. נתון: $\sphericalangle AGH = 3x - 10°$ ו-$\sphericalangle GHD = 2x + 20°$. מצאו את x ואת גודל הזוויות.



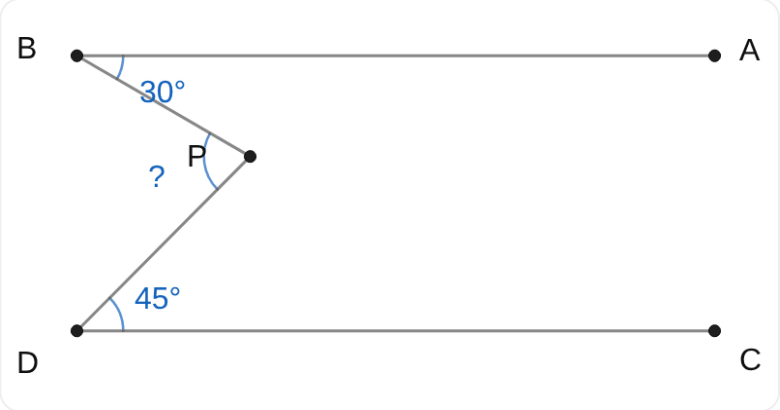
8 $AB \parallel CD$. נתון: $\sphericalangle BGH = 4x$ ו-$\sphericalangle GHD = x + 30°$. מצאו את שתי הזוויות.



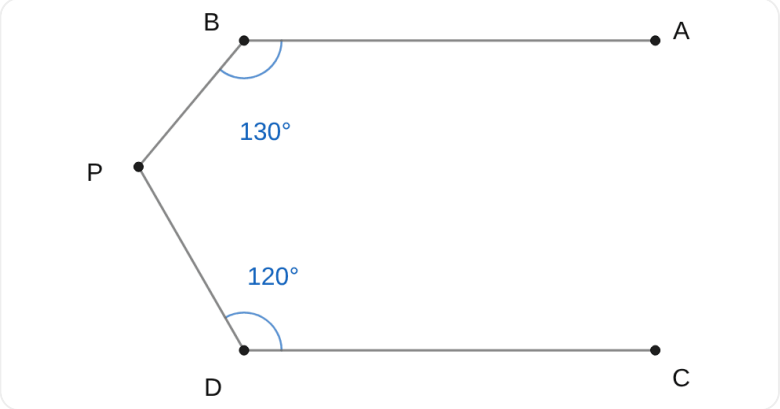
9 הישר EF חותך את הישרים AB ו-CD. נתון: $\sphericalangle EGB = 72^\circ$, $\sphericalangle GHC = 108^\circ$. נמקו. האם $AB \parallel CD$?



10 $AB \parallel CD$, והנקודה P נמצאת בין הישרים. נתון: $\sphericalangle ABP = 30^\circ$, $\sphericalangle CDP = 45^\circ$. מצאו את $\sphericalangle BPD$ (רמז: העבירו דרך P ישר מקביל).

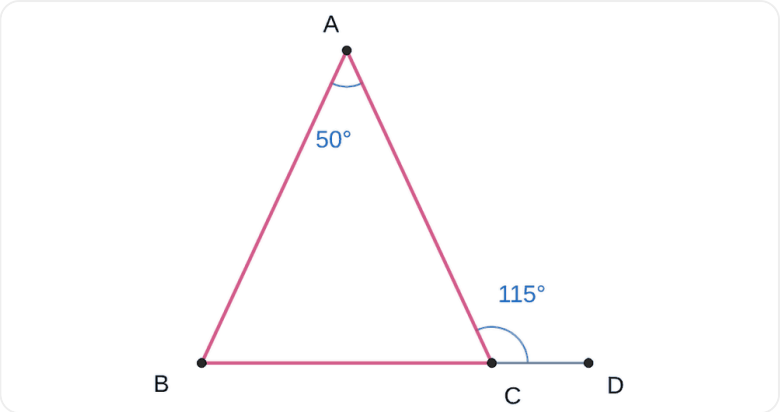


11 $AB \parallel CD$ והנקודה P בין הישרים, משמאל ל-B ול-D. נתון: $\sphericalangle ABP = 130^\circ$, $\sphericalangle CDP = 120^\circ$ (הזוויות נפתחות לכיוון A ו-C). מצאו את $\sphericalangle BPD$.



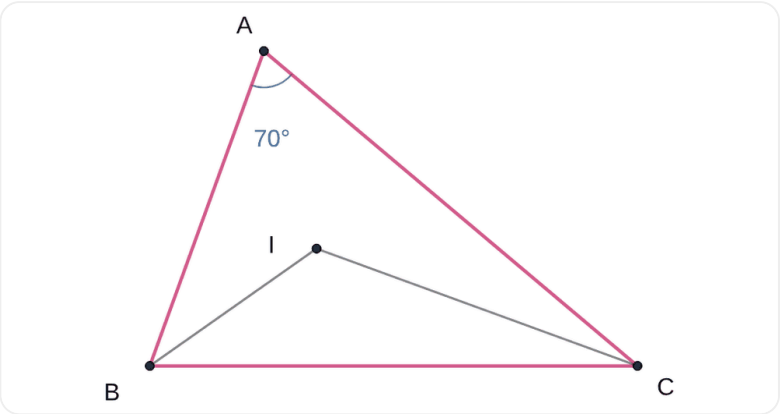
12 במשולש ABC הזוויות מתייחסות זו לזו כמו $1:2:3$. מצאו את זוויות המשולש. איזה סוג משולש זה?

13 במשולש ABC הנקודה D על המשך BC. נתון: $\sphericalangle ACD = 115^\circ$, $\sphericalangle A = 50^\circ$. מצאו את $\sphericalangle B$.

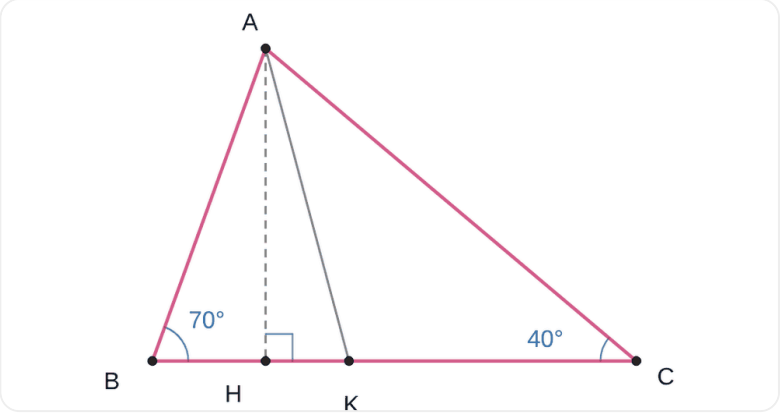


14 שתי זוויות חיצוניות של משולש (בשני קודקודים שונים) הן 110° ו-130°. מצאו את שלוש הזוויות הפנימיות ואת הזווית החיצונית השלישית.

15 במשולש ABC נתון $\sphericalangle A = 70^\circ$. חוצי הזוויות B ו-C נפגשים בנקודה I. מצאו את $\sphericalangle BIC$. הראו שהתשובה אינה תלויה בגודל $\sphericalangle B$.



16 במשולש ABC: $\sphericalangle B = 70°$, $\sphericalangle C = 40°$. AH גובה ו-AK חוצה זווית. מצאו את הזווית $\sphericalangle HAK$ שבין הגובה לחוצה.



17 מהו סכום הזוויות הפנימיות של מחומש? מהו גודל כל זווית במשושה משוכלל?

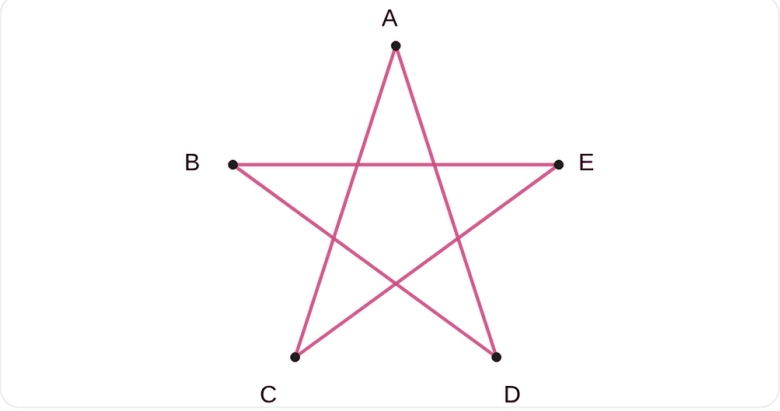
18 כל זווית פנימית של מצולע משוכלל היא $150°$. כמה צלעות יש למצולע?

19 הזווית החיצונית של מצולע משוכלל היא $24°$. כמה צלעות יש לו, ומהו סכום זוויותיו הפנימיות?

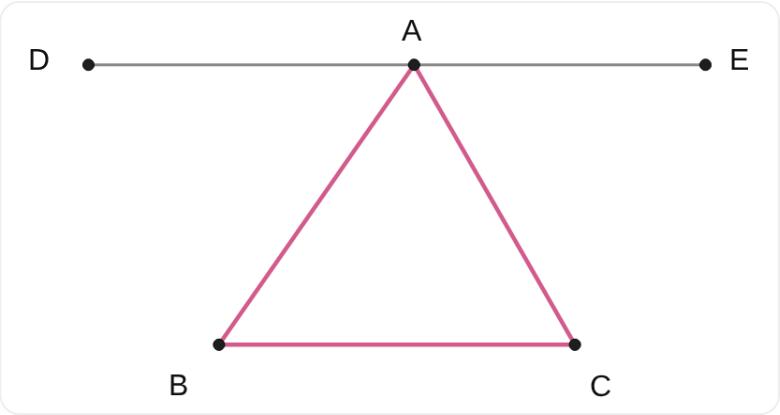
20 סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור הוא $1440°$. כמה צלעות יש למצולע?

21 זוויות מרובע קמור מתייחסות כמו $2:3:4:6$. מצאו את זוויות המרובע ואת ההפרש בין הזווית הגדולה לקטנה.

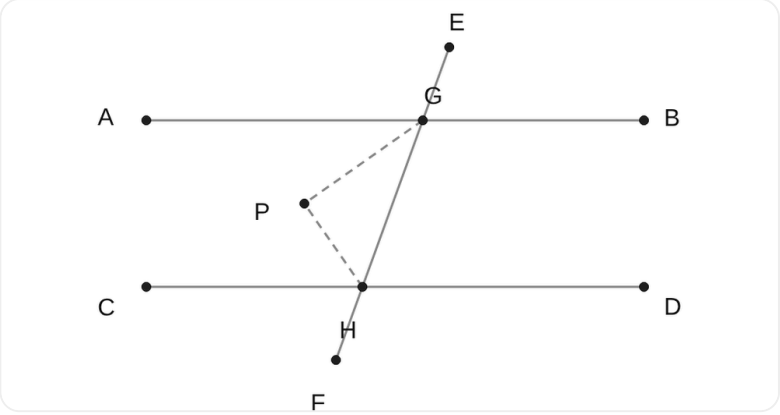
22 בציור כוכב בעל חמישה קודקודים A, B, C, D, E. מצאו את סכום חמש הזוויות שבקודקודי הכוכב.



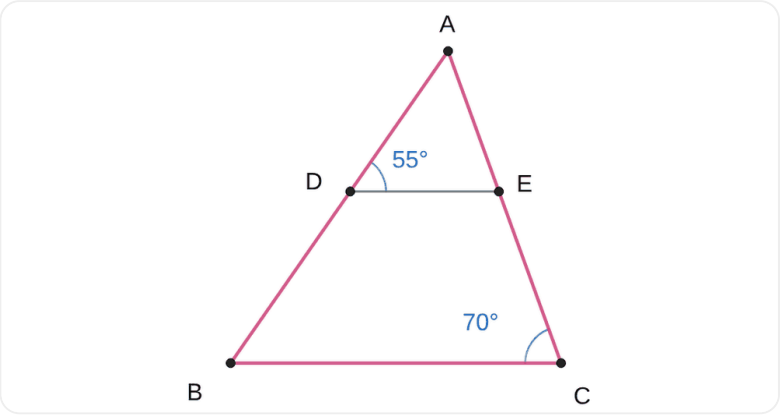
23 דרך הקודקוד A של משולש ABC מעבירים ישר $DE \parallel BC$. בעזרת הציור הוכיחו שסכום זוויות המשולש הוא $180°$. באילו זוויות שוות השתמשתם?



24 $AB \parallel CD$ והישר EF חותך אותם ב-G וב-H. חוצי הזוויות $\sphericalangle AGH$ ו-$\sphericalangle CHG$ נפגשים בנקודה P. מצאו את $\sphericalangle GPH$.



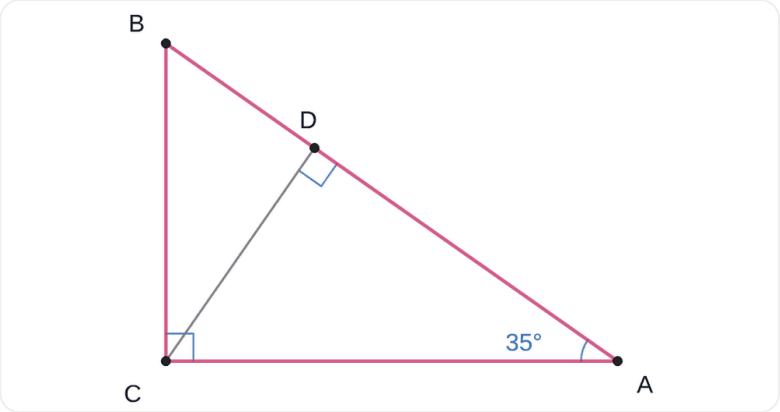
25 במשולש ABC: $DE \parallel BC$ (D על AB, E על AC). נתון: $\sphericalangle ADE = 55°$, $\sphericalangle C = 70°$. מצאו את $\sphericalangle A$ ואת $\sphericalangle DEC$.



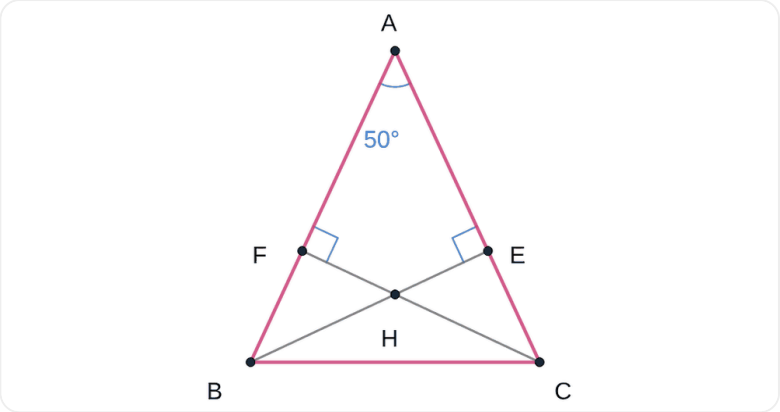
26 הוכיחו שחוצה זווית פנימית וחוצה הזווית החיצונית הצמודה לה (באותו קודקוד של משולש) מאונכים זה לזה.

27 במשולש ABC: $\sphericalangle A = x + 10^\circ$, $\sphericalangle B = 2x - 5^\circ$, והזווית החיצונית ליד C היא $4x - 25^\circ$. מצאו את x ואת שלוש הזוויות הפנימיות.

28 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$) נתון $\sphericalangle A = 35^\circ$. CD הוא הגובה ליתר. מצאו את $\sphericalangle BCD$ ואת $\sphericalangle ACD$.



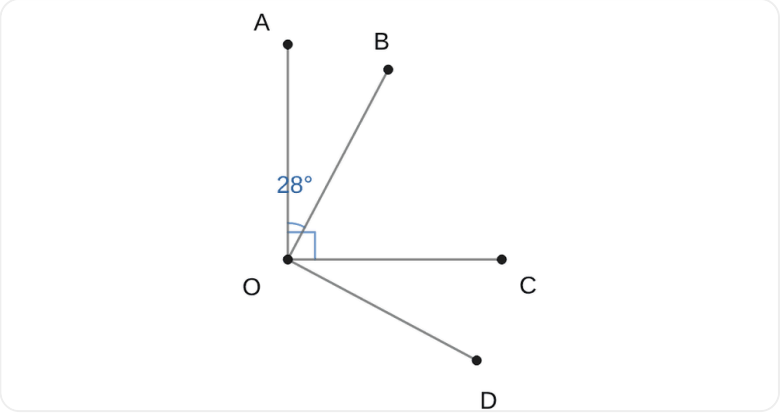
29 במשולש חד-זווית ABC נתון $\sphericalangle A = 50^\circ$. הגבהים BE ו-CF נחתכים בנקודה H. מצאו את $\sphericalangle BHC$.



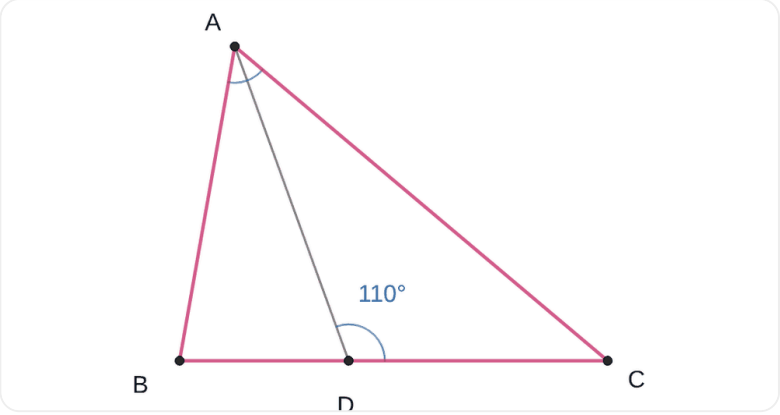
30 במשושה קמור חמש זוויות הן בנות 115° כל אחת. מצאו את הזווית השישית.

31 מצאו זווית שהזווית הצמודה לה (המשלימה ל-180°) גדולה פי 4 מהזווית המשלימה אותה ל-90°.

32 בציור: $OA \perp OC$ ו-$OB \perp OD$. נתון: $\sphericalangle AOB = 28°$. מצאו את $\sphericalangle COD$ ואת $\sphericalangle BOC$.



33 במשולש ABC: AD חוצה את $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B = 2\sphericalangle C$ ו-$\sphericalangle ADC = 110°$. מצאו את זוויות המשולש.



34 האם קיים מצולע משוכלל שכל זווית פנימית שלו היא $130°$? נמקו.

35 במשולש ABC הזווית $\sphericalangle A$ גדולה ב-$20°$ מ-$\sphericalangle B$, ו-$\sphericalangle C$ קטנה פי 2 מסכום שתיהן. מצאו את זוויות המשולש.

✔ תשובות סופיות – נושא 6.1

1. $\sphericalangle BOD = 48^\circ$ (קודקודיות), $\sphericalangle AOD = 132^\circ$ (צמודות)
2. $x = 36^\circ$; $\sphericalangle AOC = 108^\circ$, $\sphericalangle COB = 72^\circ$
3. $x = 60^\circ$; 80°, 120°, 160°
4. $\sphericalangle AOD = 70^\circ$, $\sphericalangle DOB = 110^\circ$
5. $\sphericalangle MON = 90^\circ$ – חצי מ-180° (חוצי זויות צמודות)
6. $\sphericalangle GHD = 65^\circ$ (מתאימות), $\sphericalangle GHC = 115^\circ$
7. $x = 30^\circ$; שתיהן 80° (מתחלפות)
8. $x = 30^\circ$; $\sphericalangle BGH = 120^\circ$, $\sphericalangle GHD = 60^\circ$ (חד-צדדיות)
9. כן: $\sphericalangle GHD = 72^\circ = \sphericalangle EGB$ (מתאימות שוות)
10. $\sphericalangle BPD = 75^\circ$
11. $\sphericalangle BPD = 110^\circ$
12. 30°, 60°, 90° – משולש ישר זווית
13. $\sphericalangle B = 65^\circ$ (זווית חיצונית שווה לסכום שתי הפנימיות שאינן צמודות לה)
14. פנימיות: 70°, 50°, 60° ; החיצונית השלישית: 120°
15. $\sphericalangle BIC = 90^\circ + \frac{\sphericalangle A}{2} = 125^\circ$
16. $\sphericalangle HAK = 15^\circ$ (בכלליות: $\frac{\sphericalangle B - \sphericalangle C}{2}$)
17. 540° ; 120°
18. 12 צלעות
19. 15 צלעות ; 2340°
20. 10 צלעות
21. 48°, 72°, 96°, 144° ; הפרש 96°
22. 180°
23. $\sphericalangle DAB = \sphericalangle B$ ו-$\sphericalangle EAC = \sphericalangle C$ (מתחלפות), ושלוש הזוויות ב-A יוצרות 180°

24	$\sphericalangle GPH = 90°$ (חצי מסכום זוויות חד-צדדיות)
25	$\sphericalangle A = 55°$, $\sphericalangle DEC = 110°$
26	הזווית ביניהם $90°$ – חצי מ- $180°$
27	$x = 30°$; $\sphericalangle A = 40°$, $\sphericalangle B = 55°$, $\sphericalangle C = 85°$
28	$\sphericalangle BCD = 35°$, $\sphericalangle ACD = 55°$
29	$\sphericalangle BHC = 130°$ ($180° - \sphericalangle A$)
30	$145°$
31	$60°$
32	$\sphericalangle COD = 28°$, $\sphericalangle BOC = 62°$
33	$\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 80°$, $\sphericalangle C = 40°$
34	לא: הזווית החיצונית $50°$, ו- $360 : 50 = 7.2$ אינו מספר שלם
35	$\sphericalangle A = 70°$, $\sphericalangle B = 50°$, $\sphericalangle C = 60°$

6.2 חפיפת משולשים ומשולש שווה שוקיים

משפטי החפיפה: צ.ז.צ, ז.צ.ז, צ.צ.צ, וצ.צ.ז (הזווית מול הצלע הגדולה). במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות, והתיכון לבסיס הוא גם גובה וגם חוצה זווית הראש.

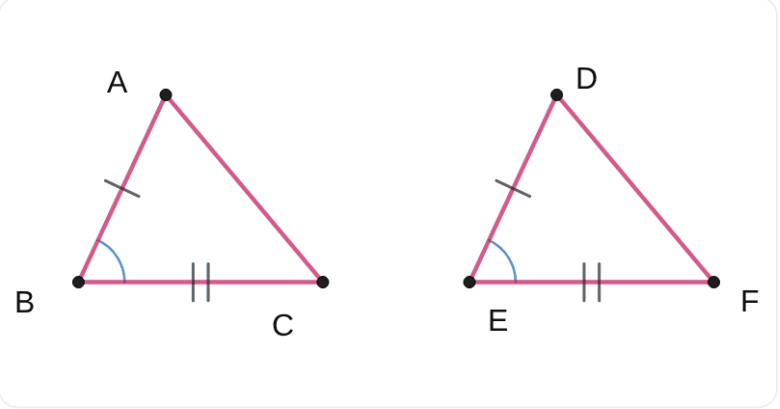
צפו לפני שמתחילים:

חפיפת משולשים – הסבר ותרגול
YouTube · 8:56

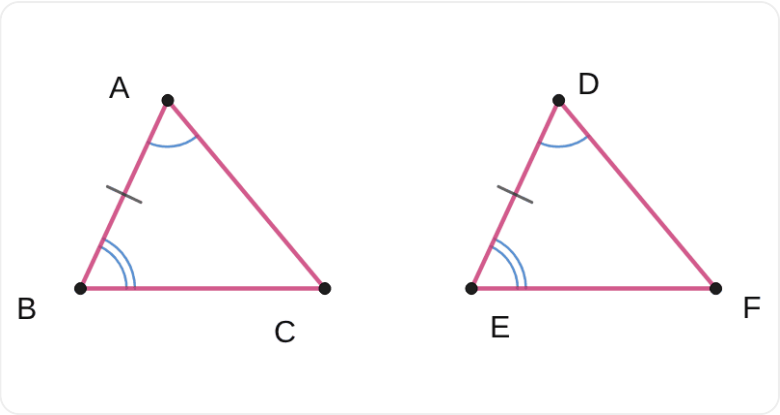
משפט חפיפה רביעי (צ.צ.ז)
YouTube · 8:53

משולש שווה שוקיים – כל מה שצריך לדעת
YouTube · 10:26

1 נתון: $AB = DE$, $BC = EF$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$. האם $\triangle ABC \cong \triangle DEF$? לפי איזה משפט?

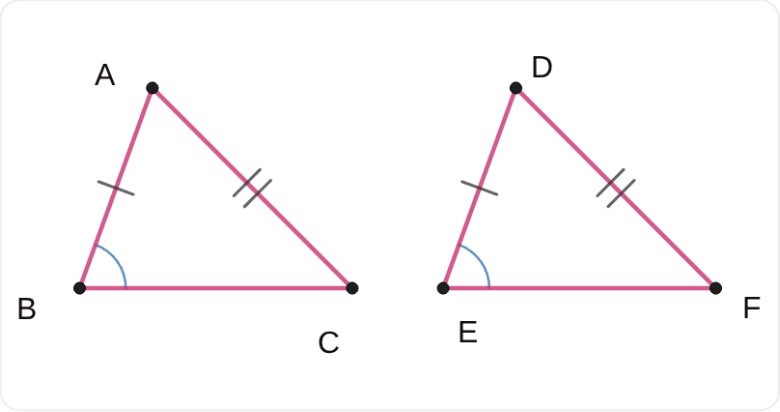


2 נתון: $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, $AB = DE$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$. לפי איזה משפט המשולשים ABC ו-DEF חופפים? איזו צלע ב-$\triangle DEF$ שווה ל-AC?



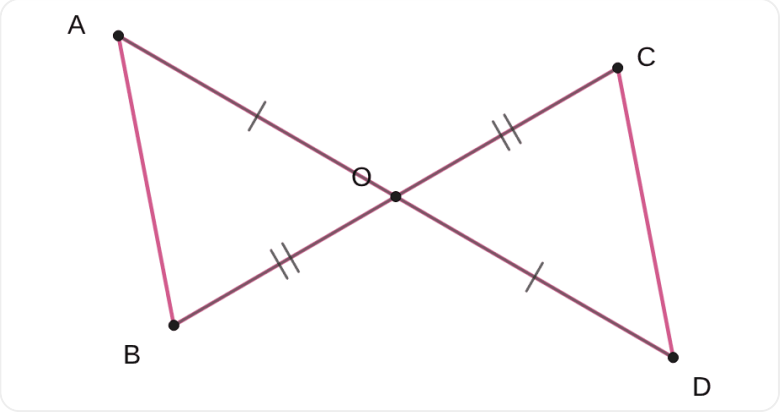
3 נתון: $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$. לפי איזה משפט המשולשים חופפים?
אם $\sphericalangle A = 70^\circ$, מהי הזווית השווה לה במשולש DEF?

4 נתון: $AB = DE = 8$, $AC = DF = 10$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$. האם המשולשים חופפים?
לפי איזה משפט? (שימו לב מול איזו צלע נמצאת הזווית.)

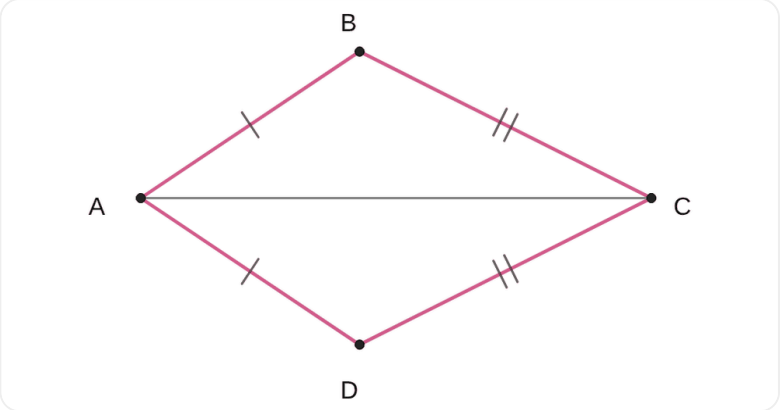


5 שני משולשים שבהם שלוש הזוויות שוות בהתאמה. האם הם בהכרח חופפים? מה כן אפשר לומר עליהם?

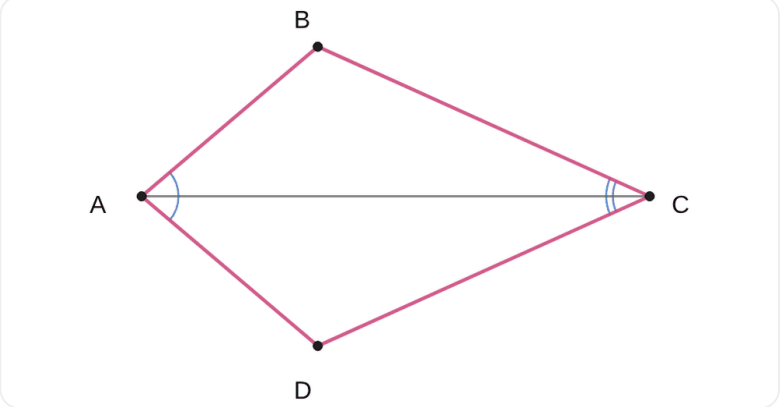
6 הקטעים AD ו-BC נחתכים בנקודה O, ו-O היא אמצע של כל אחד מהם. הוכיחו ש-$\triangle AOB \cong \triangle DOC$. אם $AB = 7$, מצאו את DC.



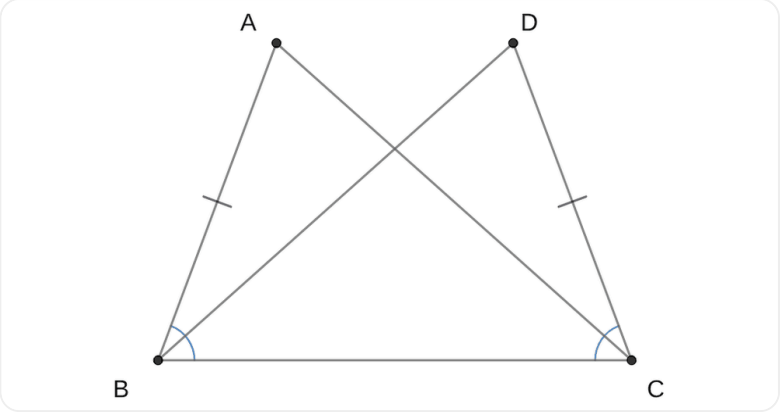
7 במרובע $ABCD$: $AB = AD$, $CB = CD$. הוכיחו ש-$\triangle ABC \cong \triangle ADC$. אם $\sphericalangle BAD = 80°$, מצאו את $\sphericalangle BAC$.



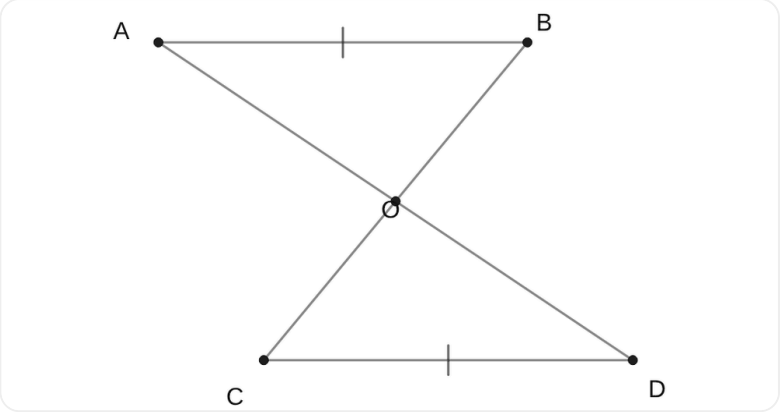
8 במרובע $ABCD$ האלכסון AC חוצה את $\sphericalangle A$ ואת $\sphericalangle C$. נתון: $AB = 5$, $BC = 8$. מצאו את היקף המרובע. לפי איזה משפט חפיפה השתמשתם?



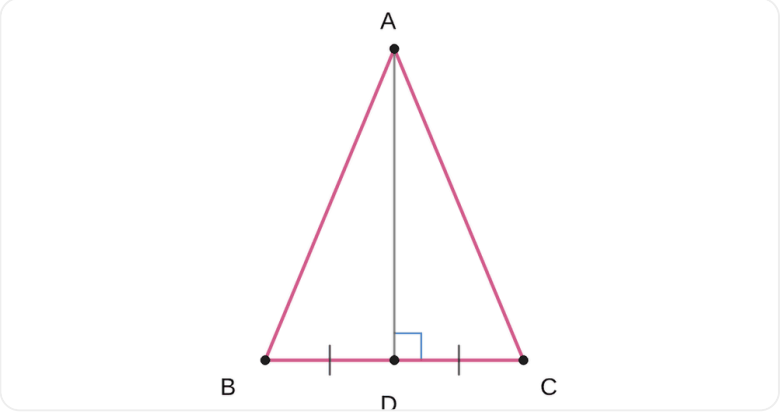
9 A ו-D באותו צד של BC, כך ש-$AB = DC$ ו-$\sphericalangle DCB = \sphericalangle ABC$. הוכיחו ש-$AC = DB$. אם $AC = 9$, מצאו את DB.



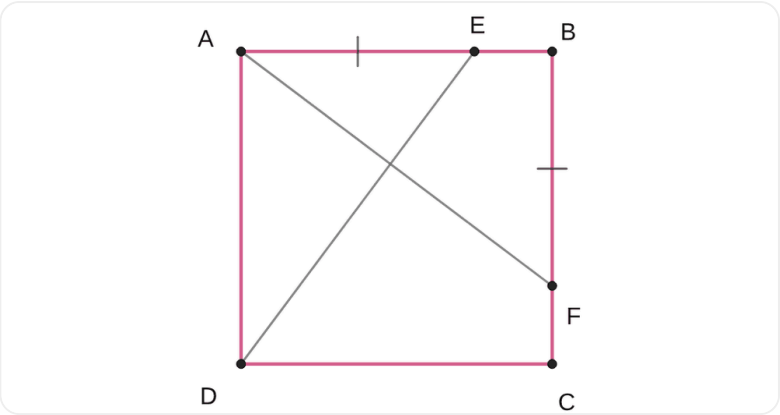
10 $AB \parallel CD$ ו-$AB = CD$. הקטעים AD ו-BC נחתכים בנקודה O. הוכיחו ש-O אמצע AD. אם $AD = 12$, מצאו את AO.



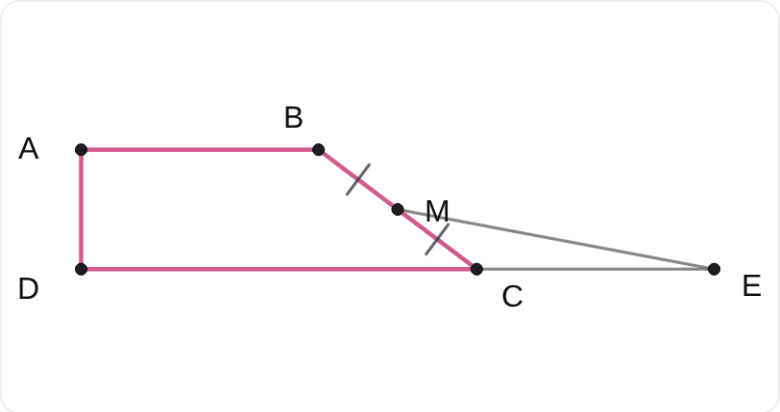
11 במשולש ABC, $AD \perp BC$ ו-$BD = DC$. הוכיחו ש-$AB = AC$. אם $AB = 13$ ו-$BD = 5$, מצאו את היקף המשולש.



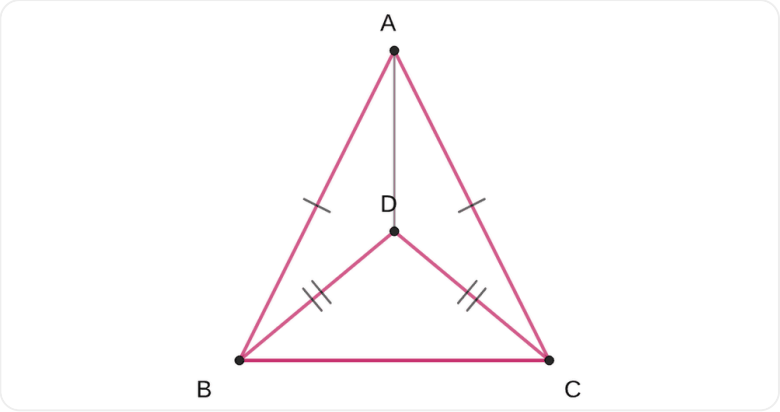
12 $ABCD$ ריבוע שצלעו 4. E על AB ו-F על BC, כך ש-$AE = BF = 3$.
הוכיחו ש-$DE = AF$ ומצאו את אורכם.



13 בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$), M אמצע השוק BC. הישר AM חותך את המשך DC בנקודה E. הוכיחו ש-$AB = CE$. אם $AB = 6$ ו-$DC = 10$, מצאו את DE.

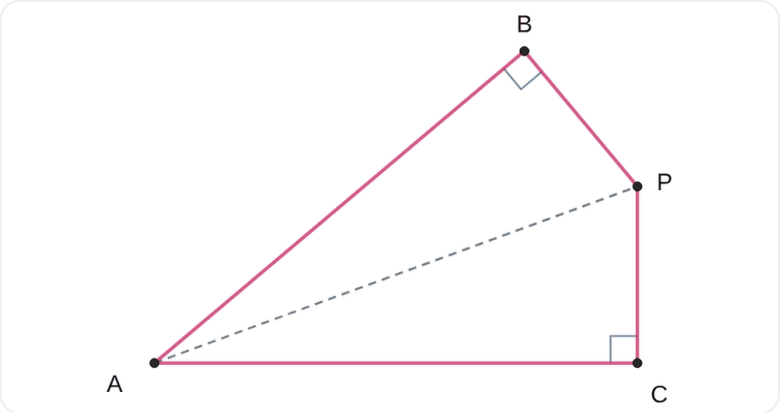


14 ABC ו-DBC משולשים שווי שוקיים על אותו בסיס BC (A ו-D באותו צד).
הוכיחו ש-AD חוצה את $\sphericalangle BAC$. אם $\sphericalangle BAC = 50°$, מצאו את $\sphericalangle BAD$.

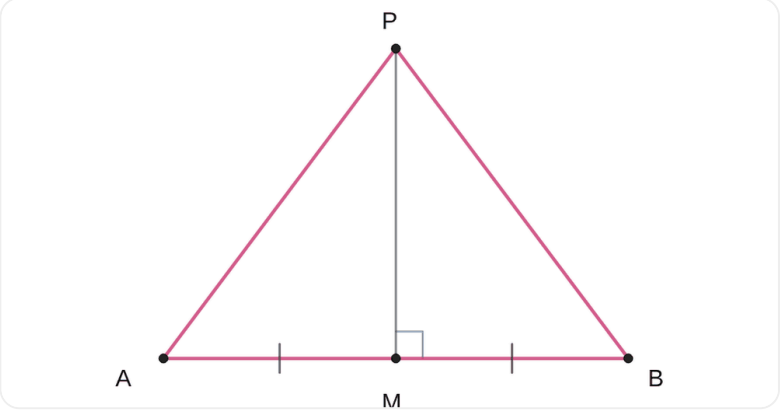


15 נתון: $AB = DE$ ו- $\sphericalangle A = \sphericalangle D$. איזה נתון נוסף דרוש כדי להוכיח חפיפה של $\triangle ABC$ ו- $\triangle DEF$ לפי צ.ז.צ? ואיזה לפי ז.צ.ז?

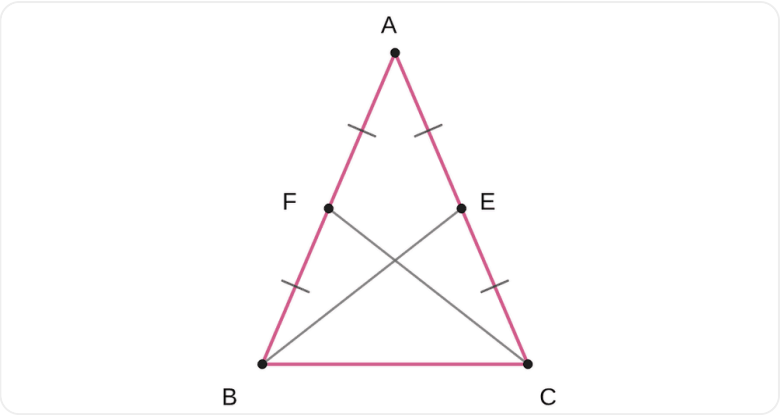
16 הנקודה P נמצאת על חוצה הזווית $\sphericalangle A$. PB ו- PC אנכים לשוקי הזווית. הוכיחו ש- $PB = PC$ ו- $AB = AC$. אם $PB = 4$, מצאו את PC.



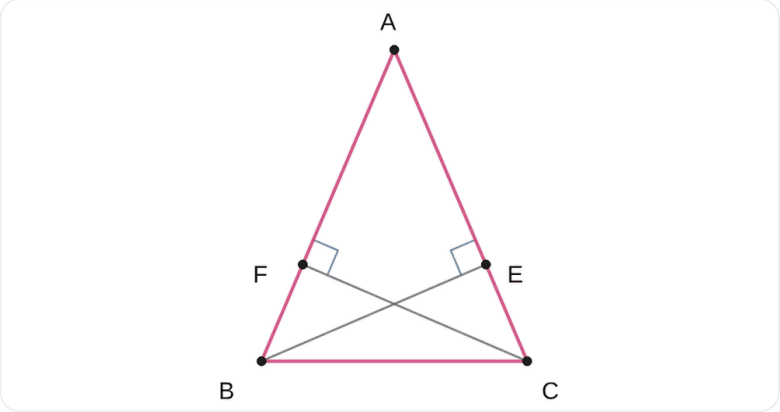
17 הנקודה P נמצאת על האנך האמצעי לקטע AB (M אמצע AB). הוכיחו ש- $PA = PB$. אם $PA = 7$, מהו PB? ואם $AB = 6$ ו- $PM = 4$ – מהו PA?



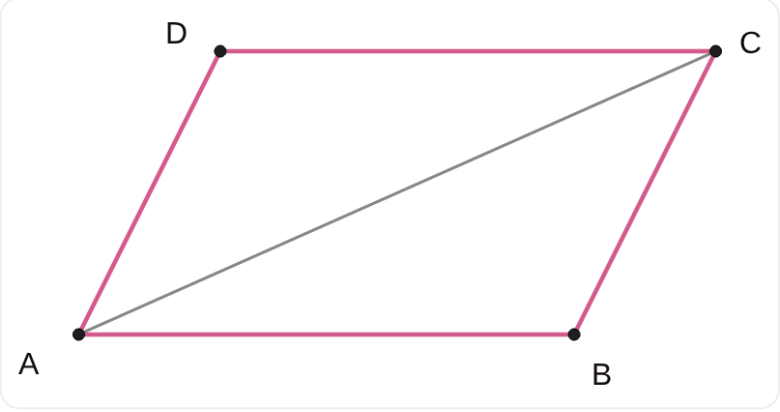
18 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$), BE ו-CF תיכונים לשוקיים. הוכיחו ש-$BE = CF$. אם $BE = 9$, מצאו את CF.



19 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$), BE ו-CF גבהים לשוקיים. הוכיחו ש-$BE = CF$. אם $CF = 6$, מהו BE?

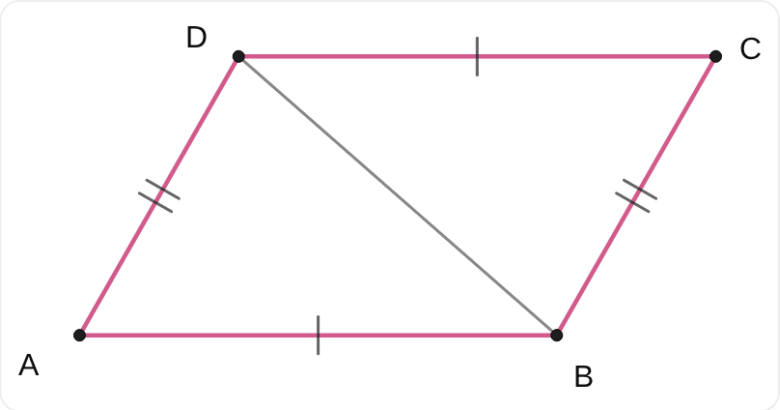


20 במרובע $ABCD$: $DC \parallel AB$ ו-$AD \parallel BC$. הוכיחו ש-$\triangle ABC \cong \triangle CDA$. אם $AB = 7$ ו-$BC = 4$, מצאו את היקף המרובע.

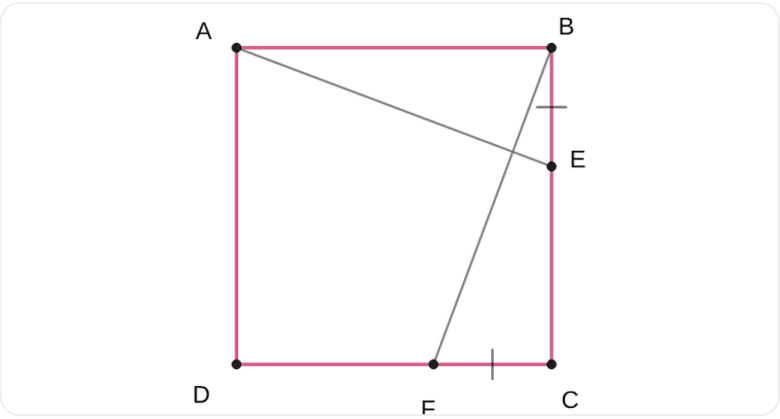


21 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) מורידים גובה AD לבסיס. הוכיחו בעזרת משפט החפיפה הרביעי ש-$BD = DC$. אם $BC = 14$, מצאו את BD.

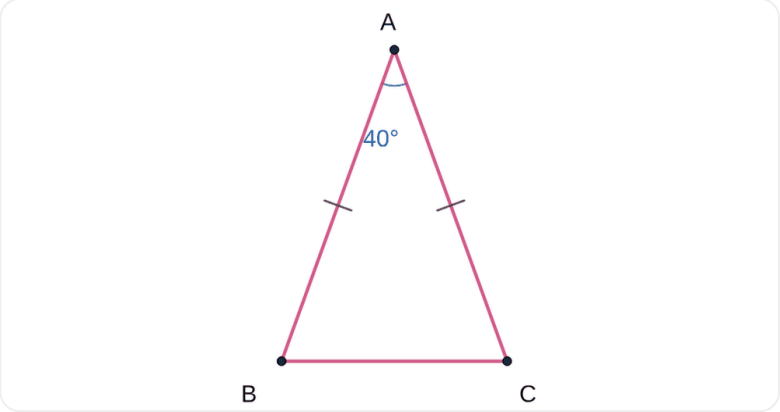
22 במרובע $ABCD$: $AB = CD$ ו-$AD = BC$. הוכיחו ש-$\sphericalangle A = \sphericalangle C$ ושה-$AB \parallel CD$. אם $\sphericalangle A = 110^\circ$, מצאו את $\sphericalangle C$.



23 $ABCD$ ריבוע. E על BC ו-F על CD כך ש-$BE = CF$. הוכיחו ש-$AE \perp BF$. מהי הזווית בין AE ל-BF?



24 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) זווית הראש $\sphericalangle A = 40°$. מצאו את זוויות הבסיס.



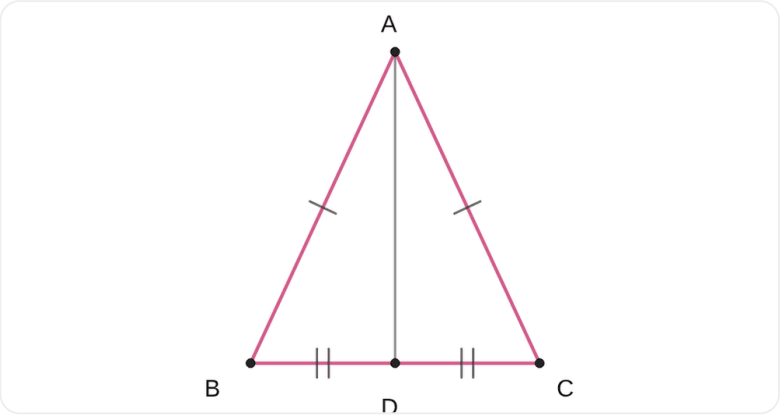
25 במשולש שווה שוקיים זווית הבסיס היא $35°$. מצאו את זווית הראש ואת הזווית החיצונית ליד הבסיס.

26 במשולש שווה שוקיים זווית אחת היא $100°$. מצאו את שתי הזוויות האחרות. מדוע $100°$ לא יכולה להיות זווית בסיס?

27 במשולש שווה שוקיים זווית אחת היא $50°$. מצאו את כל האפשרויות לשתי הזוויות האחרות.

28 במשולש שווה שוקיים זווית הראש גדולה פי 3 מזווית הבסיס. מצאו את זוויות המשולש.

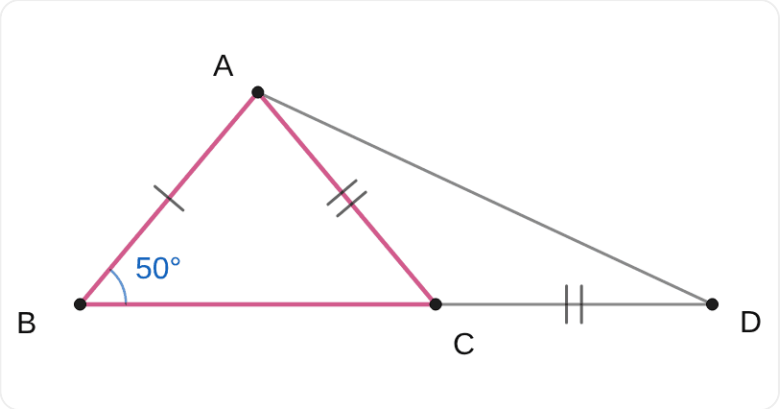
29 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$), AD תיכון לבסיס. נתון $\sphericalangle BAC = 50°$. מצאו את $\sphericalangle BAD$ ואת $\sphericalangle ADB$. איזה משפט השתמשתם בו?



30 משולש שווה שוקיים שבסיסו 10 וגובהו לבסיס 12. מצאו את אורך השוק ואת היקף המשולש.

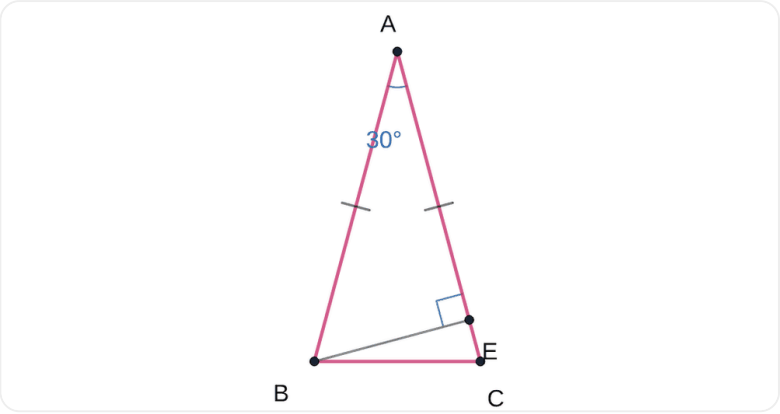
31 היקף משולש שווה שוקיים הוא 32 והבסיס קצר ב-4 מהשוק. מצאו את צלעות המשולש.

32 במשולש שווה שוקיים ABC $(AB=AC)$ $\sphericalangle B=50^\circ$. על המשך הבסיס BC מעבר ל-C מסמנים נקודה D כך ש-$CD=CA$. מצאו את $\sphericalangle CAD$ ואת $\sphericalangle BAD$.

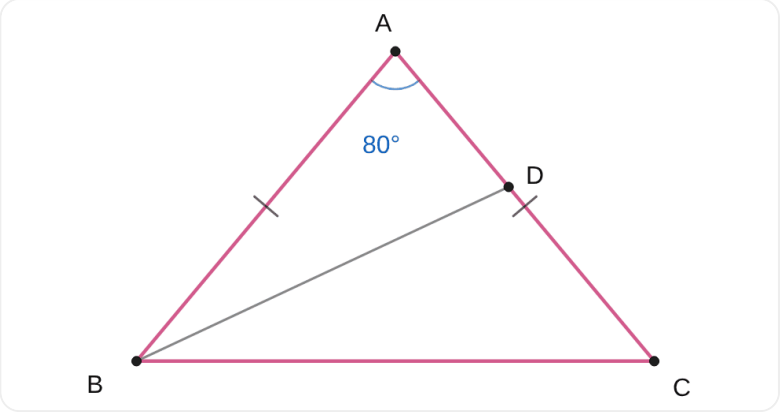


33 במשולש ABC: $\sphericalangle A=70^\circ$, $\sphericalangle B=40^\circ$. האם המשולש שווה שוקיים? אם כן – אילו צלעות שוות?

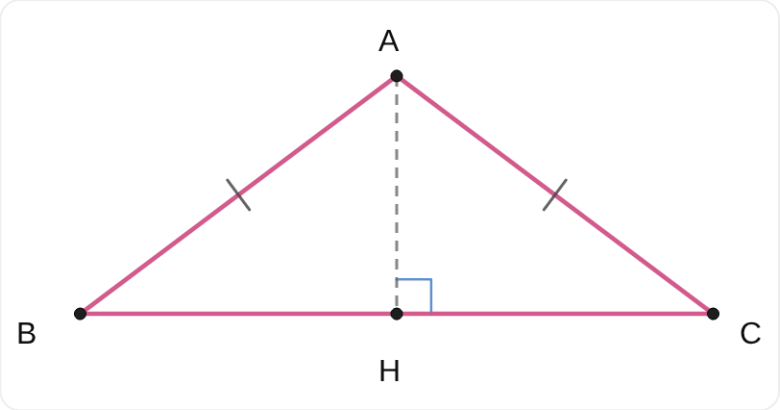
34 במשולש שווה שוקיים ABC $(AB=AC)$ $\sphericalangle A=30^\circ$, ו-$BE$ גובה לשוק AC. מצאו את $\sphericalangle EBC$.



35 במשולש שווה שוקיים ABC $(AB=AC)$ $\sphericalangle A=80^\circ$. חוצה הזווית $\sphericalangle B$ חותך את AC בנקודה D. מצאו את $\sphericalangle BDC$ ואת $\sphericalangle ADB$.

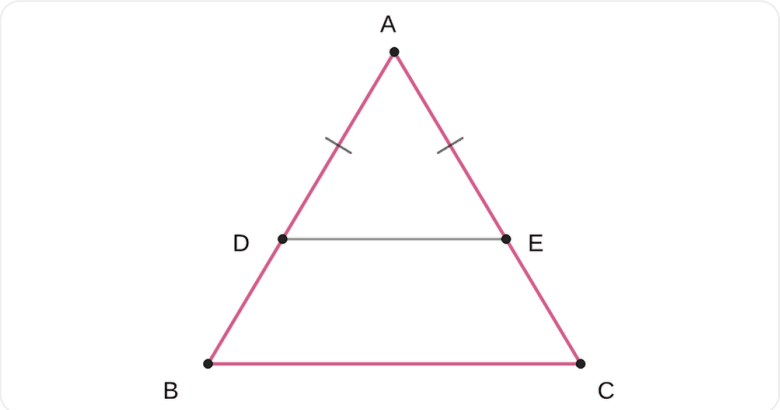


36 משולש שווה שוקיים ששוקו 5 ובסיסו 8. מצאו את הגובה לבסיס ואת שטח המשולש.

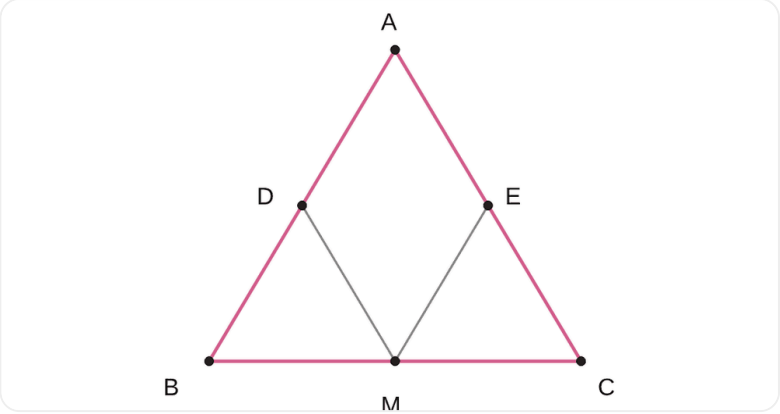


37 הוכיחו שבמשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות ל-60°. מה גובהו של משולש שווה צלעות שצלעו 6?

38 במשולש שווה שוקיים ABC $(AB=AC)$ מסמנים על השוקיים נקודות D, E כך ש-$AD=AE$. הוכיחו ש-$DE \parallel BC$.

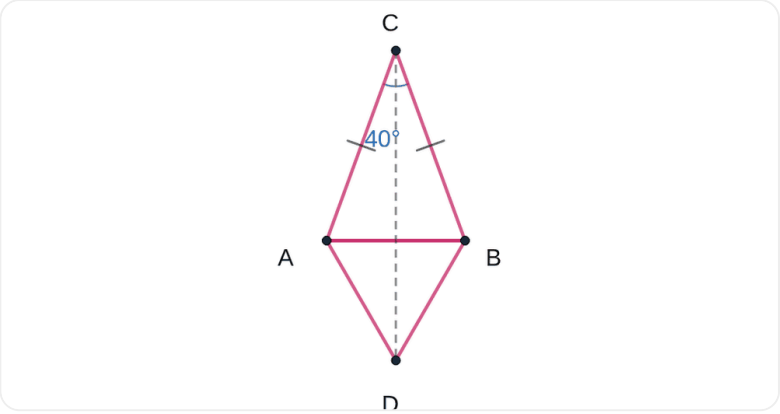


39 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB=AC$), M אמצע הבסיס BC. D ו-E אמצעי השוקיים. הוכיחו ש-$MD=ME$.



40 במשולש ABC התיכון AM שווה למחצית הצלע BC. מצאו את $\sphericalangle BAC$. (רמז: שני משולשים שווי שוקיים)

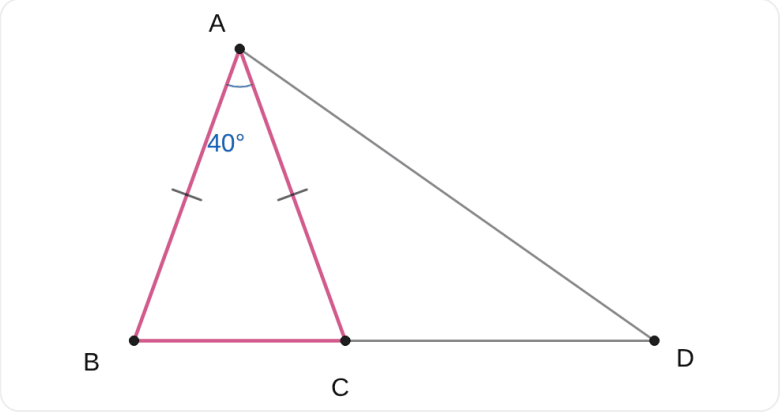
41 על הצלע AB של משולש שווה שוקיים ABC ($CA=CB$) בונים כלפי חוץ משולש שווה צלעות ABD. אם $\sphericalangle ACB=40^\circ$, מצאו את $\sphericalangle CAD$.



42 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB=AC$) הזווית החיצונית ליד C היא $3x+10^\circ$, וזווית הראש היא $2x-20^\circ$. מצאו את זוויות המשולש.

43 במשולש ABC: $AB=AC$ ו-$\sphericalangle B=2x$, $\sphericalangle A=x+30^\circ$. מצאו את x וקבעו אם המשולש חד-זווית, ישר-זווית או קהה-זווית.

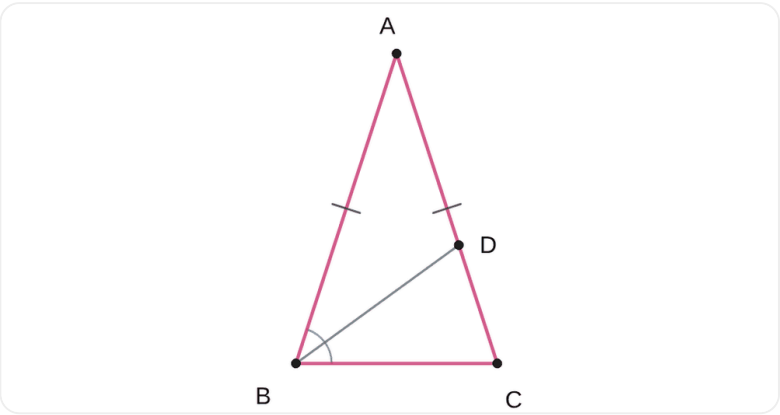
44 משולש ABC שווה שוקיים ($AB=AC$). D על המשך BC כך ש-$\sphericalangle CAD=\sphericalangle ADC$. אם $\sphericalangle BAC=40°$, מצאו את $\sphericalangle D$.



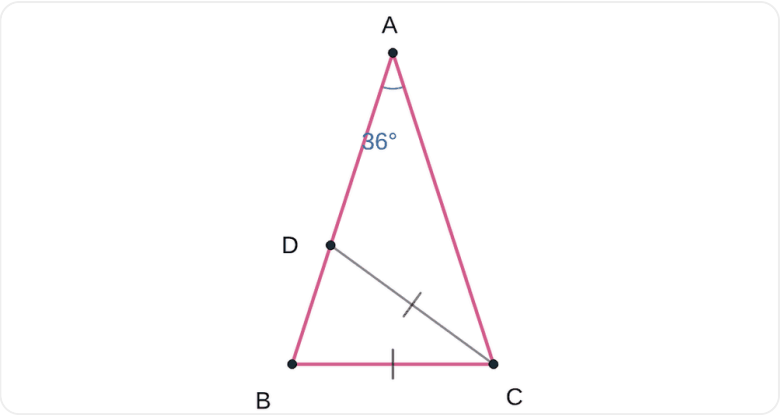
45 במשולש שווה שוקיים הגובה לבסיס הוא 8 והבסיס 12. מצאו את אורך הגובה לשוק.

46 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB=AC$) נתון $BC=AB$. מהם גודלי הזוויות? איך נקרא המשולש?

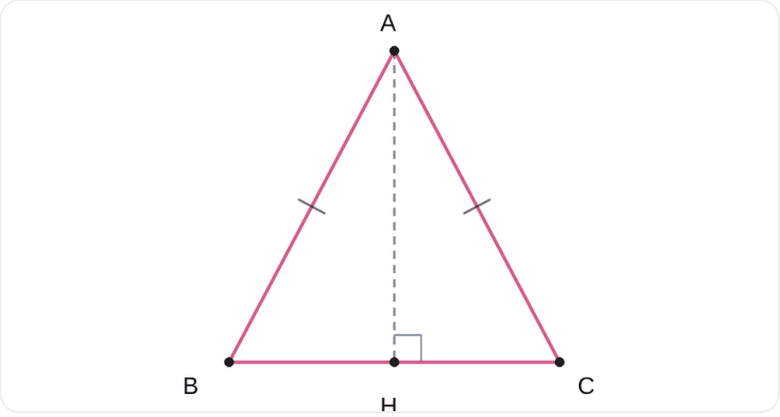
47 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB=AC$) $\sphericalangle B=72°$, ו-BD חוצה את $\sphericalangle B$ (D על AC). אם $BC=4$, מצאו את BD ואת AD.



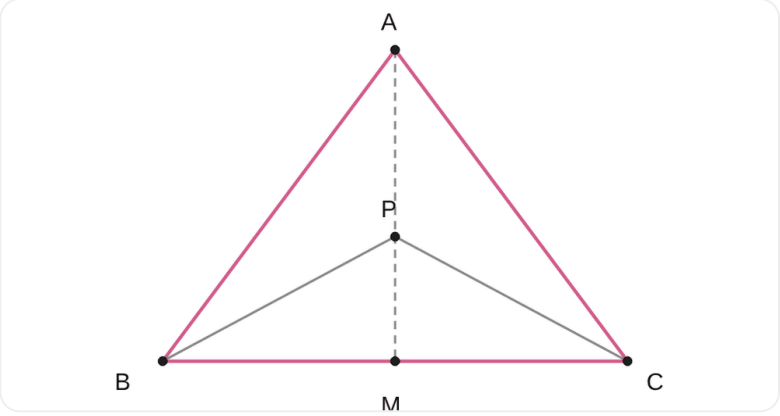
48 במשולש שווה שוקיים ABC $(AB=AC)$ הנקודה D על AB כך ש-$CD=CB$.
אם $\sphericalangle A=36^\circ$, מצאו את $\sphericalangle ACD$.



49 משולש שווה שוקיים, השוק 17 והגובה לבסיס 15. מצאו את הבסיס, ההיקף והשטח.



50 בתוך משולש שווה שוקיים ABC $(AB=AC)$ הנקודה P נמצאת על הגובה לבסיס.
הוכיחו ש-$PB=PC$ וש-$\sphericalangle PBC=\sphericalangle PCB$.



✔ תשובות סופיות – נושא 6.2

1. כן – צ.ז.צ
2. ז.צ.ז ; $DF = AC$
3. צ.צ.צ ; $\sphericalangle D = 70^\circ$
4. כן – משפט החפיפה הרביעי (צ.צ.ז): הזווית מול הצלע הגדולה מבין השתיים
5. לא – הם דומים (ייתכן שבגודל שונה)
6. צ.ז.צ (זוויות קודקודיות) ; $DC = 7$
7. צ.צ.צ ; $\sphericalangle BAC = 40^\circ$
8. ז.צ.ז ; היקף 26
9. צ.ז.צ (BC משותפת) ; $DB = 9$
10. ז.צ.ז (זוויות מתחלפות) ; $AO = 6$
11. צ.ז.צ ; היקף 36
12. $\triangle DAE \cong \triangle ABF$ (צ.ז.צ) ; $DE = AF = 5$
13. ז.צ.ז ($\triangle ABM \cong \triangle ECM$) ; $DE = 16$
14. צ.צ.צ ($\triangle ABD \cong \triangle ACD$) ; 25°
15. צ.ז.צ: $AC = DF$; ז.צ.ז: $\sphericalangle B = \sphericalangle E$
16. $\triangle ABP \cong \triangle ACP$ (ז.צ.ז) ; $PC = 4$
17. צ.ז.צ ; $PB = 7$; $PA = 5$
18. $\triangle EBC \cong \triangle FCB$ (צ.ז.צ) ; $CF = 9$
19. ז.צ.ז ($\triangle EBC \cong \triangle FCB$) ; $BE = 6$
20. ז.צ.ז ; היקף 22
21. $AB = AC$, AD משותפת, זווית ישרה מול הצלע הגדולה ; $BD = 7$
22. צ.צ.צ ($\triangle ABD \cong \triangle CDB$) ; $\sphericalangle C = 110^\circ$
23. $\triangle ABE \cong \triangle BCF$ (צ.ז.צ) ; 90°

24 70° כל אחת

25 זווית ראש 110° ; זווית חיצונית 145°

26 40°, 40° ; שתי זוויות בסיס של 100° יחרגו מ-180°

27 50° ו-80°, או 65° ו-65°

28 36°, 36°, 108°

29 $\sphericalangle BAD = 25^\circ$, $\sphericalangle ADB = 90^\circ$; במשולש שו"ש התיכון לבסיס הוא גם גובה וחוצה זווית

30 שוק 13 ; היקף 36

31 שוקיים 12, בסיס 8

32 $\sphericalangle CAD = 25^\circ$, $\sphericalangle BAD = 105^\circ$

33 כן: $\sphericalangle A = 70^\circ = \sphericalangle C$ ולכן $AB = BC$

34 $\sphericalangle EBC = 15^\circ$ (חצי מזווית הראש)

35 $\sphericalangle BDC = 105^\circ$, $\sphericalangle ADB = 75^\circ$

36 גובה 3 ; שטח 12

37 $3\sqrt{3}$

38 $\sphericalangle B = \sphericalangle ADE = \frac{180^\circ - \sphericalangle A}{2}$ – זוויות מתאימות שוות

39 $\triangle BDM \cong \triangle CEM$ (צ.ז.צ)

40 $\sphericalangle BAC = 90^\circ$

41 $\sphericalangle CAD = 130^\circ$

42 $x = 35^\circ$; $\sphericalangle A = 50^\circ$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 65^\circ$ (חיצונית 115°)

43 $x = 30^\circ$; 60°, 60°, 60° – שווה צלעות (חד-זווית)

44 $\sphericalangle D = 35^\circ$

45 $\frac{48}{5} = 9.6$

46 60° כל אחת – שווה צלעות

47 $BD = 4$, $AD = 4$ (שני משולשים שווי שוקיים)

48 $\sphericalangle ACD = 36^\circ$

49 בסיס 16 ; היקף 50 ; שטח 120

50 הגובה לבסיס הוא האנך האמצעי של BC, ולכן $PB = PC$

6.3 משולש ישר זווית ונקודות מפגש במשולש

פיתגורס $a^2+b^2=c^2$; התיכון ליתר שווה למחצית היתר ; מול זווית 30° ניצב השווה למחצית היתר. התיכונים נפגשים בנקודה המחלקת כל תיכון ביחס $1:2$ מהקודקוד; גם הגבהים וגם חוצי הזוויות נפגשים בנקודה אחת.

צפו לפני שמתחילים:

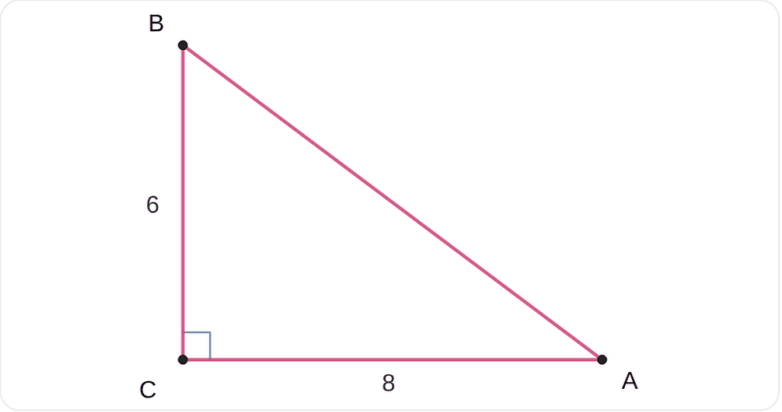
כל משפטי משולש ישר זווית
YouTube · 10:16

הוכחת משפט פיתגורס
YouTube · 8:06

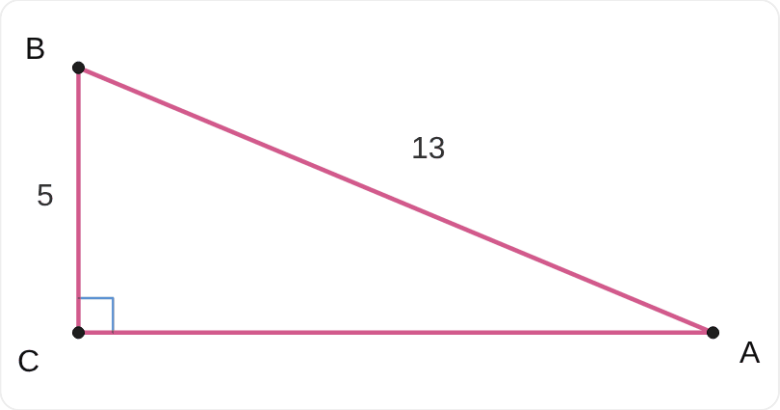
הוכחת משפט תיכון ליתר
YouTube · 1:53

מפגש תיכונים במשולש – הסבר ותרגול
YouTube · 12:33

1 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C=90^\circ$): $AC=8$, $BC=6$. מצאו את היתר AB.



2 במשולש ישר זווית היתר 13 וניצב אחד 5. מצאו את הניצב השני ואת שטח המשולש.



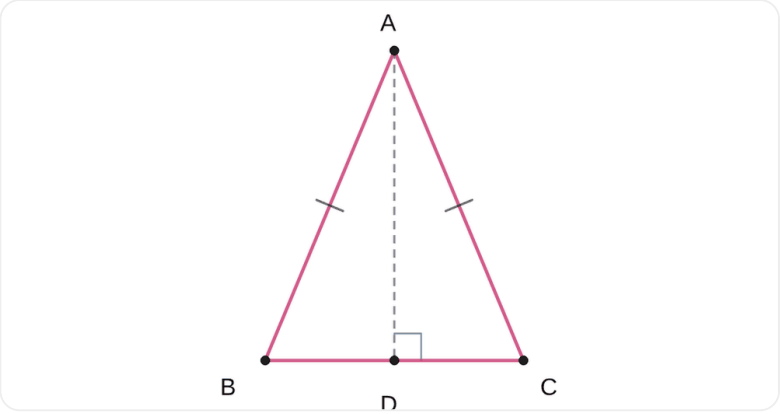
3 ניצבי משולש ישר זווית הם 3 ו-3. מצאו את היתר.

4 האם משולש שצלעותיו 7, 24, 25 ישר זווית? ומשולש שצלעותיו 6, 8, 11?

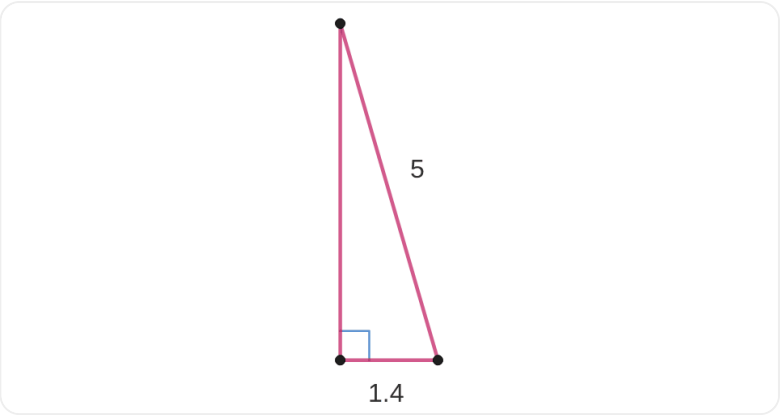
5 אלכסון ריבוע הוא 10. מצאו את צלע הריבוע ואת שטחו.

6 מלבן שאורכו 15 ואלכסונו 17. מצאו את רוחבו ואת היקפו.

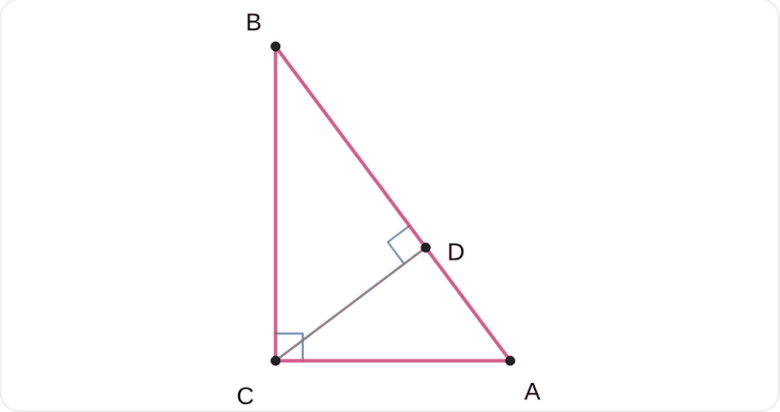
7 במשולש שווה שוקיים השוק 13 והבסיס 10. מצאו את הגובה לבסיס בעזרת משפט פיתגורס.



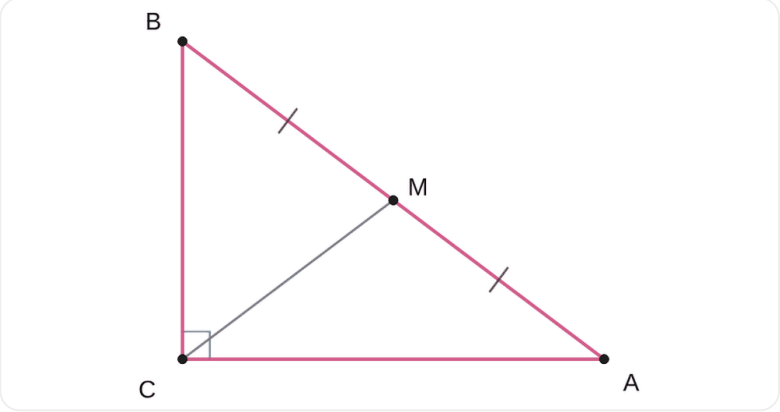
8 סולם באורך 5 מטר נשען על קיר, ורגלו במרחק 1.4 מטר מהקיר. לאיזה גובה מגיע הסולם?



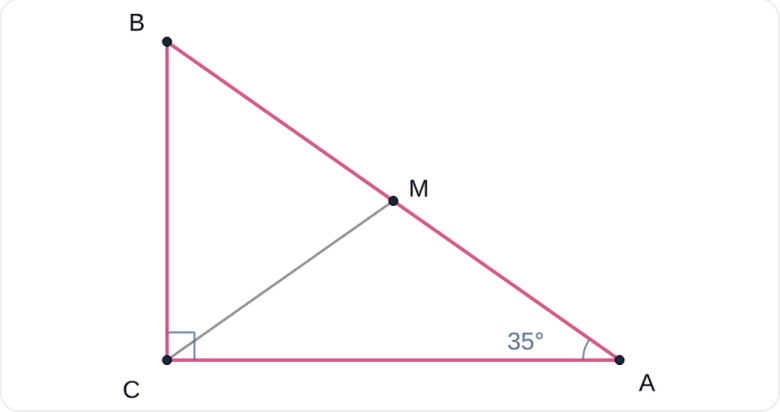
9 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90°$): $AC = 9$, $BC = 12$. הגובה ליתר CD. מצאו את AB, את CD ואת AD.



10 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90°$): $AC = 8$, $BC = 6$, ו-CM התיכון ליתר. מצאו את CM.

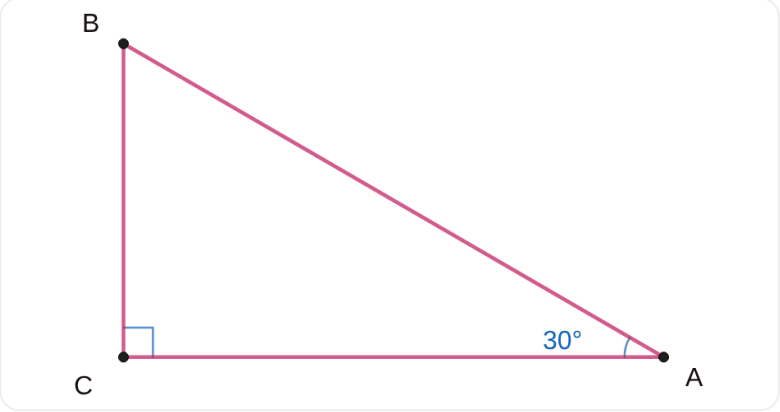


11 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90°$), CM תיכון ליתר ו- $\sphericalangle A = 35°$. מצאו את $\sphericalangle MCA$ ואת $\sphericalangle BMC$.



12 במשולש ABC התיכון CM לצלע AB שווה ל- MA. הוכיחו ש- $\sphericalangle ACB = 90°$ (המשפט ההפוך).

13 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90°$, $\sphericalangle A = 30°$) היתר $AB = 12$. מצאו את BC ואת AC.

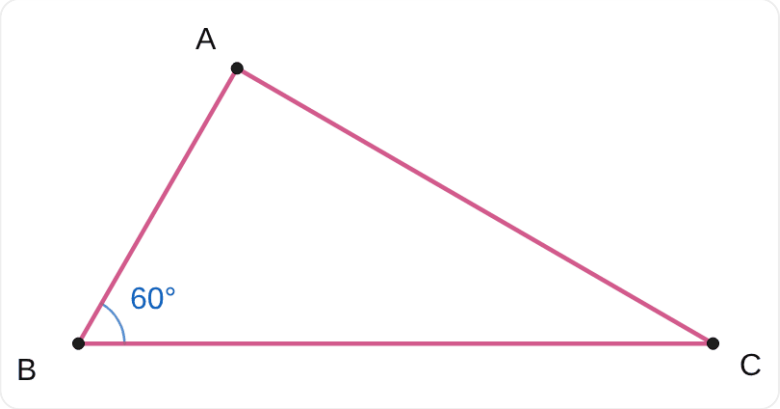


14 במשולש ישר זווית הזווית החדה $60°$, והניצב הסמוך לה 5. מצאו את היתר ואת הניצב השני.

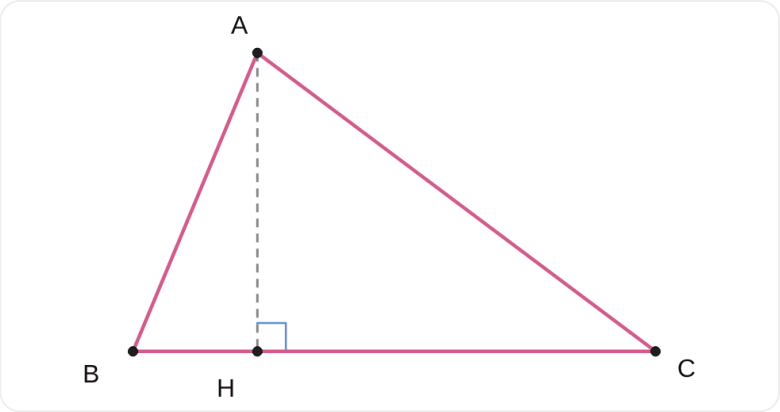
15 במשולש ABC ישר זווית ($\sphericalangle C = 90°$) נתון $AB = 2BC$. מצאו את $\sphericalangle A$.

16 במשולש ישר זווית ושווה שוקיים הניצב הוא 6. מצאו את היתר ואת הגובה ליתר.

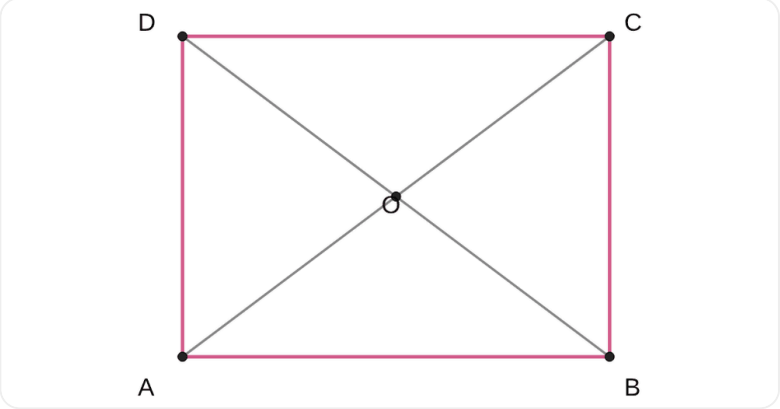
17 במשולש ABC: $\sphericalangle B = 60°$, $AB = 4$, $BC = 8$. הוכיחו ש- $\sphericalangle A = 90°$ ומצאו את AC.



18 במשולש ABC הגובה AH לצלע BC מחלק אותה לקטעים $BH = 5$ ו- $HC = 16$, ו- $AH = 12$. מצאו את AB ואת AC. האם $\sphericalangle BAC$ ישרה?

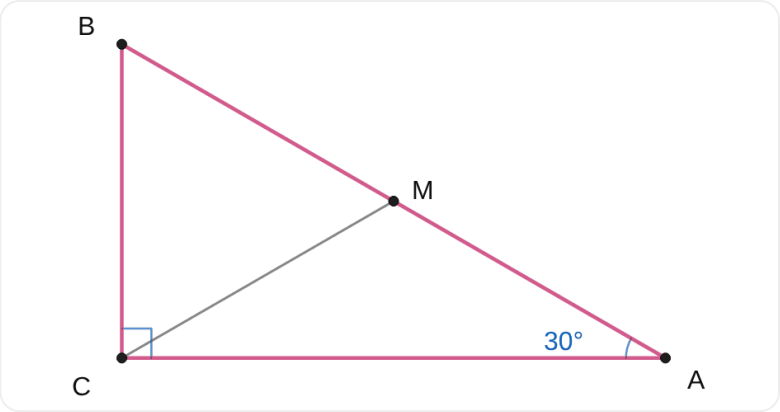


19 במלבן $ABCD$: $AB = 8$, $BC = 6$. האלכסונים נחתכים בנקודה O. מצאו את AO ואת היקף $\triangle AOB$.

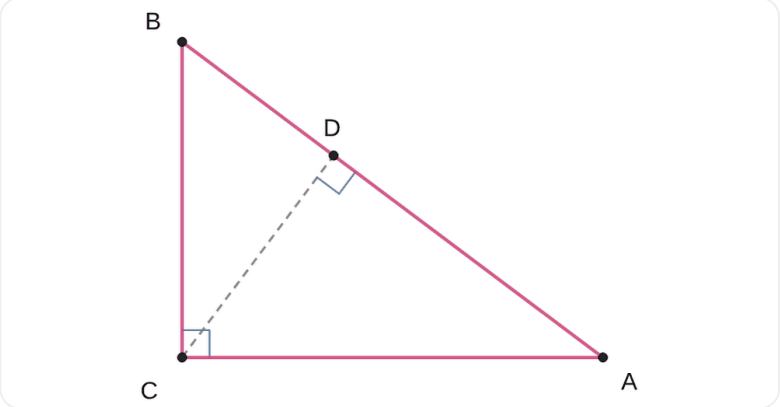


20 שלשות פיתגוריות: השלימו – $(5,12,\ ?)$, $(8,\ ?,17)$, $(\ ?,40,41)$. מה מקבלים כשמכפילים שלשה פיתגורית במספר?

21 במשולש ABC ($\sphericalangle C=90^\circ$, $\sphericalangle A=30^\circ$), CM תיכון ליתר ו-$BC=4$. מצאו את CM, את AB והוכיחו ש-$\triangle BCM$ שווה צלעות.



22 במשולש ישר זווית הניצבים מתייחסים כמו $3:4$ והיתר 25. מצאו את הניצבים ואת הגובה ליתר.

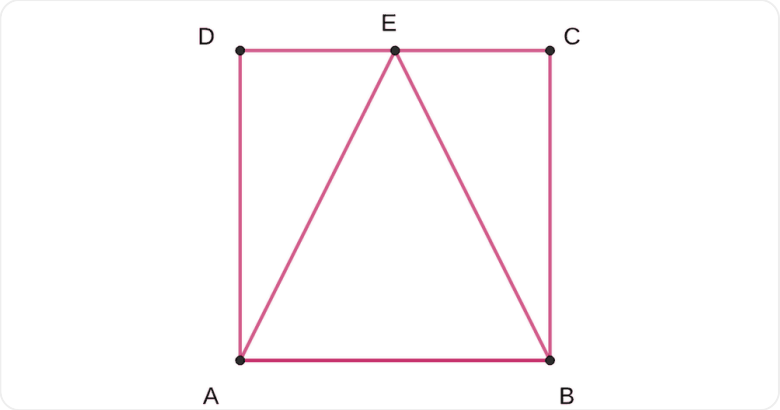


23 במשולש ישר זווית אחד הניצבים קצר ב-2 מהיתר, והניצב השני הוא 6. מצאו את צלעות המשולש.

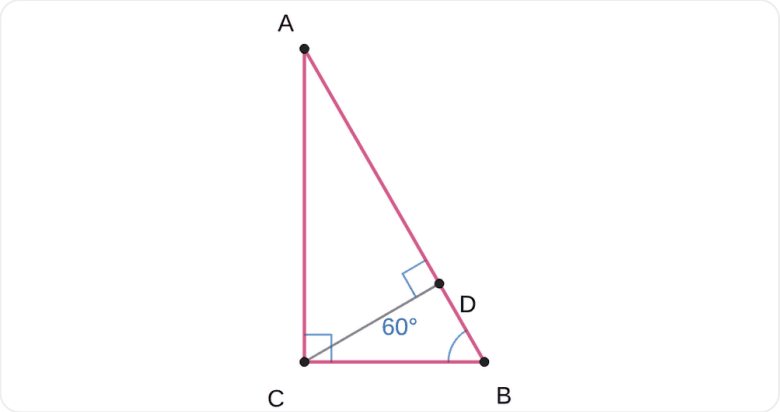
24 במשולש שווה צלעות שצלעו a הביעו את הגובה ואת השטח באמצעות a. חשבו עבור $a=4$.

25 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C=90^\circ$) התיכון ליתר הוא 6.5 וניצב אחד 5. מצאו את הניצב השני.

26 $ABCD$ ריבוע שצלעו 6, ו-E אמצע DC. מצאו את AE ואת היקף $\triangle ABE$.

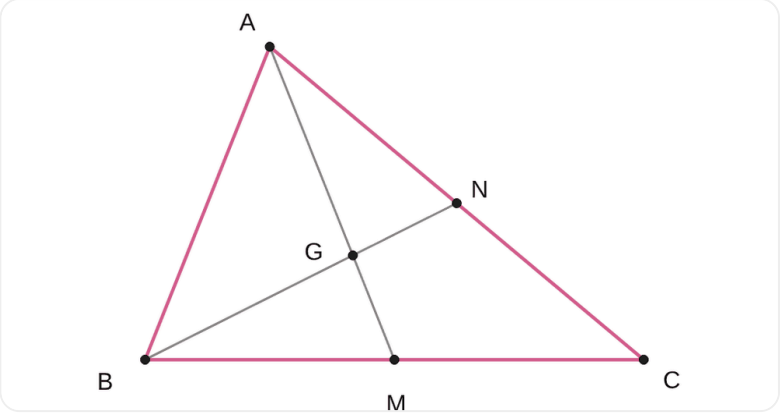


27 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$) הגובה ליתר $CD = 3$. מצאו את BC, AC ואת AB.

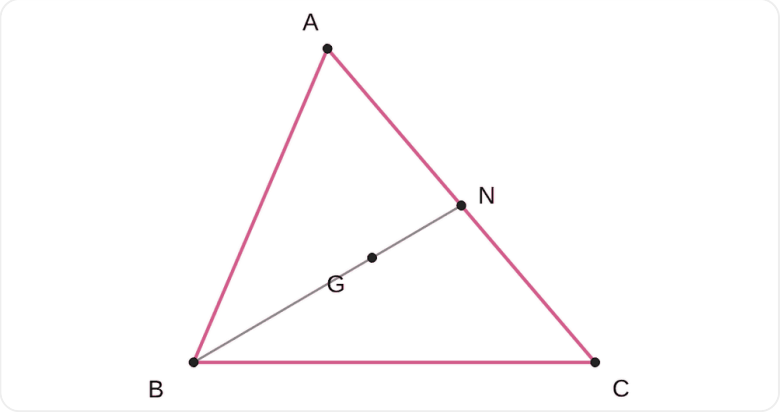


28 ניווט: לכל נתון רשמו באיזה משפט של משולש ישר זווית תשתמשו – (א) ידועים שני ניצבים ומחפשים יתר; (ב) ידועה זווית 30° והיתר; (ג) ידוע תיכון ליתר ומחפשים את היתר.

29 במשולש ABC התיכונים AM ו-BN נחתכים בנקודה G. נתון $AM=12$. מצאו את AG ואת GM.



30 במשולש ABC, G נקודת מפגש התיכונים, ו-$BG=10$. מצאו את אורך התיכון מ-B.

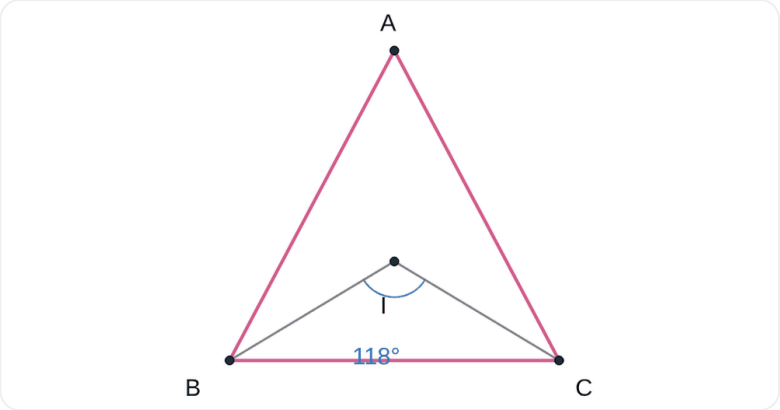


31 במשולש ABC התיכונים $AM=9$ ו-$BN=12$ מאונכים זה לזה ונחתכים ב-G. מצאו את AB.

32 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C=90^\circ$) היתר $AB=18$. G נקודת מפגש התיכונים. מצאו את CG.

33 באיזה משולש נקודת מפגש הגבהים נמצאת על קודקוד? ובאיזה משולש היא מחוץ למשולש?

34 במשולש ABC, I נקודת מפגש חוצי הזוויות. נתון $\sphericalangle BIC = 118°$. מצאו את $\sphericalangle A$.



35 נקודת מפגש חוצי הזוויות במשולש מרוחקת 3 מהצלע BC. מה מרחקה מהצלע AB? מדוע?

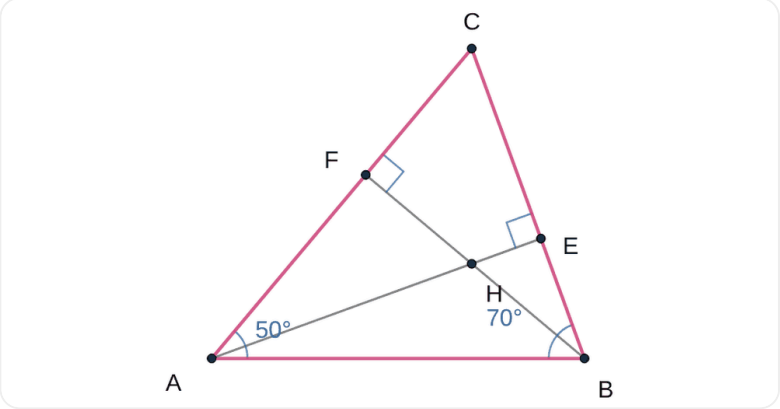
36 נקודת מפגש האנכים האמצעיים במשולש מרוחקת 5 מהקודקוד A. מה מרחקה מהקודקודים B ו-C?

37 במשולש ישר זווית שניצביו 6 ו-8, איפה נמצאת נקודת מפגש האנכים האמצעיים? מה מרחקה מכל קודקוד?

38 במשולש ABC התיכון $AM = 9$, ו-G מפגש התיכונים. מצאו את המרחק של G מ-M ומ-A.

39 הוכיחו ששלושת התיכונים מחלקים משולש לשישה משולשים שווי שטח. אם שטח ABC הוא 36, מה שטח כל אחד?

40 במשולש ABC $\sphericalangle A = 50°$ ו-$\sphericalangle B = 70°$. H נקודת מפגש הגבהים. מצאו את $\sphericalangle AHB$.



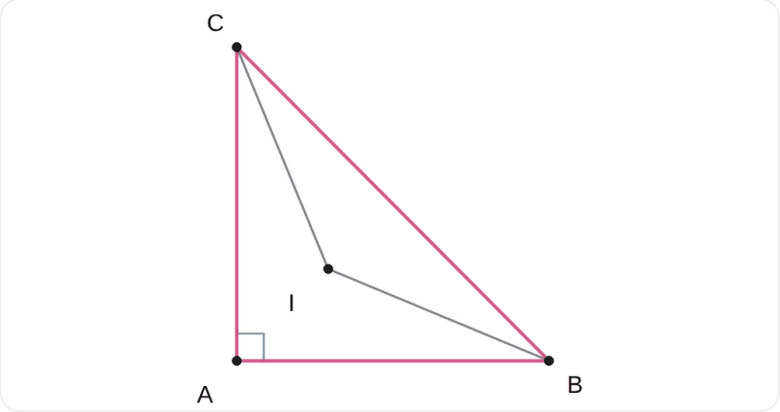
41 במשולש ABC, I מפגש חוצי הזוויות, $\sphericalangle A = 80°$, $\sphericalangle B = 60°$. מצאו את $\sphericalangle AIB$, $\sphericalangle BIC$ ו-$\sphericalangle AIC$.

42 במשולש שווה צלעות שצלעו 6, מצאו את המרחק בין מרכז המשולש (מפגש התיכונים) לבין קודקוד, ובינו לבין צלע.

43 במשולש ABC נתון: $AB = AC$, ו-G מפגש התיכונים. הוכיחו ש-G נמצא על הגובה לבסיס.

44 נקודת מפגש התיכונים G במשולש ABC, $BC = 12$, וגובה המשולש לצלע BC הוא 9. מה המרחק של G מ-BC, ומה שטח $\triangle GBC$?

45 במשולש ABC $\sphericalangle A = 90°$, $AB = AC$, ו-I מפגש חוצי הזוויות. מצאו את $\sphericalangle BIC$.



✔ תשובות סופיות – נושא 6.3

1. $AB = 10$
2. 12 ; שטח 30
3. $3\sqrt{2}$
4. הראשון כן ($49 + 576 = 625$) ; השני לא ($100 \neq 121$)
5. צלע $5\sqrt{2}$; שטח 50
6. רוחב 8 ; היקף 46
7. 12
8. 4.8 מטר
9. $AB = 15$,$CD = 7.2$,$AD = 5.4$
10. $CM = 5$ (התיכון ליתר שווה למחצית היתר)
11. $\sphericalangle MCA = 35°$; $\sphericalangle BMC = 70°$
12. $\triangle AMC$,$\triangle BMC$ שווי שוקיים, ו- $2\alpha + 2\beta = 180°$
13. $BC = 6$,$AC = 6\sqrt{3}$
14. יתר 10 ; ניצב $5\sqrt{3}$
15. $\sphericalangle A = 30°$ (המשפט ההפוך)
16. יתר $6\sqrt{2}$; גובה ליתר $3\sqrt{2}$
17. $AC = 4\sqrt{3}$
18. $AB = 13$,$AC = 20$; לא ($169 + 400 \neq 441$)
19. $AO = 5$; היקף 18
20. 13, 15, 9 ; שוב שלשה פיתגורית
21. $AB = 8$,$CM = 4$; $BC = CM = BM = 4$
22. 15, 20 ; גובה ליתר 12
23. 8, 6, 10

24 גובה $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, שטח $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$; עבור $a=4$: $2\sqrt{3}$ ו-$4\sqrt{3}$

25 12 (היתר 13)

26 $AE=BE=3\sqrt{5}$; היקף $6+6\sqrt{5}$

27 $BC=2\sqrt{3}$, $AC=6$, $AB=4\sqrt{3}$

28 (א) פיתגורס ; (ב) הניצב מול 30° – חצי יתר ; (ג) תיכון ליתר – מחצית היתר

29 $AG=8$, $GM=4$ (נקודת מפגש התיכונים מחלקת ביחס $2:1$)

30 15

31 $AG=6$, $BG=8$ ולכן $AB=10$

32 $CG=6$ (התיכון ליתר 9, ו-$CG=\frac{2}{3}\cdot 9$)

33 במשולש ישר זווית – בקודקוד הזווית הישרה ; במשולש קהה זווית – מחוצה לו

34 $\sphericalangle A=56^\circ$

35 3 – כל נקודה על חוצה זווית שווה מרחק משוקי הזווית

36 5 ו-5 – היא מרכז המעגל החוסם

37 באמצע היתר ; 5

38 $GM=3$, $AG=6$

39 כל תיכון חוצה שטח ; 6

40 $\sphericalangle AHB=120^\circ$ ($180^\circ-\sphericalangle C$)

41 $\sphericalangle AIB=110^\circ$, $\sphericalangle BIC=130^\circ$, $\sphericalangle AIC=120^\circ$

42 $2\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$

43 במשולש שו"ש התיכון לבסיס הוא גם גובה, ו-G עליו

44 3 ; 18

45 135°

6.4 קטעי אמצעים, דמיון ושטחים

קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה. משפטי דמיון: ז.ז, צ.ז.צ, צ.צ.צ. יחס הדמיון k הוא גם יחס ההיקפים והגבהים, ויחס השטחים k^2. משולשים עם גובה משותף – יחס השטחים כיחס הבסיסים.

צפו לפני שמתחילים:

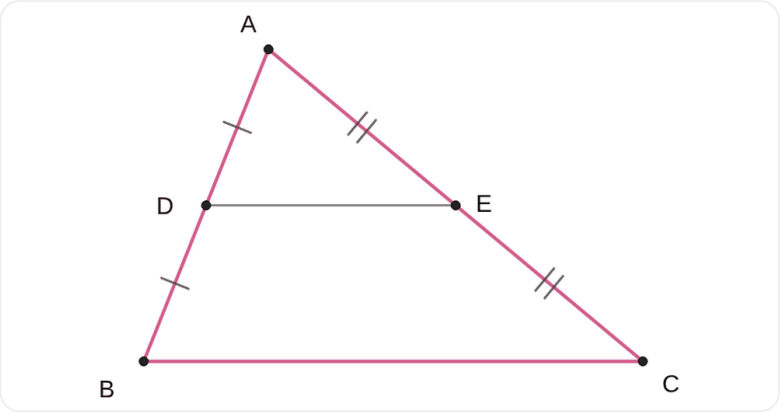
קטע אמצעים במשולש ובטרפז
YouTube · 7:29

משפט דמיון ז.ז
YouTube · 7:52

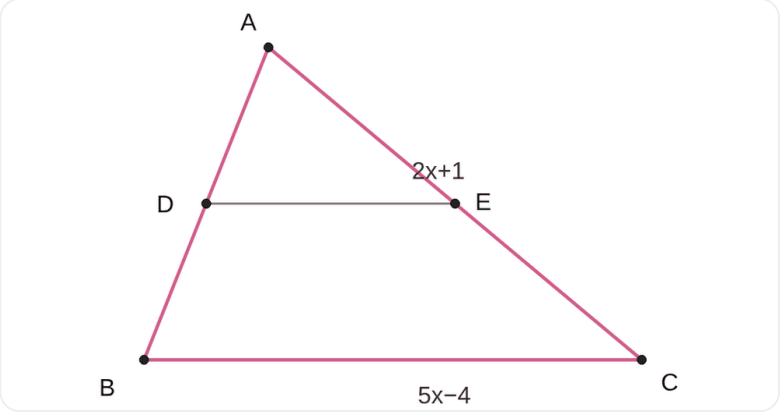
משפט דמיון צ.ז.צ
YouTube · 5:27

כל משפטי השטחים בגיאומטריה
YouTube · 8:56

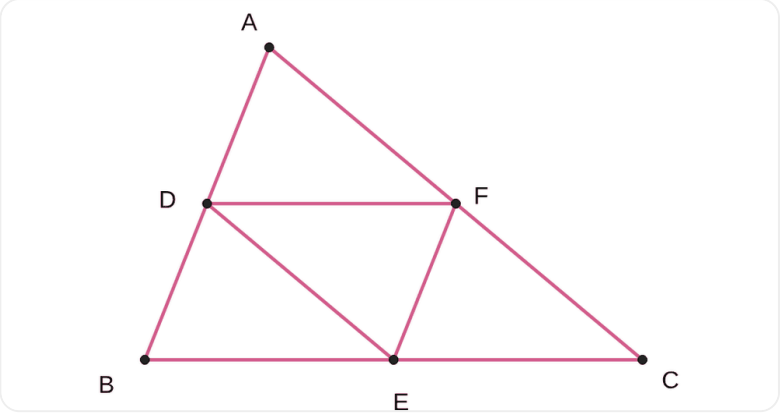
1 במשולש ABC, D ו-E אמצעי הצלעות AB ו-AC. נתון $BC = 14$. מצאו את DE. מה אפשר לומר על הישרים DE ו-BC?



2 במשולש ABC, DE קטע אמצעים המקביל ל-BC, ו-$DE = 2x + 1$, $BC = 5x - 4$. מצאו את x ואת BC.

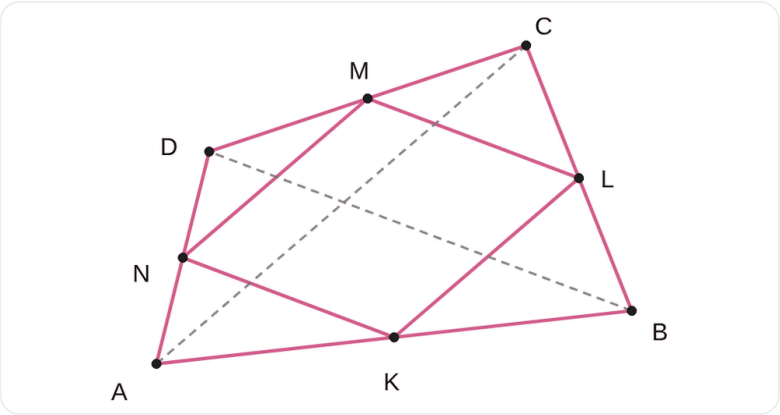


3 D, E, F אמצעי הצלעות של משולש ABC שצלעותיו $AB = 10$, $BC = 12$, $AC = 8$. מצאו את היקף $\triangle DEF$.



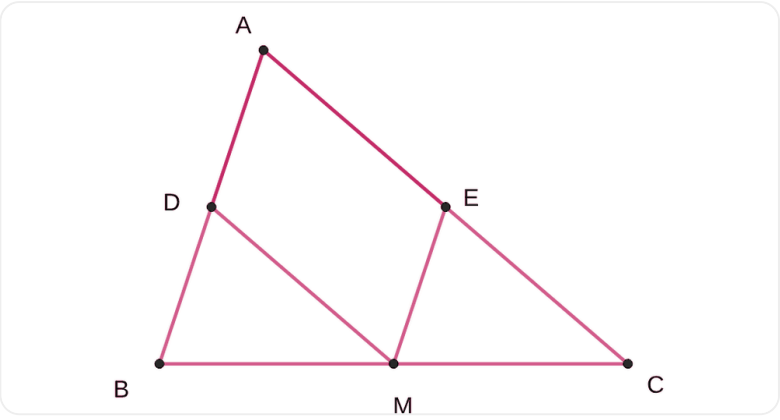
4 במשולש ABC D אמצע AB, ודרך D מעבירים מקביל ל-BC החותך את AC ב-E. הוכיחו ש-E אמצע AC. אם $AC = 11$, מצאו את AE.

5 הוכיחו: אמצעי הצלעות של מרובע כלשהו יוצרים מקבילית. מה היקף המקבילית אם אלכסוני המרובע הם 10 ו-14?



6 במרובע $ABCD$ האלכסונים שווים זה לזה. מה סוג המרובע שנוצר מחיבור אמצעי הצלעות? ואם האלכסונים מאונכים?

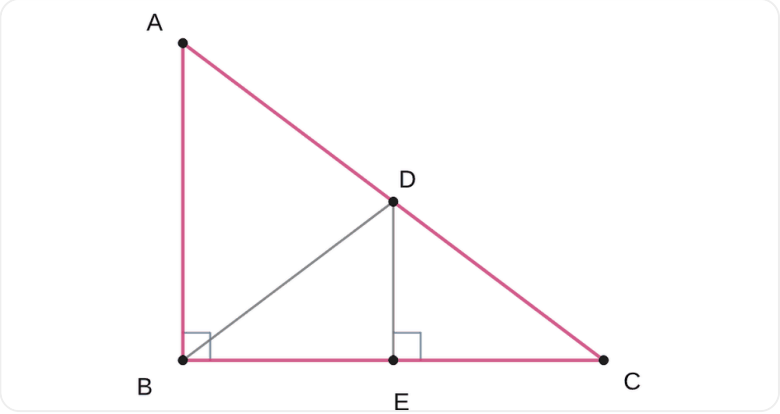
7 במשולש ABC, D ו-E אמצעי AB ו-AC, ו-M אמצע BC. הוכיחו ש-$ADME$ מקבילית. אם $AB=8$ ו-$AC=10$, מצאו את היקפה.



8 בטרפז קטע האמצעים הוא 9 והבסיס הקטן 5. מצאו את הבסיס הגדול.

9 במשולש ABC, DE קטע אמצעים (D על AB, E על AC). מה היחס בין שטח $\triangle ADE$ לשטח $\triangle ABC$? ומה היחס בין שטח הטרפז $DBCE$ לשטח $\triangle ABC$?

10 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B = 90°$): $AB = 6$, $BC = 8$. D אמצע AC ו-E אמצע BC. מצאו את DE ואת BD.



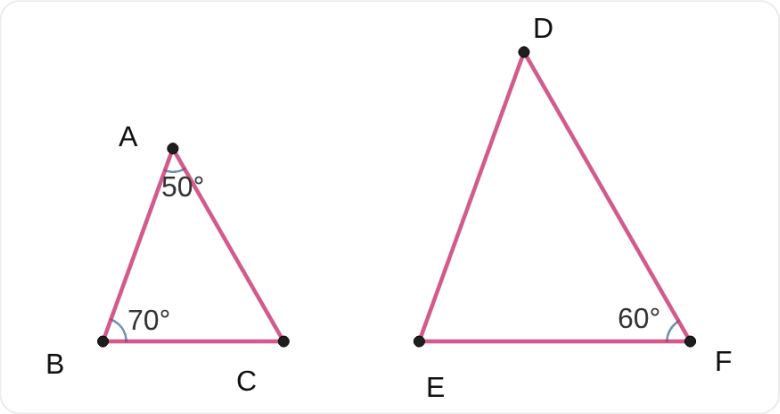
11 במשולש ABC: D אמצע AB, E אמצע AC, ו-$DE = BD$. מה אפשר לומר על המשולש ABC?

12 במשולש ABC DE קטע אמצעים, ו-F אמצע DE. הישר AF חותך את BC ב-M. הוכיחו ש-M אמצע BC.

13 שני משולשים דומים ביחס $5:3$. היקף הקטן 24. מצאו את היקף הגדול.

14 שני משולשים דומים, יחס השטחים $16:9$. מהו יחס הדמיון? אם צלע במשולש הקטן היא 6, מהי הצלע המתאימה בגדול?

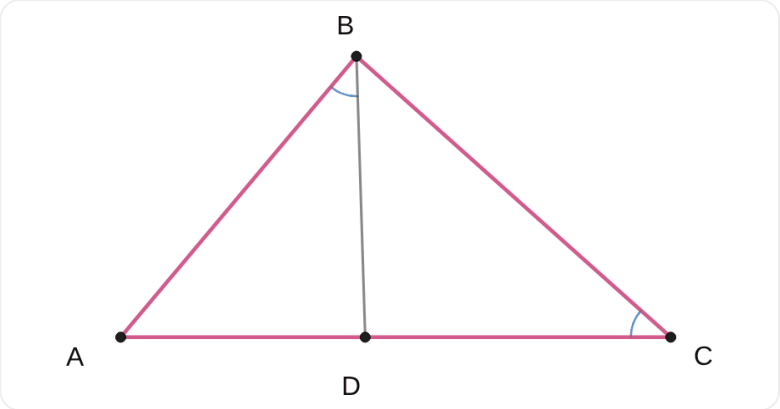
15 במשולשים ABC ו-DEF: $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 50°$, $\sphericalangle B = 70°$, $\sphericalangle F = 60°$. האם המשולשים דומים? לפי איזה משפט?



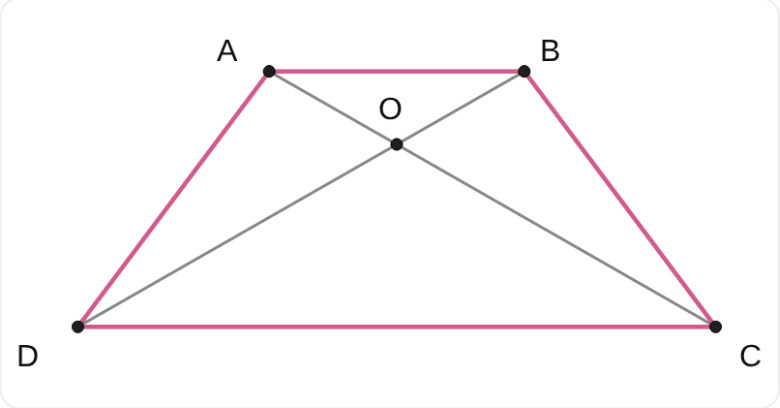
16 צלעות משולש אחד: 4, 6, 8, וצלעות משולש שני: 6, 9, 12. האם הם דומים? מה יחס הדמיון?

17 במשולשים ABC ו-DEF: $AB=6$, $AC=8$, $\sphericalangle A=40^\circ$, $DE=9$, $DF=12$, $\sphericalangle D=40^\circ$. האם הם דומים? לפי איזה משפט? אם $BC=5$, מצאו את EF.

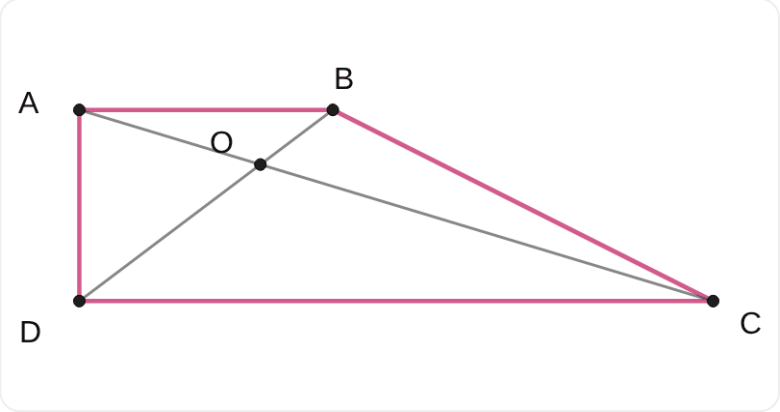
18 במשולש ABC הנקודה D על AC כך ש-$\sphericalangle ABD=\sphericalangle C$. הוכיחו ש-$\triangle ABD\sim\triangle ACB$. אם $AD=4$ ו-$AC=9$, מצאו את AB.



19 בטרפז $ABCD$ ($AB\parallel DC$) האלכסונים נחתכים בנקודה O. נתון $AB=4$, $DC=10$, $AO=3$. מצאו את OC.



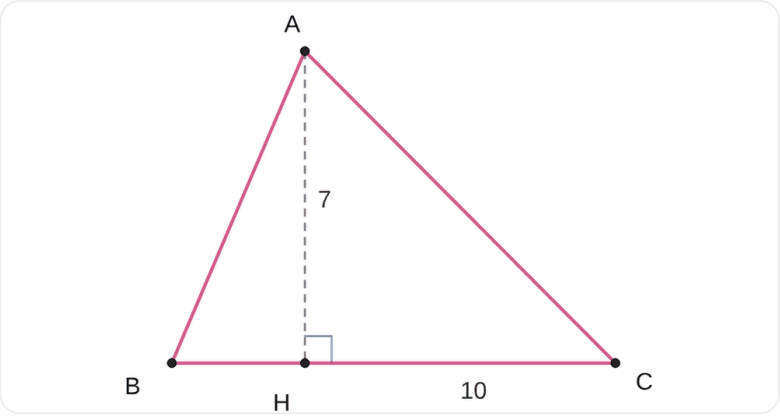
20 בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$, $AB = 4$, $DC = 10$) האלכסונים נחתכים ב-O.
שטח $\triangle AOB$ הוא 8. מצאו את שטח $\triangle COD$ ואת שטח $\triangle AOD$.



21 עמוד שגובהו 2 מטר מטיל צל באורך 3 מטר. באותו רגע עץ מטיל צל באורך 12 מטר.
מה גובה העץ?

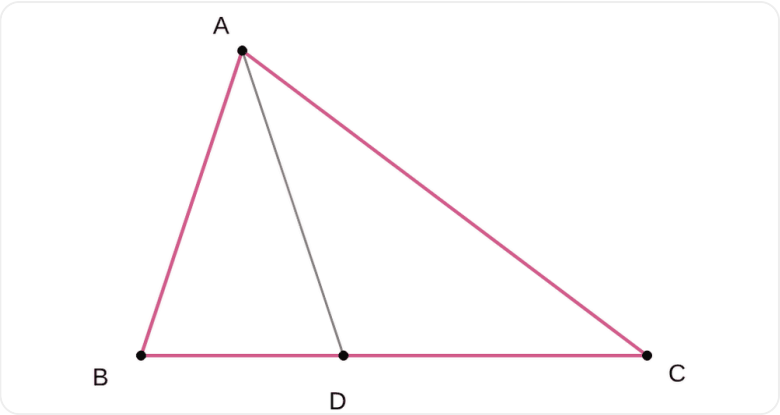
22 יחס הדמיון בין שני משולשים הוא k. מה היחס בין הגבהים המתאימים? בין התיכונים?
בין השטחים?

23 שטח משולש שבסיסו 10 וגובהו לבסיס 7?



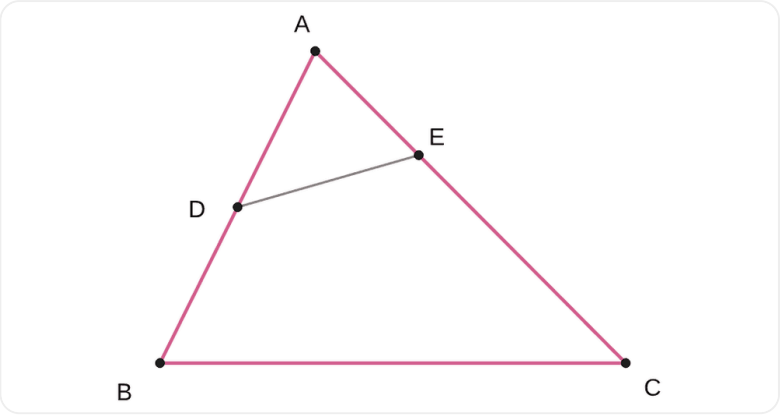
24 שני משולשים בעלי אותו גובה; הבסיסים 6 ו-9. מה יחס השטחים?

25 במשולש ABC הנקודה D על BC כך ש-$BD=4$, $DC=6$. שטח $\triangle ABD=12$. מצאו את שטח $\triangle ADC$ ואת שטח $\triangle ABC$.

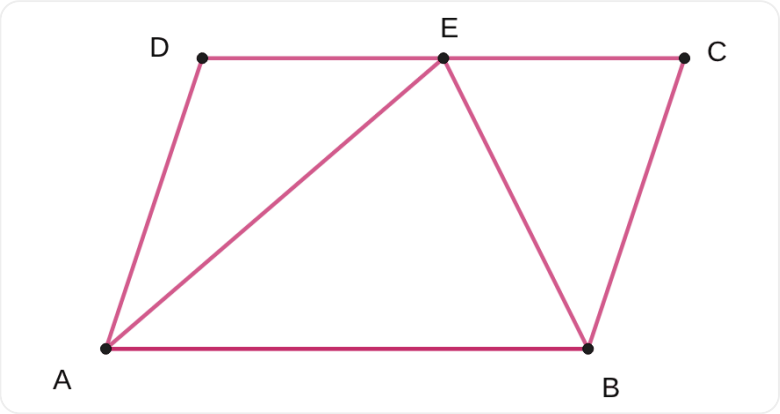


26 תיכון במשולש מחלק אותו לשני משולשים. מה היחס בין שטחיהם? הסבירו.

27 במשולש ABC, D אמצע AB ו-E על AC כך ש-$AE=\frac{1}{3}AC$. מה היחס בין שטח $\triangle ADE$ לשטח $\triangle ABC$?



28 במקבילית $ABCD$ שטחה 60, E נקודה כלשהי על DC. מצאו את שטח $\triangle ABE$.



29 משולש שצלעותיו 6, 8, 10. מצאו את שטחו ואת הגובה לצלע הארוכה.

30 משולש שצלעותיו 5, 5, 8. מצאו את שטחו ואת שלושת גבהיו.

31 במשולש ABC, $AB=12$, $AC=18$, ו-D על AC כך ש-$AD=8$. הוכיחו ש-$\triangle ABD\sim\triangle ACB$ ומצאו את היחס $CB:BD$.

32 שני משולשים שווי צלעות; צלע האחד 4 וצלע השני 6. מה יחס השטחים?

33 במשולש ABC, AM תיכון ו-G מפגש התיכונים. מה החלק של שטח $\triangle GBC$ משטח $\triangle ABC$?

34 במשולש ABC, $DE\parallel BC$ ושטח $\triangle ADE$ שווה לשטח הטרפז $DBCE$. מצאו את היחס $AB:AD$.

35 במשולש ABC הנקודות D על AB ו-E על AC כך ש-$\sphericalangle ADE=\sphericalangle C$ (מקבילות אנטי). אם $AD=3$, $AE=4$, $AB=8$, מצאו את AC.

36 משולש ABC דומה למשולש $A'B'C'$ ביחס $2:3$, ושטח $A'B'C'$ גדול ב-20 משטח ABC. מצאו את שני השטחים.

✔ תשובות סופיות – נושא 6.4

1	$DE \parallel BC$; $DE = 7$
2	$BC = 26$; $x = 6$
3	15 (חצי מהיקף ABC)
4	משפט: ישר דרך אמצע צלע המקביל לצלע שנייה חוצה את השלישית ; $AE = 5.5$
5	כל צלע מקבילה לאלכסון ושווה למחציתו ; היקף 24
6	שווים – מעוין ; מאונכים – מלבן
7	שני זוגות צלעות מקבילות (קטעי אמצעים) ; היקף 18
8	13
9	$1:4$; $3:4$
10	$DE = 3$,$BD = 5$
11	$BC = 2DE = 2BD = AB$ – שווה שוקיים ($AB = BC$)
12	AF הוא תיכון של $\triangle ADE$, ובהומותטיה מ-A פי 2 – תיכון של ABC
13	40
14	$3:4$; 8
15	כן – ז.ז ($\sphericalangle E = 70^\circ$)
16	כן – צ.צ.צ ; $2:3$
17	כן – צ.ז.צ ; $EF = 7.5$
18	$AB^2 = AD \cdot AC = 36$; $AB = 6$
19	$OC = 7.5$ ($\triangle AOB \sim \triangle COD$)
20	$S_{COD} = 50$; $S_{AOD} = 20$
21	8 מטר
22	k ; k ; k^2
23	35

24	$2:3$
25	18 ; 30 (אותו גובה מ-A)
26	$1:1$ – בסיסים שווים וגובה משותף
27	$\frac{1}{6}$ (מכפלת היחסים $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$)
28	30
29	24 ; 4.8
30	שטח 12 ; לבסיס 3, לשוקיים 4.8
31	$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{2}{3}$ (צ.ז.צ) ; $2:3$
32	$4:9$
33	$\frac{1}{3}$
34	$1:\sqrt{2}$
35	$AC=6$ ($\triangle ADE\sim\triangle ACB$:$AD\cdot AB=AE\cdot AC$)
36	16 ו-36

פרק 6 סיכומון סוף פרק – גיאומטריה – משולשים

זוויות

- זוויות צמודות – סכומן $180°$; זוויות קודקודיות – שוות.
- ישרים מקבילים: מתאימות ומתחלפות שוות, חד-צדדיות – סכומן $180°$.
- סכום זוויות משולש $180°$; זווית חיצונית שווה לסכום שתי הפנימיות שאינן צמודות לה.

חפיפת משולשים

- צ.ז.צ, ז.צ.ז, צ.צ.צ, צ.צ.ז (הזווית מול הצלע הגדולה מבין השתיים).
- אחרי חפיפה – כל הצלעות והזוויות המתאימות שוות.

משולש שווה שוקיים

- זוויות הבסיס שוות (ולהפך).
- התיכון לבסיס הוא גם גובה וגם חוצה זווית הראש.

משולש ישר זווית

- פיתגורס: $a^2+b^2=c^2$ (וגם המשפט ההפוך).
- התיכון ליתר שווה למחצית היתר.
- מול זווית $30°$ – ניצב השווה למחצית היתר.

נקודות מפגש

- התיכונים נפגשים בנקודה המחלקת כל תיכון ביחס $2:1$ מהקודקוד.
- גם שלושת הגבהים וגם שלושת חוצי הזוויות נפגשים בנקודה אחת.

קטעי אמצעים, דמיון ושטחים

- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
- משפטי דמיון: ז.ז, צ.ז.צ, צ.צ.צ; יחס השטחים הוא ריבוע יחס הדמיון.
- שטח משולש $=\frac{a\cdot h_a}{2}$; גובה משותף – יחס השטחים כיחס הבסיסים.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- צ.צ.ז כשהזווית מול הצלע הקטנה – זה אינו משפט חפיפה.
- פיתגורס במשולש שאינו ישר זווית.
- יחס שטחים במשולשים דומים – לשכוח להעלות בריבוע.
- בהוכחה – טענה בלי נימוק.

💡 **הטיפ של אילון:** סמנו על השרטוט כל נתון וכל מה שגיליתם – זוויות שוות בקשת, צלעות שוות בקווקווים. ככה רואים את החפיפה או הדמיון לפני שכותבים מילה.

פרק 7

גיאומטריה – מרובעים

מקבילית, מלבן, מעוין, ריבוע, טרפז ודלתון – תכונות, הוכחות וחישובים

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

7.1 מקבילית, מלבן, מעוין וריבוע — 32 תרגילים

7.2 טרפז ודלתון — 31 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



מעוין – כל התכונות + 5 תרגילים

YouTube · 12:17



תרגול ריבוע – אלכסונים, 45° ושטח

YouTube · 9:41



טרפז – סיכום מלא למבחן

YouTube · 9:57



דלתון בגיאומטריה – הסבר ותרגול

YouTube · 13:10

7.1 מקבילית, מלבן, מעוין וריבוע

מקבילית: צלעות נגדיות מקבילות ושוות, זוויות נגדיות שוות, האלכסונים חוצים זה את זה.
מלבן – גם אלכסונים שווים; מעוין – גם אלכסונים מאונכים וחוצי זוויות; ריבוע – כל התכונות יחד.

צפו לפני שמתחילים:

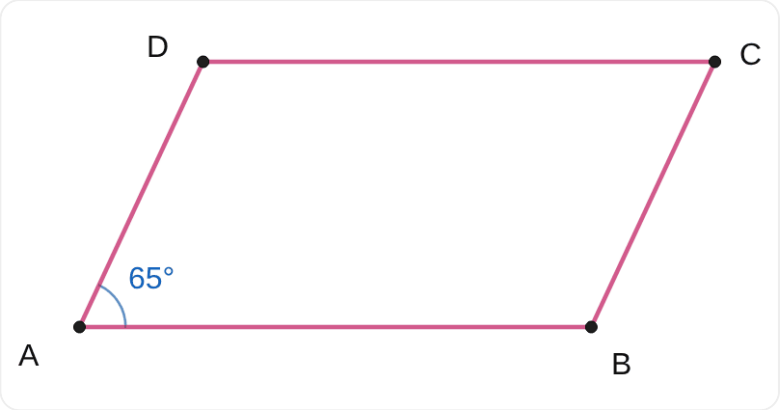
שטח מקבילית
YouTube · 1:51

מעוין – כל התכונות + 5 תרגילים
YouTube · 12:17

תרגול ריבוע – אלכסונים, 45° ושטח
YouTube · 9:41

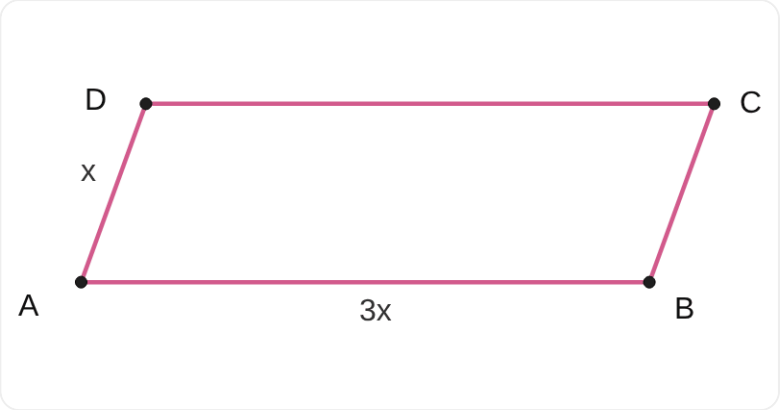
חישובי שטחים – משולש, ריבוע, מלבן, מקבילית, מעוין וטרפז
YouTube · 7:50

1 במקבילית $ABCD$ נתון $\sphericalangle A = 65°$. מצאו את שאר זוויות המקבילית.

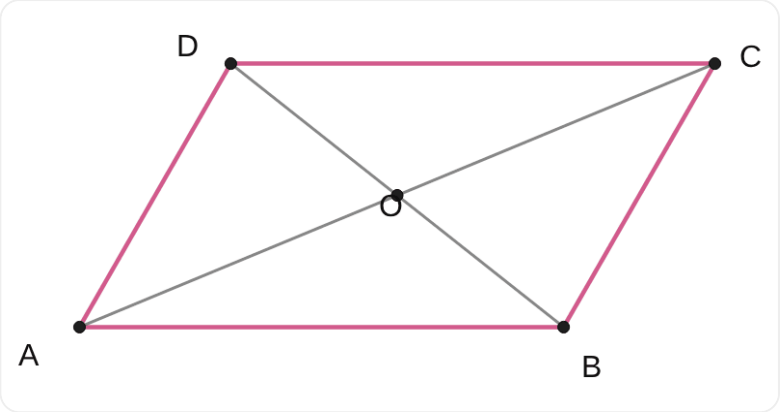


2 במקבילית שתי זוויות סמוכות מתייחסות כמו $7 : 2$. מצאו את זוויות המקבילית.

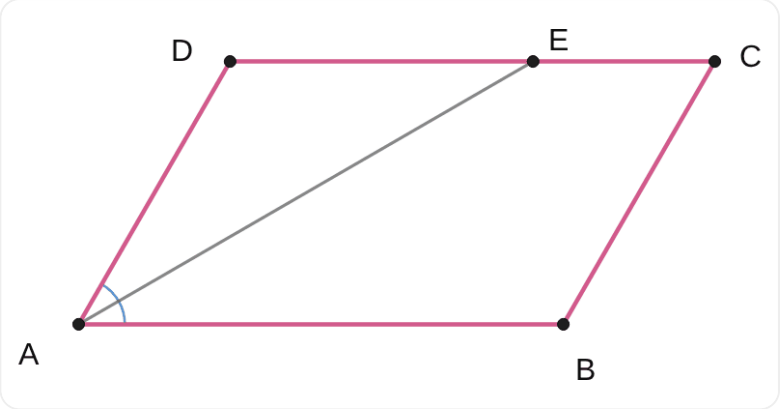
3 היקף מקבילית 40, וצלע אחת ארוכה פי 3 מהשנייה. מצאו את הצלעות.



4 במקבילית $ABCD$ האלכסונים נחתכים ב-O. נתון $AC=14$, $BD=10$, $AB=8$. מצאו את היקף $\triangle AOB$.



5 במקבילית $ABCD$ ($AB=8$, $AD=5$) חוצה הזווית $\sphericalangle A$ חותך את DC בנקודה E. מצאו את DE ואת EC.

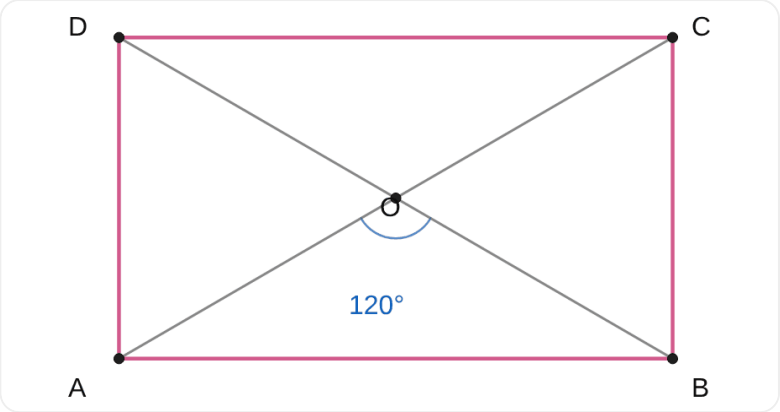


6 חוצי שתי זוויות סמוכות במקבילית נחתכים. מה הזווית ביניהם? הוכיחו.

7 במרובע $ABCD$ האלכסונים חוצים זה את זה. הוכיחו ש-$ABCD$ מקבילית, ורשמו עוד שלוש דרכים להוכיח שמרובע הוא מקבילית.

8 במרובע $ABCD$: $AB \parallel DC$ ו-$AB = DC = 7$. האם $ABCD$ מקבילית? אם $AD = 4$, מה היקפו?

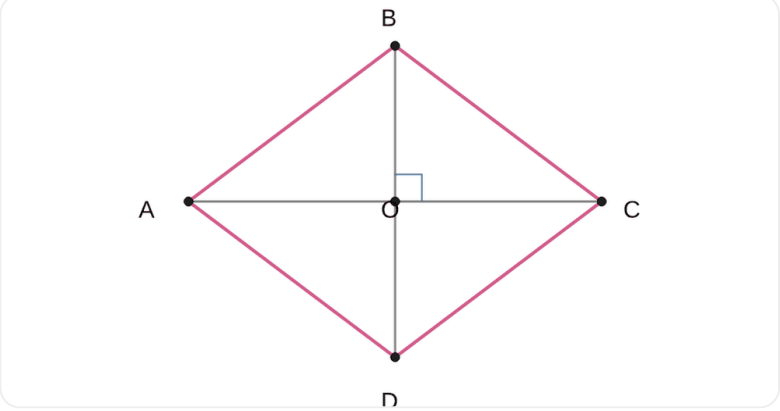
9 במלבן $ABCD$ האלכסונים נחתכים ב-O, ו-$\sphericalangle AOB = 120°$. אם $AC = 12$, מצאו את BC ואת AB.



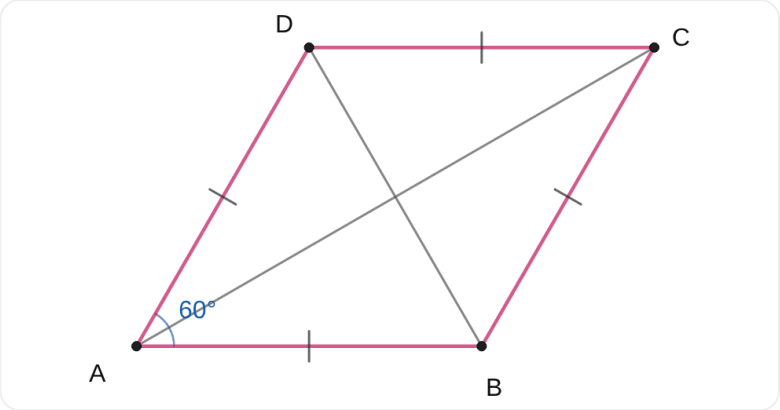
10 במלבן אחד הצלעות 5 והאלכסון 13. מצאו את השטח ואת ההיקף.

11 מקבילית שבה האלכסונים שווים – איזה מרובע היא? הוכיחו בעזרת חפיפה.

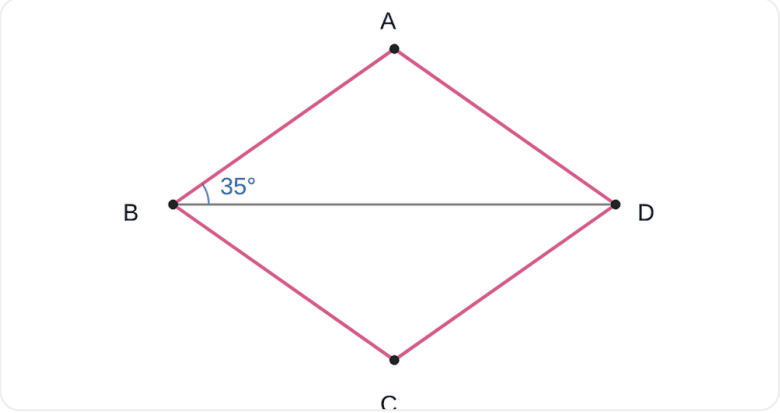
12 במעוין $ABCD$ האלכסונים $AC = 8$ ו-$BD = 6$. מצאו את צלע המעוין, את היקפו ואת שטחו.



13 במעוין זווית אחת $60°$ וצלעו 6. מצאו את אורכי האלכסונים ואת השטח.



14 במעוין $ABCD$, $\sphericalangle ABD = 35°$. מצאו את זוויות המעוין.



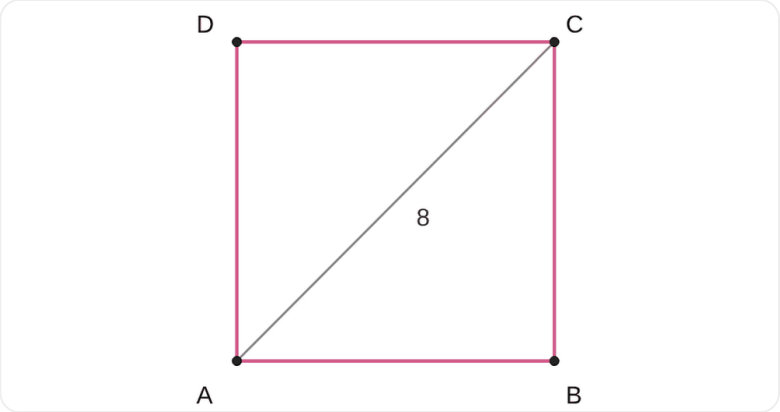
15 שטח מעוין 96 ואחד מאלכסוניו 16. מצאו את האלכסון השני ואת צלע המעוין.

16 מקבילית שבה אלכסון אחד חוצה זווית – מה סוג המרובע?

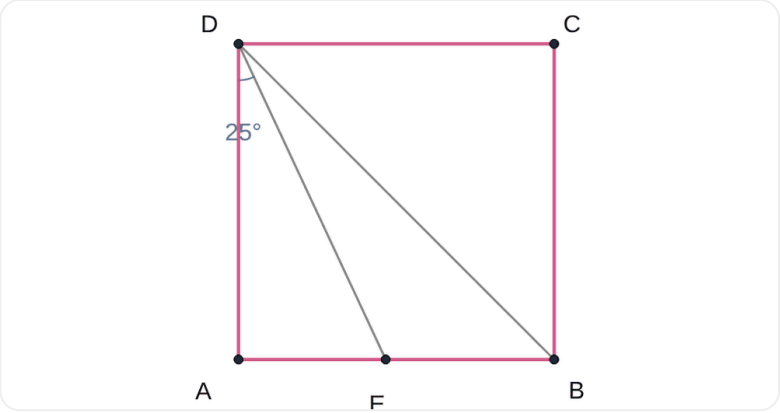
17 שטח מעוין שצלעו 10 הוא 80. מצאו את גובה המעוין.

18 הוכיחו: במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה. באיזו חפיפה משתמשים?

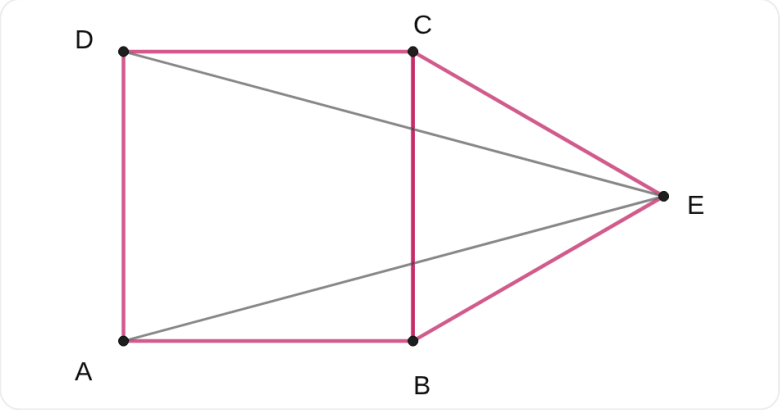
19 ריבוע שאלכסונו 8. מצאו את שטחו ואת צלעו.



20 $ABCD$ ריבוע, ו-E נקודה על AB כך ש-$\sphericalangle ADE = 25°$. מצאו את $\sphericalangle DEB$ ואת $\sphericalangle BDE$.

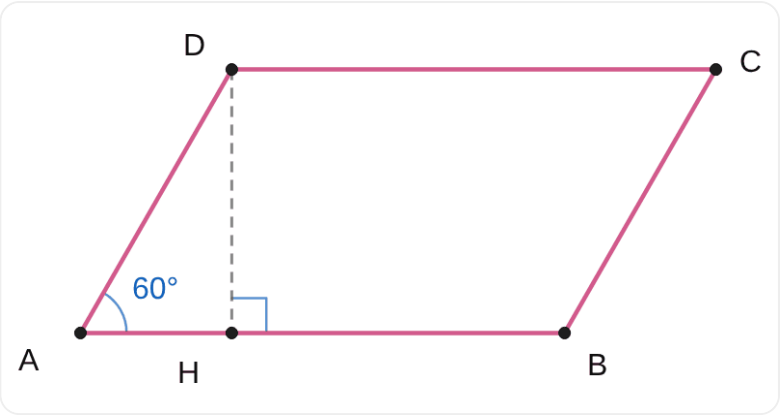


21 על הצלע BC של ריבוע $ABCD$ בונים כלפי חוץ משולש שווה צלעות BCE. מצאו את $\sphericalangle BAE$ ואת $\sphericalangle AED$.



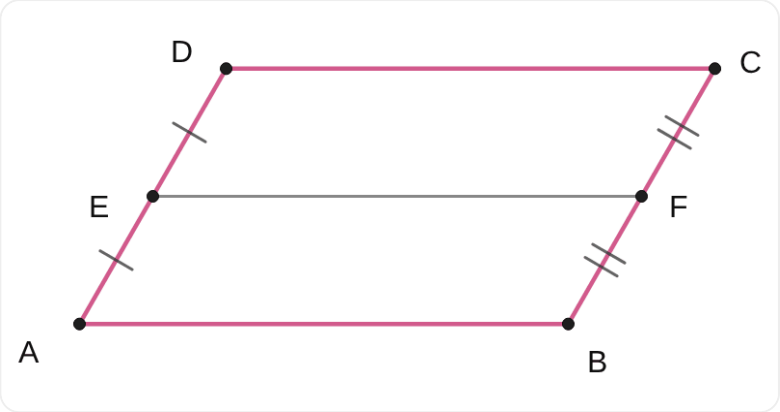
22 מלבן שבו האלכסונים מאונכים – איזה מרובע הוא? ומעוין שבו האלכסונים שווים?

23 במקבילית $ABCD$: $AB=8$, $AD=5$, $\sphericalangle A=60^\circ$. מצאו את גובה המקבילית לצלע AB ואת שטחה.

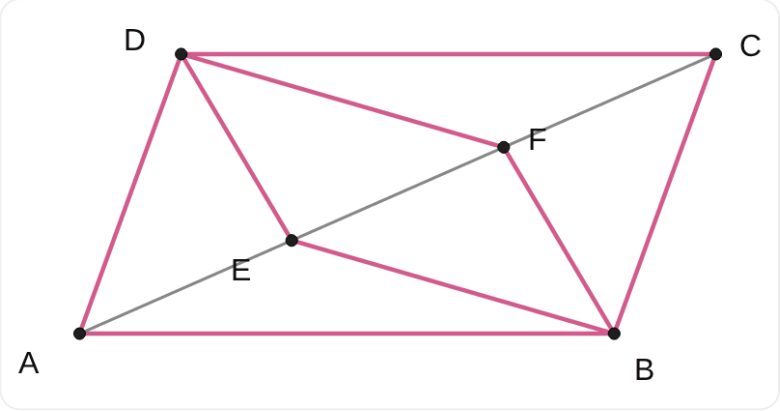


24 במקבילית שטחה 48 הצלעות 8 ו-12. מצאו את שני גבהי המקבילית.

25 במקבילית $ABCD$, E אמצע AD ו-F אמצע BC. הוכיחו ש-$ABFE$ מקבילית.



26 במקבילית $ABCD$ הנקודות E, F על האלכסון AC כך ש-$AE=CF$. הוכיחו ש-$BEDF$ מקבילית.

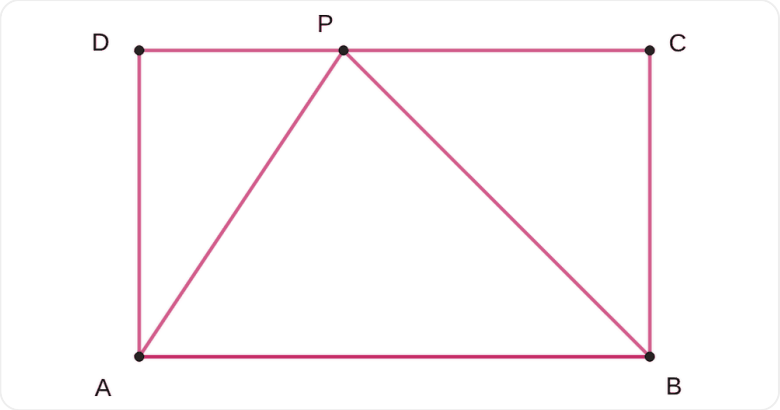


27 במלבן $ABCD$ הנקודה M אמצע AB. הוכיחו ש-$MD = MC$.

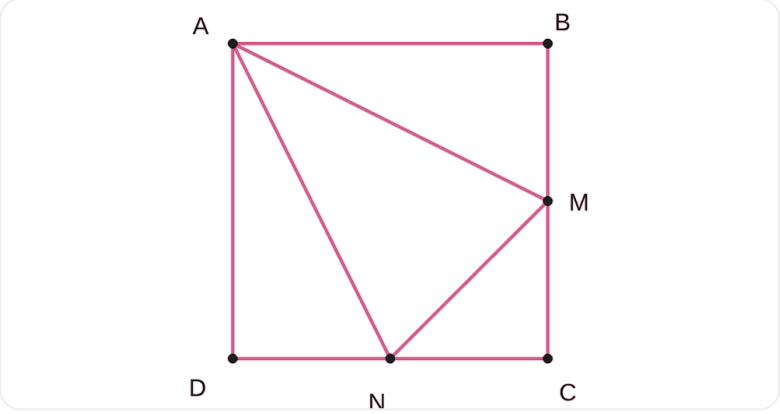
28 במקבילית $ABCD$ הזווית $\sphericalangle A$ גדולה ב-$40°$ מ-$\sphericalangle B$. מצאו את כל הזוויות.

29 במעוין $ABCD$ ($\sphericalangle A = 120°$) האלכסון הקצר הוא 7. מצאו את היקף המעוין.

30 מלבן $ABCD$ ($AB = 10$, $BC = 6$) ו-P על DC. מהו שטח $\triangle ABP$? האם הוא תלוי במיקום P?



31 בריבוע $ABCD$ שצלעו 4, M אמצע BC ו-N אמצע CD. מצאו את שטח $\triangle AMN$.



32 סדרו מהכללי לפרטי: ריבוע, מרובע, מקבילית, מעוין. איזו תכונה מוסיפים בכל שלב?

✔ תשובות סופיות – נושא 7.1

1. $\sphericalangle B=\sphericalangle D=115^\circ$,$\sphericalangle C=65^\circ$
2. 40° ו- 140°
3. 5 ו- 15
4. $7+5+8=20$
5. $DE=5$ (משולש ADE שווה שוקיים), $EC=3$
6. 90° – חצי מסכום זוויות חד-צדדיות
7. שני זוגות צלעות מקבילות ; שני זוגות צלעות שוות ; זוג צלעות מקבילות ושוות ; זוויות נגדיות שוות
8. כן ; 22
9. $BC=6$,$AB=6\sqrt{3}$
10. שטח 60 ; היקף 34
11. מלבן: $\triangle ABD\cong\triangle BAC$ (צ.צ.צ) ולכן $\sphericalangle A=\sphericalangle B=90^\circ$
12. צלע 5 ; היקף 20 ; שטח 24
13. 6 ו- $6\sqrt{3}$; שטח $18\sqrt{3}$
14. $\sphericalangle B=\sphericalangle D=70^\circ$,$\sphericalangle A=\sphericalangle C=110^\circ$
15. 12 ; צלע 10
16. מעוין
17. 8
18. $\triangle AOB\cong\triangle COB$ (צ.צ.צ) – הזוויות ב- O צמודות ושוות
19. שטח 32 ; צלע $4\sqrt{2}$
20. $\sphericalangle DEB=115^\circ$,$\sphericalangle BDE=20^\circ$
21. $\sphericalangle BAE=15^\circ$,$\sphericalangle AED=30^\circ$
22. ריבוע ; ריבוע

23 גובה $\frac{5\sqrt{3}}{2}$; שטח $20\sqrt{3}$

24 6 (לצלע 8) ו-4 (לצלע 12)

25 $AE \parallel BF$ ו-$AE = BF$

26 האלכסונים EF ו-BD חוצים זה את זה ב-O

27 $\triangle AMD \cong \triangle BMC$ (צ.ז.צ)

28 $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 110^\circ$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 70^\circ$

29 28 (האלכסון הקצר יוצר משולשים שווי צלעות)

30 30 – לא תלוי (בסיס 10, גובה 6)

31 6

32 מרובע ← מקבילית (שני זוגות מקבילות) ← מעוין (צלעות סמוכות שוות) ← ריבוע (זווית ישרה)

7.2 טרפז ודלתון

בטרפז: קטע האמצעים מקביל לבסיסים ושווה לחצי סכומם. בטרפז שווה שוקיים – זוויות הבסיס שוות והאלכסונים שווים. בדלתון – האלכסון הראשי חוצה זוויות, מאונך לאלכסון המשני וחוצה אותו.

צפו לפני שמתחילים:

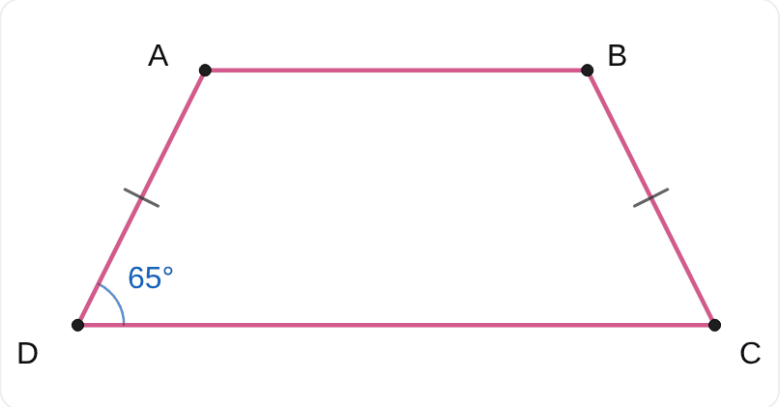
טרפז – סיכום מלא למבחן
YouTube · 9:57

קטע אמצעים במשולש ובטרפז
YouTube · 7:29

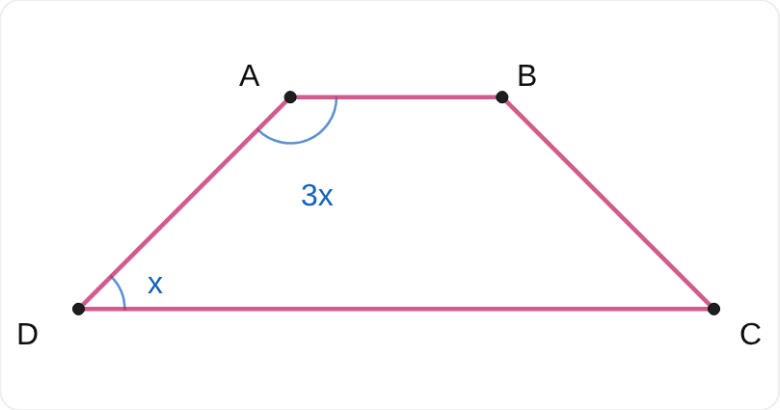
חישוב שטח טרפז והוכחה
YouTube · 3:25

דלתון – הסבר מלא וכל התכונות
YouTube · 7:33

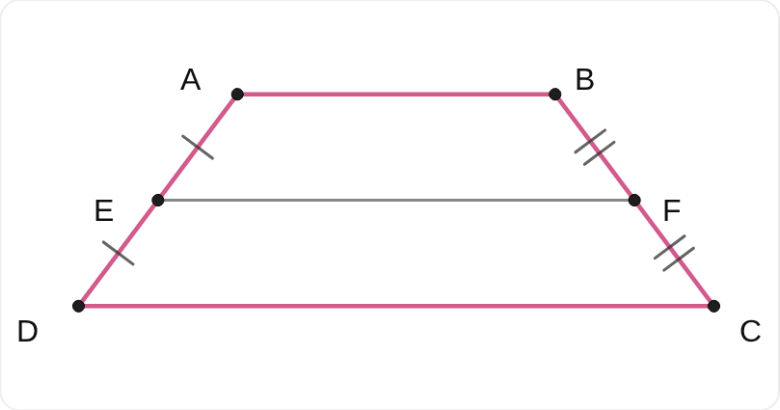
1 בטרפז שווה שוקיים $ABCD$ ($AB \parallel DC$) נתון $\sphericalangle D = 65^\circ$. מצאו את שאר זוויות הטרפז.



2 בטרפז $ABCD$ $(AB \parallel DC)$ $\sphericalangle A = 3\sphericalangle D$. מצאו את $\sphericalangle A$ ואת $\sphericalangle D$.

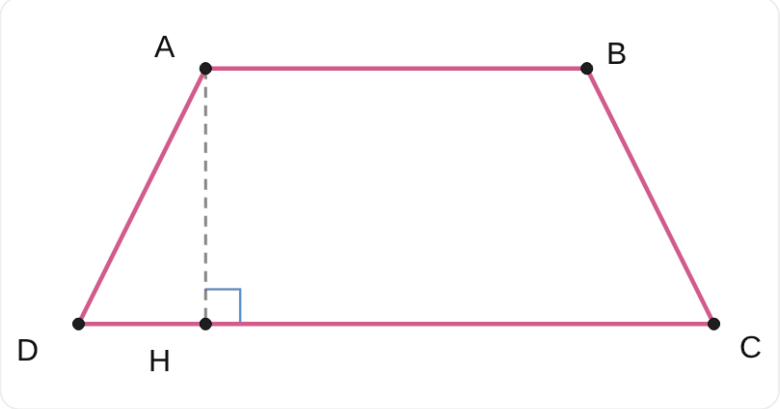


3 בטרפז $ABCD$ הבסיסים $AB = 6$ ו-$DC = 12$. קטע האמצעים EF. מצאו את EF.

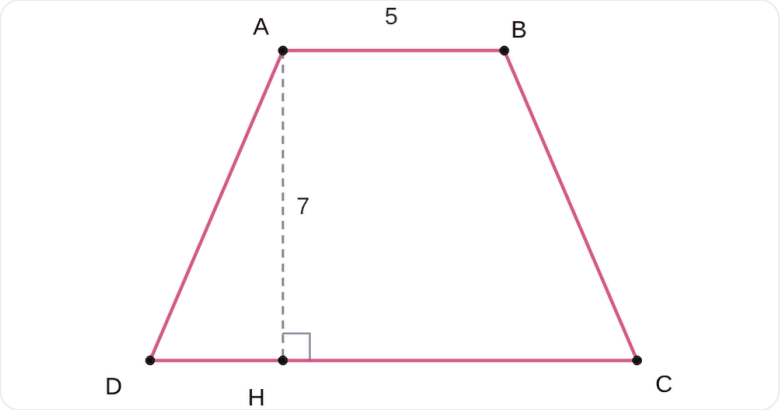


4 בטרפז קטע האמצעים 11 והבסיס הגדול גדול פי 1.75 מהקטן. מצאו את הבסיסים.

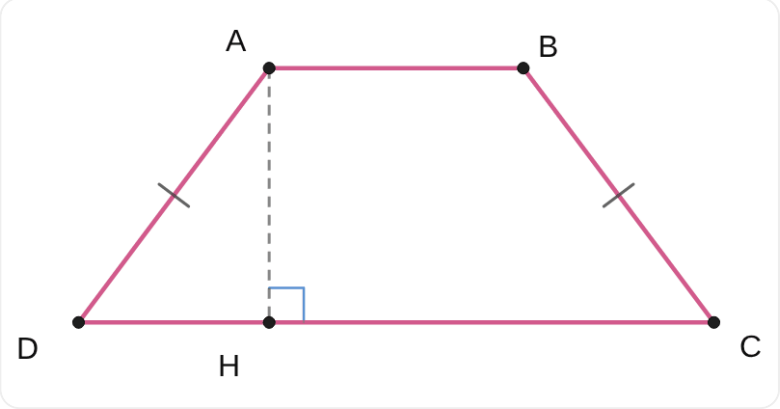
5 בטרפז שווה שוקיים הבסיסים 6 ו-10 והגובה 4. מצאו את אורך השוק ואת היקף הטרפז.



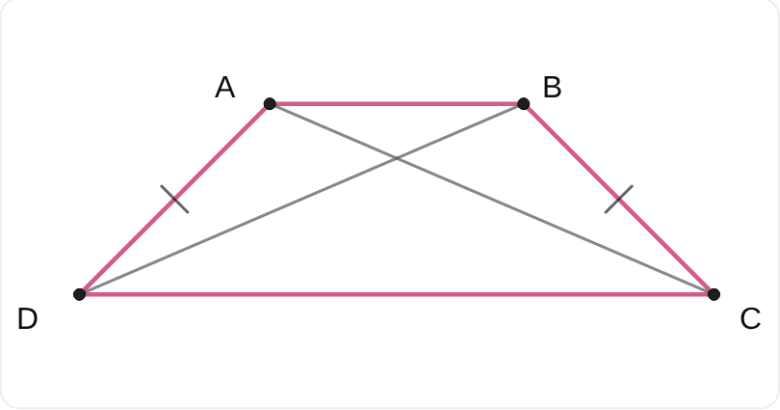
6 שטח טרפז 56, הגובה 7 ובסיס אחד 5. מצאו את הבסיס השני.



7 בטרפז שווה שוקיים הבסיסים 8 ו-20, השוק 10. מצאו את הגובה ואת השטח.

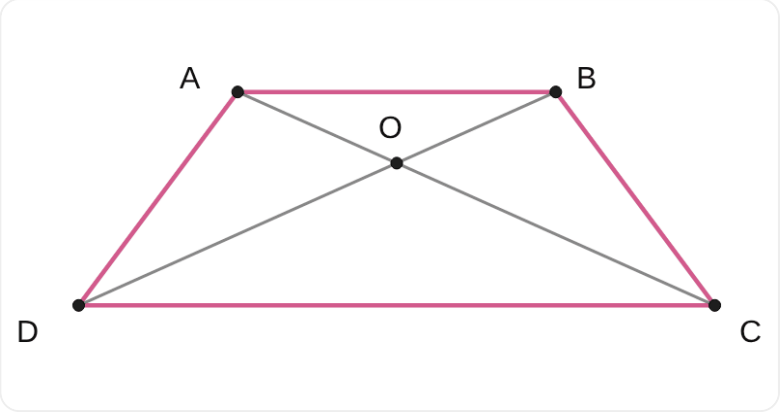


8 בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים. הוכיחו בעזרת חפיפה. אם אלכסון אחד 9 – מה השני?

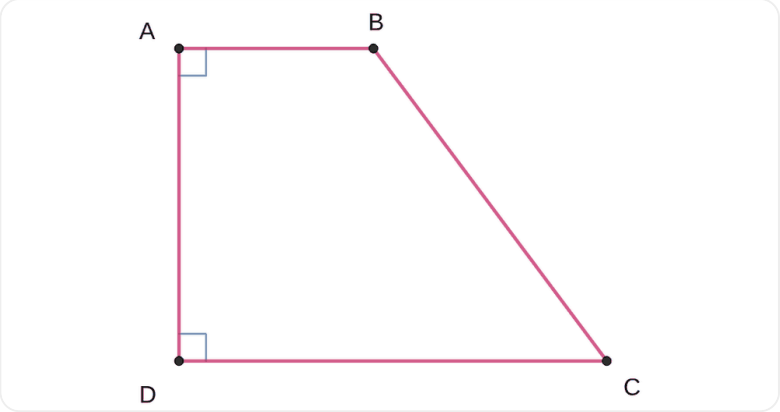


9 בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$) האלכסון AC חוצה את $\sphericalangle C$. הוכיחו ש-$AB = BC$. אם $AB = 7$ ו-$DC = 12$, $AD = 5$ – מצאו את היקף הטרפז.

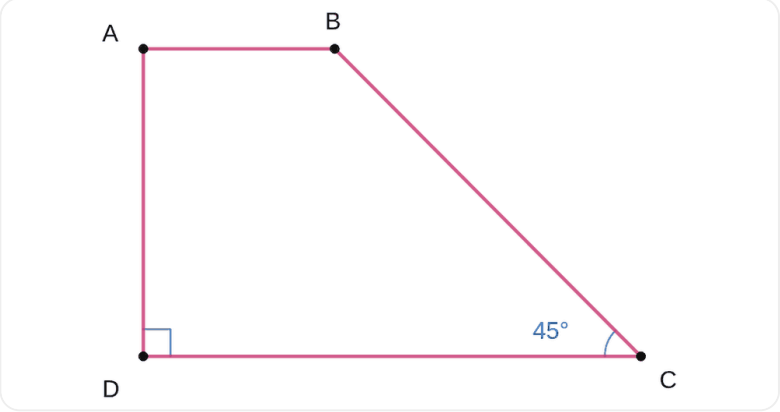
10 בטרפז $ABCD$ ($AB=6$, $DC=12$) האלכסונים נחתכים ב-O. אם $AC=15$, מצאו את AO ואת OC.



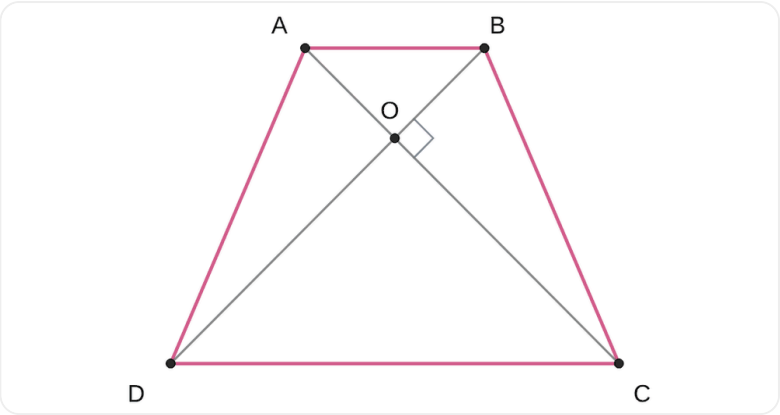
11 טרפז ישר זווית: הבסיסים 5 ו-11, והשוק הניצבת 8. מצאו את השוק השנייה ואת השטח.



12 בטרפז ישר זווית $ABCD$ ($\sphericalangle D=90°$, $AB\parallel DC$) נתון $\sphericalangle C=45°$, $AB=5$, $AD=8$. מצאו את DC ואת BC.



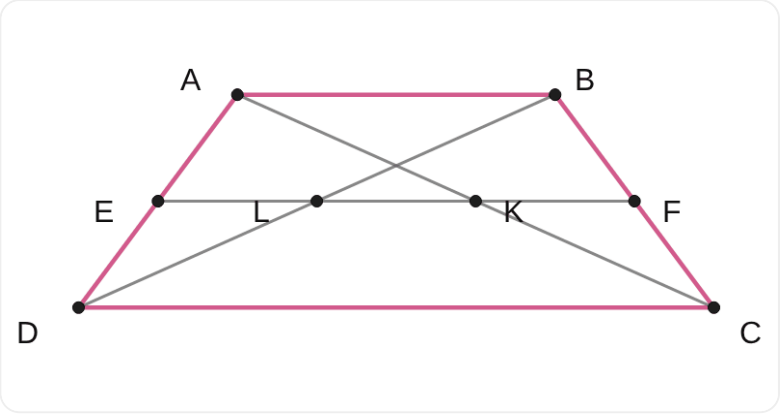
13 בטרפז שווה שוקיים האלכסונים מאונכים זה לזה, והבסיסים 4 ו-10. מצאו את גובה הטרפז ואת שטחו.



14 בטרפז שווה שוקיים זווית הבסיס $60°$, השוק 6 והבסיס הקטן 5. מצאו את הבסיס הגדול ואת השטח.

15 בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$) חוצי הזוויות $\sphericalangle A$ ו-$\sphericalangle D$ נחתכים בנקודה P. מצאו את $\sphericalangle APD$.

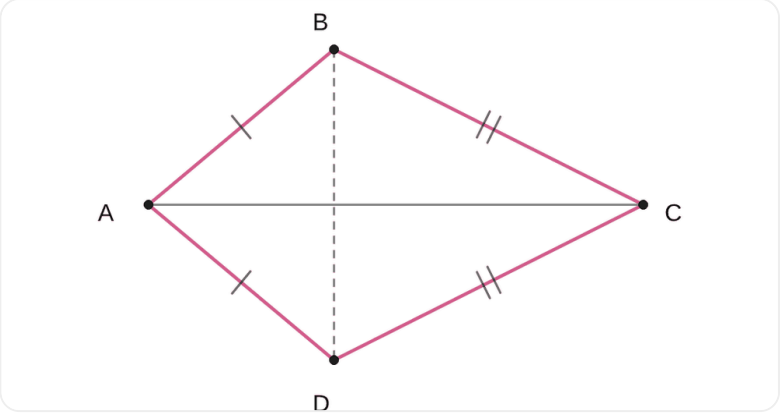
16 בטרפז $ABCD$ ($AB=6$, $DC=12$) קטע האמצעים EF חותך את האלכסונים ב-K וב-L. מצאו את EK, KL ו-LF.



17 הוכיחו: ישר החוצה שוק אחת של טרפז ומקביל לבסיסים חוצה גם את השוק השנייה.

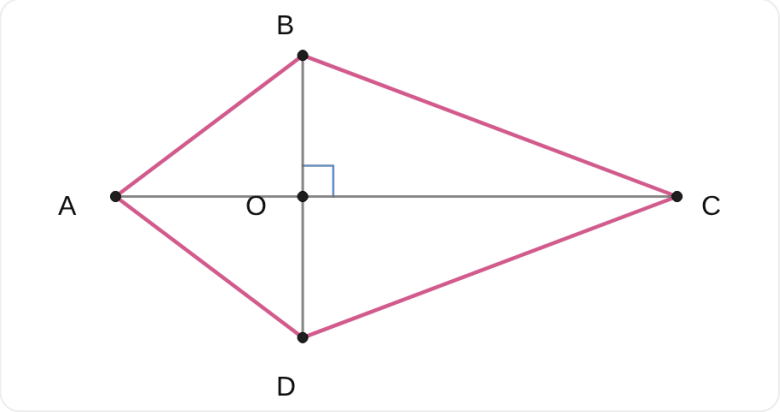
18 במרובע $ABCD$: $AB \parallel DC$ ו-$\sphericalangle D = \sphericalangle C$. הוכיחו שהוא טרפז שווה שוקיים (או מלבן).

19 בדלתון $ABCD$ ($AB=AD$, $CB=CD$) נתון $\sphericalangle BAD=70^\circ$ ו- $\sphericalangle BCD=50^\circ$. מצאו את $\sphericalangle ABC$.



20 בדלתון האלכסונים 6 ו-10. מה שטח הדלתון?

21 בדלתון $ABCD$ ($AB=AD=5$, $CB=CD$) האלכסון הראשי $AC=12$ והאלכסון המשני $BD=6$. מצאו את CB.



22 הוכיחו: האלכסון הראשי בדלתון חוצה את הזוויות שבקצותיו ומאונך לאלכסון המשני וחוצה אותו.

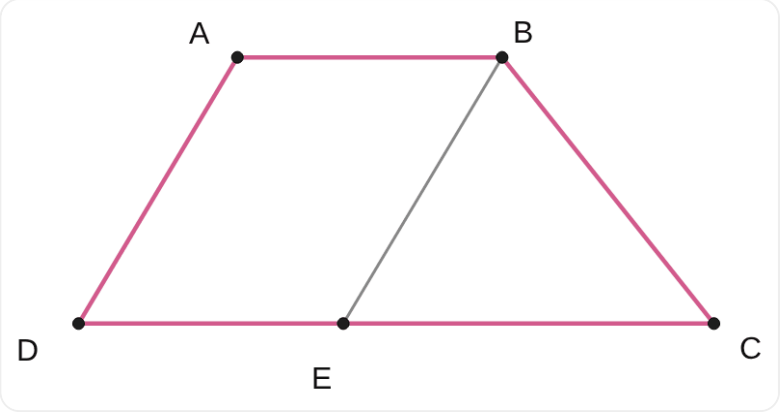
23 דלתון שבו כל ארבע הצלעות שוות – מה הוא? ודלתון שבו שתי זוויות ישרות נגדיות?

24 בדלתון $ABCD$ ($AB=AD$, $CB=CD$) $\sphericalangle B=\sphericalangle D=90^\circ$, $AB=6$, $BC=8$. מצאו את האלכסון AC ואת האלכסון BD.

25 בדלתון זוויות הצלעות השוות 100° כל אחת, וזווית ראש אחת 90°. מצאו את הזווית הרביעית.

26 במרובע $ABCD$ האלכסון AC הוא אנך אמצעי ל-BD. הוכיחו ש-$ABCD$ דלתון.

27 בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$, $AB < DC$) מעבירים דרך B מקביל ל-AD החותך את DC ב-E. אם $AB = 5$, $DC = 12$, $AD = 6$, $BC = 7$ – מהו היקף $\triangle BEC$?



28 בטרפז הבסיסים a ו-b והגובה h. הביעו את השטח בעזרת קטע האמצעים m.

29 בטרפז שווה שוקיים $ABCD$ ($AB \parallel DC$) $AB = AD = BC$, ו-$\sphericalangle D = 60^\circ$.
מצאו את היחס $DC : AB$.

30 בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$) נתון $AB = 4$, $DC = 9$. האלכסונים נחתכים ב-O.
מה היחס בין שטח $\triangle AOB$ לשטח $\triangle COD$?

31 בטרפז שווה שוקיים האלכסון חוצה את זווית הבסיס הגדול, הבסיס הקטן 5 והשוק 5.
אם זווית הבסיס 60°, מה הבסיס הגדול?

✔ תשובות סופיות – נושא 7.2

1. $\sphericalangle A=\sphericalangle B=115^\circ$, $\sphericalangle C=65^\circ$
2. $\sphericalangle A=135^\circ$, $\sphericalangle D=45^\circ$
3. $EF=9$
4. 8 ו-14
5. שוק $2\sqrt{5}$; היקף $16+4\sqrt{5}$
6. 11
7. גובה 8 ; שטח 112
8. $\triangle ADC\cong\triangle BCD$ (צ.ז.צ) ; 9
9. $\sphericalangle BAC=\sphericalangle ACD=\sphericalangle ACB$ ולכן $AB=BC$; היקף 31
10. $AO=5$, $OC=10$ (יחס $1:2$)
11. 10 ; 64
12. $DC=13$, $BC=8\sqrt{2}$
13. גובה 7 (חצי סכום הבסיסים) ; שטח 49
14. 11 ; $24\sqrt{3}$
15. 90°
16. $EK=6$, $KL=3$, $LF=6$
17. משפט קטע אמצעים במשולש פעמיים (דרך אלכסון)
18. מעבירים גבהים ומקבלים משולשים חופפים – $AD=BC$
19. $\sphericalangle ABC=120^\circ$
20. 30
21. $CB=\sqrt{73}$
22. $\triangle ABC\cong\triangle ADC$ (צ.צ.צ) ואז במשולש שו"ש ABD חוצה זווית הראש הוא גם גובה ותיכון

23	מעוין ; דלתון שאפשר לחסום במעגל (האלכסון הראשי – קוטר)
24	$AC = 10$; $BD = 9.6$
25	$70°$
26	כל נקודה על האנך האמצעי שווה מרחק מקצות הקטע: $AB = AD$, $CB = CD$
27	$EC = 7$, $BE = 6$, $BC = 7$; היקף 20
28	$S = m \cdot h$
29	$1 : 2$
30	$16 : 81$
31	10

פרק 7 סיכומון סוף פרק – גיאומטריה – מרובעים

מקבילית

- צלעות נגדיות מקבילות ושוות; זוויות נגדיות שוות; זוויות סמוכות – 180°.
- האלכסונים חוצים זה את זה.
- מספיק להוכיח: זוג צלעות נגדיות מקבילות ושוות, או אלכסונים החוצים זה את זה.

מלבן

- מקבילית עם זווית ישרה.
- האלכסונים שווים וחוצים זה את זה.

מעוין

- מקבילית עם שתי צלעות סמוכות שוות.
- האלכסונים מאונכים וחוצים את הזוויות.
- שטח: $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

ריבוע

- גם מלבן וגם מעוין – אלכסונים שווים, מאונכים וחוצי זוויות.
- אלכסון: $a\sqrt{2}$; שטח a^2.

טרפז

- זוג צלעות מקבילות; זוויות ליד אותה שוק – סכומן 180°.
- קטע אמצעים: מקביל לבסיסים ושווה ל- $\frac{a+b}{2}$.
- שווה שוקיים: זוויות בסיס שוות ואלכסונים שווים; שטח $\frac{(a+b)h}{2}$.

דלתון

- שני זוגות של צלעות סמוכות שוות.
- האלכסון הראשי חוצה את המשני, מאונך לו וחוצה את זוויות הראש; שטח $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- להניח שאלכסוני מקבילית שווים – זה נכון רק במלבן.
- בדלתון – רק האלכסון הראשי חוצה את השני, לא להפך.
- קטע אמצעים בטרפז – לשכוח לחלק ב-2.

💡 **הטיפ של אילון:** זכרו את "עץ המרובעים": כל ריבוע הוא גם מעוין וגם מלבן, וכל מעוין ומלבן הם מקבילית. כך יודעים בדיוק אילו תכונות מותר להשתמש בהן.

פרק 8

גיאומטריה – פרופורציות

משפט תאלס, משפט תאלס ההפוך ודמיון משולשים – פרופורציות בשרטוט

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

8.1 משפט תאלס ודמיון משולשים

31 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



משפט תאלס ומשפט חוצה זווית

YouTube · 17:29



משפט דמיון ז.ז

YouTube · 7:52



תאלס או דמיון – איך מזהים?

YouTube · 5:35

8.1 משפט תאלס ודמיון משולשים

תאלס: ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית חותכים עליהן קטעים פרופורציוניים: אם $DE \parallel BC$ אז $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (וגם המשפט ההפוך). כשמחפשים את הקטע המקביל עצמו (DE) – משתמשים בדמיון: $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$.

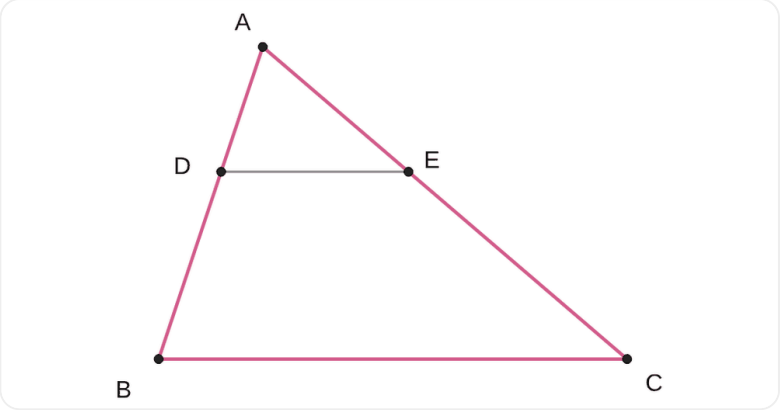
צפו לפני שמתחילים:

משפט תאלס ומשפט חוצה זווית
YouTube · 17:29

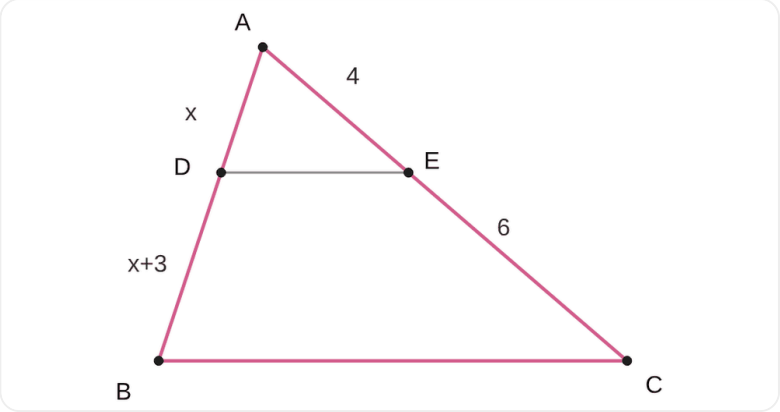
תאלס או דמיון – איך מזהים?
YouTube · 5:35

משפט דמיון צ.צ.צ
YouTube · 3:51

1 במשולש ABC, $DE \parallel BC$ (D על AB, E על AC). נתון: $AD = 4$, $DB = 6$, $AE = 5$. מצאו את EC.

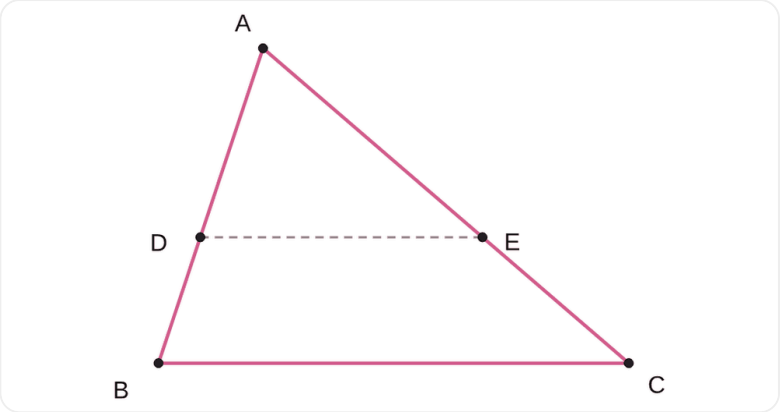


2 במשולש ABC, $DE \parallel BC$, $AD = x$, $DB = x + 3$, $AE = 4$, $EC = 6$.
מצאו את x.

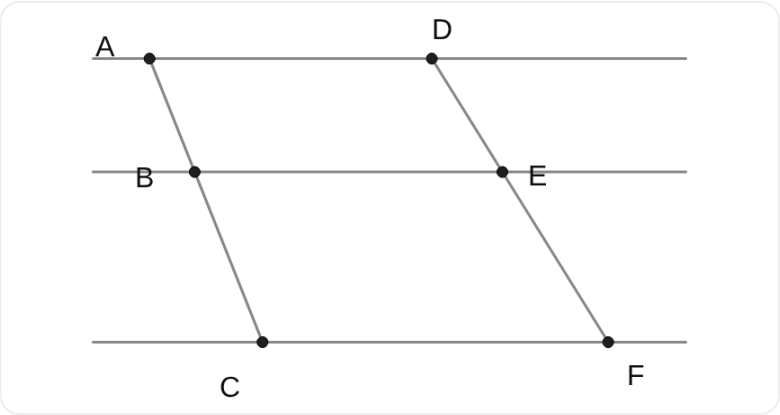


3 במשולש ABC, $DE \parallel BC$, $AD = 3$, $AB = 12$, $AC = 16$. מצאו את AE ואת EC.

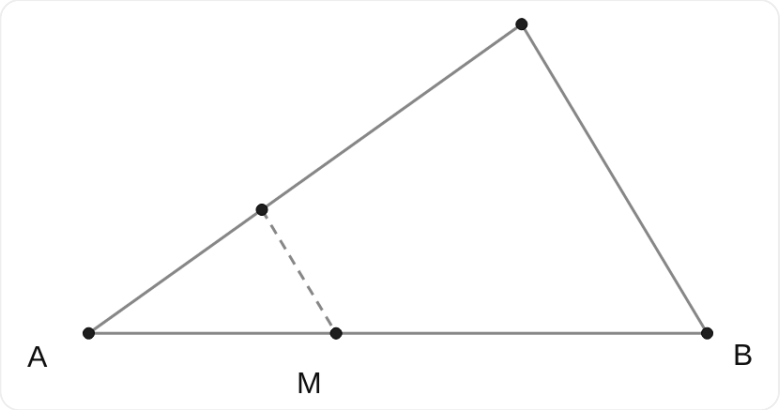
4 במשולש ABC הנקודות D על AB ו-E על AC, ו-$AD = 6$, $DB = 4$, $AE = 9$, $EC = 6$. האם $DE \parallel BC$? נמקו.



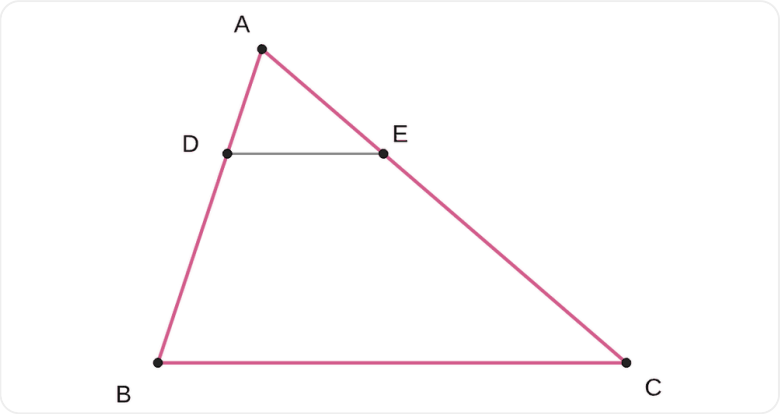
5 שלושה ישרים מקבילים חותכים שני ישרים: על האחד נוצרו הקטעים $AB = 4$, $BC = 6$, ועל השני $DE = 5$. מצאו את EF.



6 חלקו (בבנייה בעזרת תאלס) קטע באורך 10 ביחס $2:3$. מה אורכי שני החלקים?



7 במשולש ABC, $DE \parallel BC$ ו-$AD : DB = 1 : 2$. נתון $BC = 12$. מצאו את DE (שימו לב – כאן צריך דמיון, לא תאלס בלבד).



8 במשולש ABC, $DE \parallel BC$ (D על AB, E על AC). נתון $AD = 6$, $DB = 3$, $AE = 8$. מצאו את EC.

9 במשולש ABC, $DE \parallel BC$. נתון $AD = 10$, $DB = 8$, $AE = 5$ ו- $EC = x$.
מצאו את x.

10 שלושה ישרים מקבילים חותכים שני ישרים. על הישר הראשון נוצרו הקטעים 3 ו- $x+1$, ועל השני הקטעים המתאימים 6 ו- 10. מצאו את x.

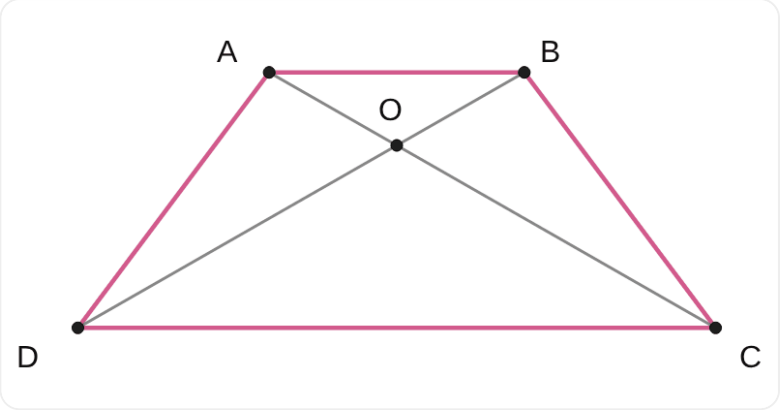
11 במשולש ABC, $DE \parallel BC$ ו- $AD : DB = 2 : 3$. נתון $AC = 20$. מצאו את AE ואת EC.

12 בטרפז $ABCD$ ($DC \parallel AB$) ישר המקביל לבסיסים חותך את השוק AD ב- E ואת השוק BC ב- F. נתון $AE : ED = 1 : 3$ ו- $BC = 8$. מצאו את BF ואת FC.

13 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ כאשר D על AB ו- E על AC, ו- $DE \parallel BC$. נתון $AD = 4$, $AB = 10$, $DE = 6$. מצאו את BC.

14 במשולש ABC, $DE \parallel BC$, $AD = 2$, $DB = 3$, $DE = 4$. מצאו את BC ואת היחס $AE : EC$.

15 בטרפז $ABCD$ ($DC \parallel AB$) האלכסונים נחתכים ב- O. $AO = 4$, $OC = 10$, $BO = 6$. מצאו את OD.



16 בטרפז $ABCD$ ($DC \parallel AB$) ישר המקביל לבסיסים חותך את השוק AD בנקודה E ואת השוק BC בנקודה F. $AE = 2$, $ED = 6$, $BC = 12$. מצאו את BF.

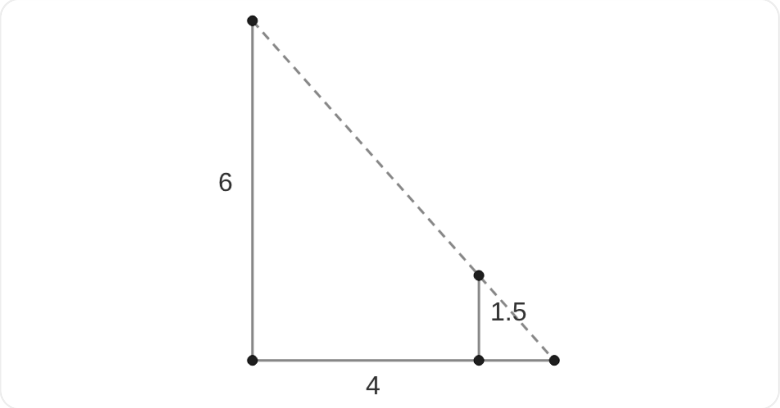
17 במשולש ABC, D אמצע AB. דרך D מעבירים מקביל ל- BC החותך את AC ב- E, ודרך E מקביל ל- AB החותך את BC ב- F. אם $BC = 14$, מצאו את BF ואת FC.

18 במשולש ABC הנקודה D על AB כך ש-$AD:DB=3:1$, ו-$DE \parallel BC$. אם שטח $\triangle ABC$ הוא 48, מצאו את שטח $\triangle ADE$.

19 שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי שני ישרים הנפגשים בנקודה O (צורת "שעון חול"). על ישר אחד $OA=3$, $OB=5$ (A, B בצדדים שונים של O), ועל השני $OC=4$. מצאו את OD.

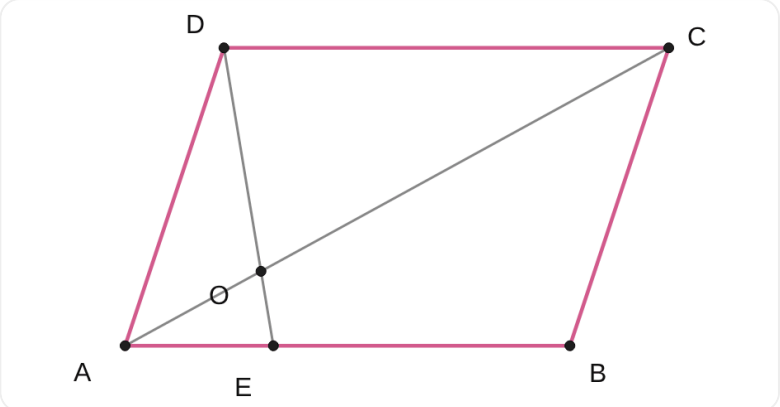
20 במשולש ABC, $DE \parallel BC$ ו-$FG \parallel BC$ (D,F על AB). $AD=DF=FB$. אם $BC=18$, מצאו את DE ואת FG.

21 קרן אור: עמוד בגובה 1.5 מטר עומד במרחק 4 מטר ממנורה בגובה 6 מטר. מה אורך הצל של העמוד?



22 במשולש ABC, D על BC כך ש-$DC:BD=3:1$, ו-E על AD כך ש-$ED:AE=2:1$. מעבירים דרך E מקביל ל-BC החותך את AB ב-F. מצאו את $FB:AF$.

23 במקבילית $ABCD$, E על AB כך ש-$EB:AE=2:1$. הקטע DE חותך את האלכסון AC ב-O. מצאו את היחס $OC:AO$.



24 בטרפז $ABCD$ ($AB=4$, $DC=10$, $AB \parallel DC$), דרך נקודת חיתוך האלכסונים O מעבירים ישר מקביל לבסיסים. מה אורך הקטע שלו בתוך הטרפז?

25 במשולש ABC, D על AB ו-E על AC, $DE \parallel BC$, והיקף $\triangle ADE$ הוא 15 בעוד היקף $\triangle ABC$ הוא 25. אם $DB=4$, מצאו את AB.

26 אדם שגובהו 1.8 מטר מטיל צל באורך 2.4 מטר. באותו רגע בניין מטיל צל באורך 20 מטר. מצאו את גובה הבניין.

27 הקטעים AD ו-BC נחתכים בנקודה O, ו-$AB \parallel CD$ (צורת "שעון חול"). נתון $AO=6$, $OD=9$, $AB=4$. מצאו את CD.

28 $AB \parallel CD$, והקטעים AD ו-BC נחתכים ב-O. נתון $AO=x$, $OD=x+5$, $BO=4$, $OC=9$. מצאו את x.

29 במשולש ABC, $DE \parallel BC$, $DE=6$, $BC=15$ ו-$AD=4$. מצאו את AB ואת DB.

30 שני משולשים דומים ביחס $2:5$. שטח המשולש הגדול 75. מצאו את שטח המשולש הקטן.

31 במשולש ABC הנקודה D על AB והנקודה E על AC, כך ש-$AD=4$, $DB=6$, $AE=6$, $EC=9$. האם $DE \parallel BC$? נמקו.

✔ תשובות סופיות – נושא 8.1

1	$EC = 7.5$ (משפט תאלס)
2	$x = 6$
3	$AE = 4$, $EC = 12$
4	כן - $\frac{6}{4} = \frac{9}{6}$ (המשפט ההפוך לתאלס)
5	$EF = 7.5$
6	4 ו-6
7	$DE = 4$
8	$EC = 4$
9	$x = 4$
10	$x = 4$
11	$AE = 8$, $EC = 12$
12	$BF = 2$, $FC = 6$
13	$BC = 15$
14	$BC = 10$; $2:3$
15	$OD = 15$
16	$BF = 3$
17	$BF = 7$, $FC = 7$
18	27
19	$OD = \frac{20}{3}$
20	$DE = 6$, $FG = 12$
21	$\frac{4}{3}$ מטר
22	$2:1$
23	$1:3$

24 $\frac{40}{7}$ (הממוצע ההרמוני: $\frac{2ab}{a+b}$)

25 $AB = 10$

26 15 מטר

27 $CD = 6$

28 $x = 4$

29 $AB = 10$, $DB = 6$

30 12

31 כן - $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$, לפי משפט תאלס ההפוך

פרק 8 סיכומון סוף פרק – גיאומטריה – פרופורציות

משפט תאלס

- ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית – הקטעים המתאימים פרופורציוניים.
- אם $DE \parallel BC$: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.
- משפט תאלס ההפוך: קטעים פרופורציוניים – הישרים מקבילים.

שלושה ישרים מקבילים

- הקטעים שנוצרים על ישר אחד פרופורציוניים לקטעים המתאימים על הישר השני.

תאלס או דמיון?

- מחפשים קטע על השוקיים – תאלס.
- מחפשים את הקטע המקביל עצמו (DE) – דמיון: $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$.

דמיון משולשים

- משפטי דמיון: ז.ז, צ.ז.צ, צ.צ.צ.
- יחס הדמיון k = יחס הצלעות, ההיקפים והגבהים; יחס השטחים k^2.
- "שעון חול": $AB \parallel CD$ – המשולשים AOB ו-DOC דומים.

איך ניגשים?

- מסמנים את הנעלם x ובונים פרופורציה.
- מכפילים בהצלבה: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לכתוב $\frac{AD}{DB} = \frac{DE}{BC}$ – שגוי! עם DE חייבים $\frac{AD}{AB}$.
- להפעיל תאלס בלי לוודא שהישרים מקבילים.
- להתאים בדמיון צלעות שאינן מתאימות – מתאימים לפי הזוויות השוות.

💡 **הטיפ של אילון:** כתבו את הפרופורציה במילים לפני שמציבים מספרים – "קטע קטן חלקי קטע גדול" באותו סדר בשני הצדדים, וכך לא מתבלבלים.

פרק 9

גיאומטריה – מעגלים

מיתרים, אנך מהמרכז, זוויות במעגל ומשיקים

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

9.1 אנך ממרכז המעגל, מיתרים וזוויות במעגל — 45 תרגילים

9.2 משיקים למעגל — 30 תרגילים

סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



גיאומטריה – כל משפטי המשיק וניווט
YouTube · 6:23



גיאומטריה – מצבים ללא משפט
YouTube · 9:45



כל החומר בגיאומטריה – מהחטיבה ועד הבגרות
YouTube · 9:03



חישוב היקף מעגל ושטח עיגול
YouTube · 3:26

המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף



זווית מרכזית וזווית היקפית

גררו את הנקודות על המעגל וראו שהזווית המרכזית תמיד פי 2 מהזווית ההיקפית – כולל זווית הנשענת על קוטר.

9.1 אנך ממרכז המעגל, מיתרים וזוויות במעגל

האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, ולכן $R^2 = d^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$. מיתרים שווים – במרחקים שווים מהמרכז. זווית מרכזית שווה לפעמיים הזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת; זוויות היקפיות על אותה קשת שוות; זווית היקפית הנשענת על קוטר – ישרה.

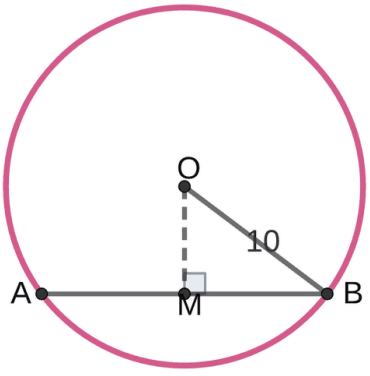
צפו לפני שמתחילים:

כל החומר בגיאומטריה – מהחטיבה ועד הבגרות
YouTube · 9:03

גיאומטריה – מצבים ללא משפט
YouTube · 9:45

כל הזוויות – מקבילים, 180° ו-360°
YouTube · 10:02

1 במעגל שמרכזו O ורדיוסו 10 ס"מ העבירו מיתר AB שאורכו 16 ס"מ. OM הוא האנך מהמרכז למיתר. מצאו את המרחק של המיתר ממרכז המעגל.



2 במעגל שרדיוסו 13 ס"מ, מרחק המיתר AB ממרכז המעגל הוא 5 ס"מ. מצאו את אורך המיתר.

3 אורך מיתר במעגל הוא 24 ס"מ, ומרחקו ממרכז המעגל 9 ס"מ. מצאו את רדיוס המעגל.

4 במעגל שרדיוסו 17 ס"מ העבירו מיתר AB שאורכו 30 ס"מ. מצאו את שטח המשולש AOB.

5 במעגל שרדיוסו 25 ס"מ העבירו שני מיתרים מקבילים שאורכם 48 ס"מ ו-14 ס"מ, **באותו צד** של המרכז. מצאו את המרחק בין המיתרים.

6 אותם נתונים כמו בתרגיל הקודם, אבל המיתרים נמצאים **משני צדי** המרכז. מה המרחק בין המיתרים עכשיו?

7 במעגל שרדיוסו 10 נתונים שני מיתרים שווים $AB=CD$. מרחק המיתר AB מהמרכז הוא 6. מצאו את מרחק המיתר CD מהמרכז ואת אורכו. איזה משפט שימש אתכם?

8 במעגל שמרכזו O: $OM\perp AB$ ו-$ON\perp CD$, וידוע ש-$OM=ON$. הוכיחו ש-$AB=CD$.

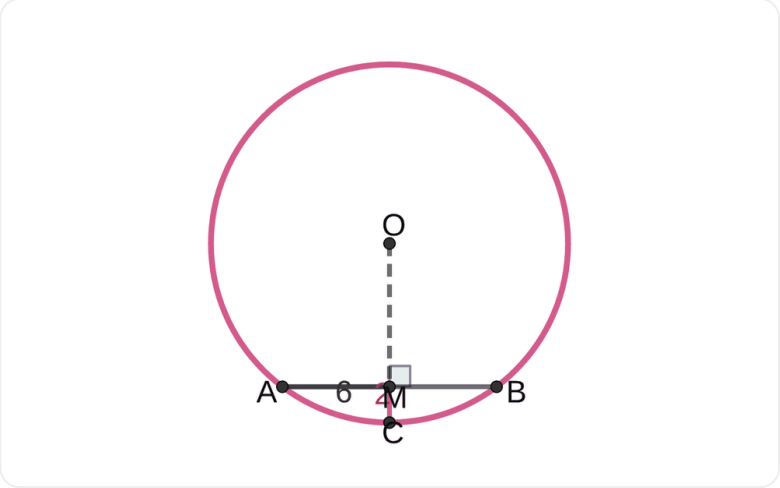
9 במעגל אחד העבירו מיתר באורך 10 ומיתר באורך 14. איזה מהם קרוב יותר למרכז המעגל? נמקו.

10 M היא אמצע המיתר AB. ידוע ש-$OM=3$ ו-$AM=4$. מצאו את קוטר המעגל.

11 במעגל שרדיוסו 8 העבירו מיתר שאורכו שווה לרדיוס. מצאו את מרחק המיתר מהמרכז. איזה משולש נוצר בין המיתר לשני הרדיוסים?

12 מרחק מיתר ממרכז מעגל שרדיוסו 12 שווה למחצית הרדיוס. מצאו את אורך המיתר.

13 המיתר AB אורכו 12. האנך האמצעי למיתר חותך את המיתר ב-M ואת הקשת הקטנה ב-C, כך ש-$MC = 2$. מצאו את רדיוס המעגל.



14 קשת של גשר בנויה כחלק ממעגל. רוחב הגשר (המיתר) 16 מ', וגובה הקשת מעל אמצע המיתר 4 מ'. מצאו את רדיוס המעגל.

15 הקוטר AB מאונך למיתר CD ונחתך איתו בנקודה E. ידוע ש-$AE = 2$ ו-$EB = 8$. מצאו את אורך המיתר CD.

16 הנקודה P נמצאת בתוך מעגל שרדיוסו 10, במרחק 6 מהמרכז. מצאו את אורך המיתר הקצר ביותר ואת אורך המיתר הארוך ביותר שעוברים דרך P.

17 במעגל שמרכזו O ורדיוסו 6, הזווית המרכזית $\angle AOB = 120^\circ$. מצאו את מרחק המיתר AB מהמרכז ואת אורכו.

18 שני מיתרים מקבילים שאורכם 16 ו-12 נמצאים משני צדי המרכז, והמרחק ביניהם 14. מצאו את רדיוס המעגל.

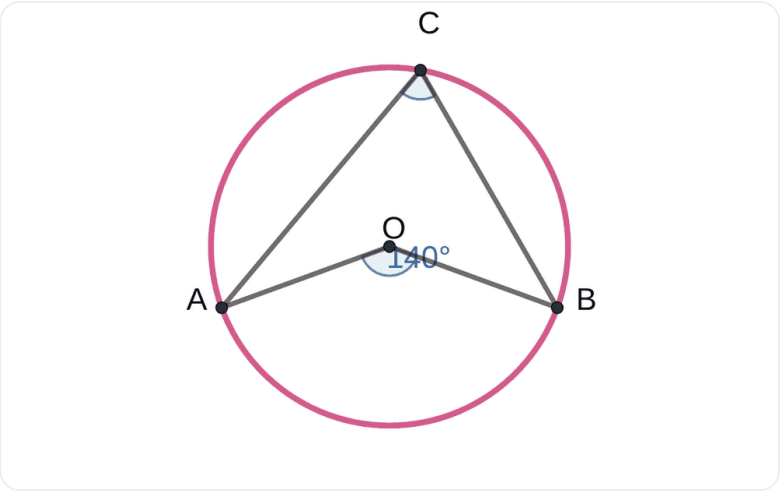
19 הוכיחו: האנך האמצעי של כל מיתר במעגל עובר דרך מרכז המעגל.

20 נתון מעגל שהמרכז שלו לא מסומן. הסבירו איך מוצאים את המרכז בעזרת שני מיתרים לא מקבילים.

21 מרחק המיתר $AB = 10$ מהמרכז הוא 12. במעגל העבירו מיתר $CD \parallel AB$ שמרחקו מהמרכז 5. מצאו את אורך CD.

22 במעגל שרדיוסו 5 העבירו מיתר $AB = 6$. מצאו את ההיקף ואת השטח של המשולש AOB.

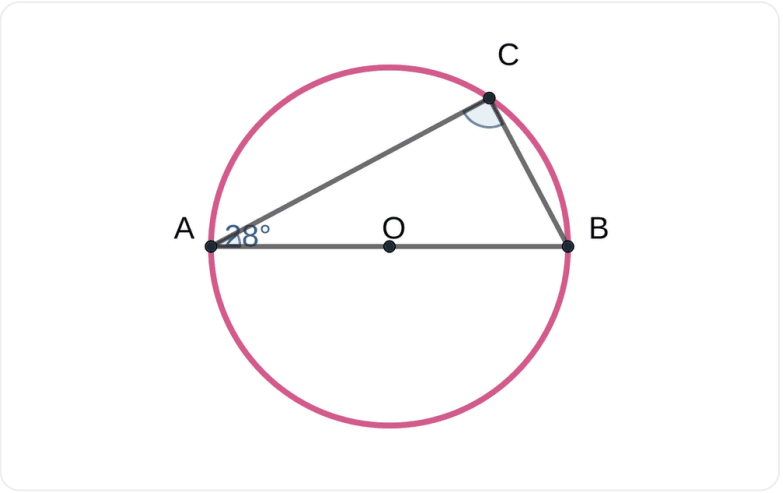
23 בציור, O מרכז המעגל ו- $\angle AOB = 140°$. מצאו את הזווית ההיקפית $\angle ACB$.



24 הזווית ההיקפית $\angle ADB = 35°$ נשענת על הקשת AB. מצאו את הזווית המרכזית $\angle AOB$ הנשענת על אותה קשת.

25 הנקודות C ו- D נמצאות על המעגל באותו צד של המיתר AB, ו- $\angle ACB = 55°$. מצאו את $\angle ADB$. נמקו.

26 AB קוטר במעגל, ו- C נקודה על המעגל. ידוע ש- $\angle CAB = 28°$. מצאו את $\angle ABC$.

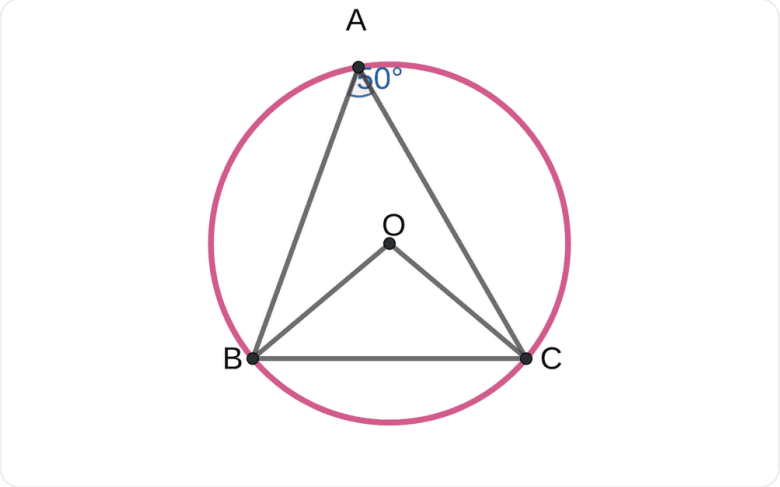


27 AB קוטר במעגל שרדיוסו 6.5, ו- C נקודה על המעגל כך ש- $AC = 5$. מצאו את BC ואת שטח המשולש ABC.

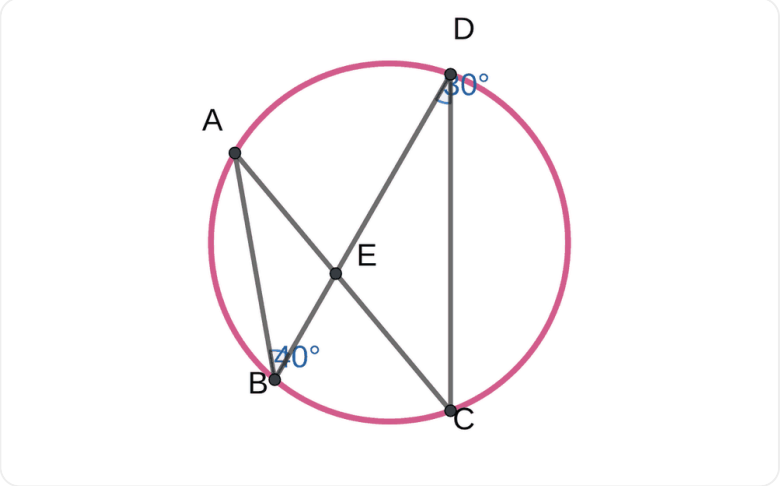
28 במעגל שמרכזו O, $\angle AOB = 100^\circ$. הנקודה C נמצאת על הקשת הקטנה AB. מצאו את $\angle ACB$.

29 במעגל שמרכזו O, המשולש AOB שווה צלעות. מצאו את הזווית ההיקפית הנשענת על הקשת הקטנה AB, ואת זו הנשענת על הקשת הגדולה.

30 המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O, ו- $\angle BAC = 50^\circ$. מצאו את $\angle OBC$.



31 המיתרים AC ו- BD נחתכים בנקודה E בתוך המעגל. ידוע ש- $\angle ABD = 40^\circ$ ו- $\angle BDC = 30^\circ$. מצאו את $\angle AEB$.



32 במעגל, הקשתות AB, BC ו- CA (שאינן חופפות) מתייחסות כ- $2 : 3 : 4$. מצאו את זוויות המשולש ABC.

33 במעגל, $AB = CD$ (שני מיתרים שווים). ידוע ש- $\angle AOB = 64^\circ$. מצאו את $\angle COD$ ואת הזווית ההיקפית הנשענת על הקשת CD.

34 AB קוטר במעגל שמרכזו O. C על המעגל כך ש- $\angle AOC = 70^\circ$. מצאו את זוויות המשולש ABC.

35 המשולש ABC ישר זווית ($\angle C = 90^\circ$) וניצביו 6 ו- 8. מצאו את רדיוס המעגל החוסם את המשולש. היכן נמצא מרכזו?

36 המשולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R, ו- $AB = 2R$. מה גודל $\angle ACB$? הסבירו.

37 במעגל שמרכזו O, $\angle OAB = 24^\circ$. מצאו את הזווית ההיקפית $\angle ACB$, כאשר C על הקשת הגדולה AB.

38 בציור, $\angle ACB = x$ ו- $\angle AOB = 3x - 40^\circ$, כאשר שתיהן נשענות על הקשת AB. מצאו את x.

39 המשולש ABC חסום במעגל, ו- $\angle ABC = \angle ACB = 70^\circ$. הנקודה D על הקשת BC שאינה מכילה את A. מצאו את $\angle BDC$.

40 במעגל, AB קוטר ו- CD מיתר המקביל לו. ידוע ש- $\angle CAB = 30^\circ$ (כאשר C קרובה ל- B). מצאו את $\angle ACD$.

41 AB קוטר במעגל. C ו- D על המעגל משני צדי AB, ו- $\angle CAB = 40^\circ$, $\angle DBA = 25^\circ$. מצאו את $\angle CDB$ ואת $\angle ACD$.

42 במעגל שרדיוסו 10, הזווית ההיקפית $\angle ACB = 30^\circ$. מצאו את אורך המיתר AB.

43 במעגל שרדיוסו 8, הזווית ההיקפית $\angle ACB = 45^\circ$. מצאו את אורך המיתר AB.

44 הנקודות A, B, C, D על מעגל לפי הסדר, ו- $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 50^\circ$. מצאו את $\angle ACD$ ואת $\angle ADC$, כאשר $\angle ACD$ נשענת על הקשת AD הגדולה שאינה מכילה את B.

45 המשולש ABC חסום במעגל, AD קוטר. ידוע ש- $\angle ABC = 62^\circ$. מצאו את $\angle CAD$.

✔ תשובות סופיות – נושא 9.1

1. $OM = 6$ ס"מ
2. $AB = 24$ ס"מ
3. $R = 15$ ס"מ
4. $S_{AOB} = 120$ סמ"ר (גובה $OM = 8$)
5. 17 ס"מ ($24 - 7$)
6. 31 ס"מ ($24 + 7$)
7. מרחק 6, $CD = 16$; מיתרים שווים – מרחקים שווים מהמרכז
8. מיתרים שמרחקם מהמרכז שווה – שווים (חפיפת משולשים ישרי זווית OMB, ONC לפי יתר וניצב)
9. המיתר שאורכו 14 – במעגל, מיתר ארוך יותר קרוב יותר למרכז
10. קוטר $= 10$
11. $4\sqrt{3}$; משולש שווה צלעות
12. $12\sqrt{3}$
13. $R = 10$
14. $R = 10$ מ'
15. $CD = 8$ (רדיוס 5, $OE = 3$, $CE = 4$)
16. הקצר: 16 (מאונך ל-OP) ; הארוך: 20 (קוטר)
17. $OM = 3$; $AB = 6\sqrt{3}$
18. $R = 10$ (המרחקים מהמרכז: 6 ו-8)
19. המרכז נמצא במרחק שווה מקצות המיתר ($OA = OB$), ולכן הוא על האנך האמצעי
20. מעבירים את האנכים האמצעיים לשני המיתרים – נקודת החיתוך שלהם היא המרכז
21. $CD = 24$ ($R = 13$)
22. היקף 16 ; שטח 12

23 $\angle ACB = 70^\circ$

24 $\angle AOB = 70^\circ$

25 $\angle ADB = 55^\circ$ – זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת שוות

26 $\angle ABC = 62^\circ$ ($\angle ACB = 90^\circ$ כי)

27 $BC = 12$; $S = 30$

28 $\angle ACB = 130^\circ$ (נשענת על הקשת הגדולה, 260°)

29 30° ו- 150°

30 $\angle OBC = 40^\circ$ ($\angle BOC = 100^\circ$, משולש שווה שוקיים)

31 $\angle AEB = 110^\circ$ (במשולש ECD: $\angle ECD = 40^\circ$, $\angle EDC = 30^\circ$; זוויות קודקודיות)

32 40°, 60°, 80° (הקשתות: $80^\circ, 120^\circ, 160^\circ$)

33 $\angle COD = 64^\circ$; 32° – מיתרים שווים, קשתות שוות וזוויות שוות

34 $\angle A = 55^\circ$, $\angle B = 35^\circ$, $\angle C = 90^\circ$

35 $R = 5$; באמצע היתר

36 90° – AB קוטר, וזווית היקפית הנשענת על קוטר ישרה

37 $\angle ACB = 66^\circ$ ($\angle AOB = 132^\circ$)

38 $x = 40^\circ$ ($3x - 40 = 2x$)

39 $\angle BDC = 140^\circ$ ($\angle A = 40^\circ$)

40 $\angle ACD = 30^\circ$ (זוויות מתחלפות)

41 $\angle CDB = 40^\circ$; $\angle ACD = \angle ABD = 25^\circ$

42 $AB = 10$ (המשולש AOB שווה צלעות)

43 $AB = 8\sqrt{2}$ ($\angle AOB = 90^\circ$)

44 $\angle ACD = 105^\circ$; $\angle ADC = 50^\circ$

45 $\angle CAD = 28^\circ$ ($\angle ADC = 62^\circ$, $\angle ACD = 90^\circ$)

9.2 משיקים למעגל

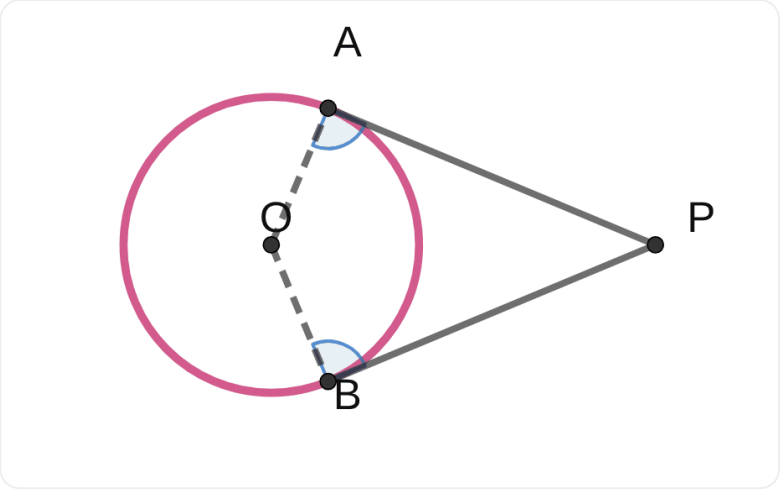
משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה. שני משיקים היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה, והקטע מהמרכז לנקודה חוצה את הזווית שבין המשיקים. במרובע $OAPB$ סכום הזוויות $\sphericalangle AOB + \sphericalangle APB = 180°$.

צפו לפני שמתחילים:

גיאומטריה – כל משפטי המשיק וניווט
YouTube · 6:23

כל משפטי השטחים בגיאומטריה
YouTube · 8:56

1 מהנקודה P העבירו משיק למעגל שמרכזו O ורדיוסו 5. נקודת ההשקה היא A, ו-$OP = 13$. מצאו את אורך המשיק PA.



2 אורך משיק מנקודה P למעגל הוא 15, והמרחק של P ממרכז המעגל הוא 17. מצאו את רדיוס המעגל.

3 מהנקודה P העבירו שני משיקים למעגל, PA ו-PB. ידוע ש-$PA = 3x + 1$ ו-$PB = 5x - 7$. מצאו את x ואת אורך המשיק.

4 מהנקודה P העבירו שני משיקים PA, PB למעגל שמרכזו O, ו-$\angle APB = 50°$. מצאו את $\angle AOB$.

5 באותו מצב, $\angle APB = 50°$. מצאו את $\angle PAB$ ואת $\angle OAB$.

6 מהנקודה P העבירו שני משיקים למעגל שרדיוסו 6, והזווית ביניהם 60°. מצאו את המרחק OP ואת אורך המשיקים.

7 מהנקודה P העבירו שני משיקים PA, PB למעגל, והזווית ביניהם 90°. רדיוס המעגל 4. מה סוג המרובע $OAPB$, ומה המרחק OP?

8 הוכיחו: הקטע OP (מהמרכז לנקודה שממנה יוצאים שני משיקים) חוצה את הזווית בין המשיקים.

9 מהנקודה P העבירו שני משיקים PA, PB למעגל שמרכזו O, ו-OP חותך את AB ב-M. ידוע ש-$OA = 6$ ו-$OP = 10$. מצאו את AB.

10 PA משיק למעגל שמרכזו O בנקודה A, וידוע ש-$PA = OA$. מצאו את $\sphericalangle AOP$ ואת $\sphericalangle APO$.

11 רדיוס מעגל 8, ואורך המשיק מהנקודה P למעגל שווה ל-$\frac{3}{4}$ מהרדיוס. מצאו את אורך המשיק ואת המרחק OP.

12 מהנקודה P העבירו שני משיקים PA ו-PB למעגל שמרכזו O. ידוע ש-$\sphericalangle AOB = 3\sphericalangle APB$. מצאו את שתי הזוויות.

13 מהנקודה P העבירו שני משיקים PA ו-PB למעגל, ו-$\sphericalangle APB = 60^\circ$. אורך כל משיק 7. מצאו את אורך המיתר AB.

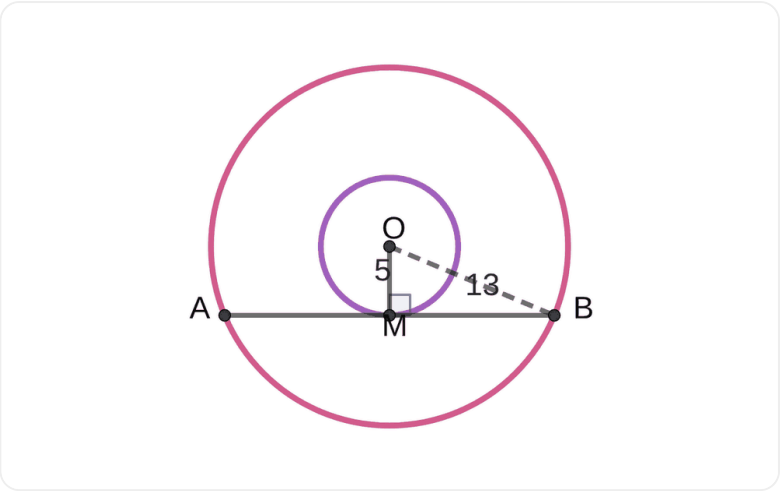
14 מהנקודה P העבירו שני משיקים PA ו-PB למעגל, ו-$\sphericalangle PAB = 65^\circ$. מצאו את $\sphericalangle APB$ ואת $\sphericalangle AOB$.

15 PA ו-PB משיקים למעגל שמרכזו O ורדיוסו 10, ו-$OP = 26$. מצאו את אורך המשיקים ואת היקף המרובע $OAPB$.

16 PA ו-PB משיקים למעגל שרדיוסו 5, ואורך כל משיק 12. מצאו את שטח המרובע $OAPB$ (רמז: שני משולשים ישרי זווית).

17 AB קוטר במעגל ו-BC משיק למעגל ב-B. AC חותך את המעגל ב-D. ידוע ש-$AB = 6$ ו-$BC = 8$. מצאו את AC ואת BD.

18 שני מעגלים בעלי מרכז משותף, ברדיוסים 5 ו-13. מיתר של המעגל הגדול משיק למעגל הקטן. מצאו את אורך המיתר.



19 מהנקודה P העבירו משיקים PA ו-PB למעגל. ישר נוסף משיק למעגל בנקודה C שעל הקשת הקטנה AB, וחותך את PA ב-D ואת PB ב-E. ידוע ש-$PA=12$. מצאו את היקף המשולש PDE.

20 PA משיק למעגל שרדיוסו 8 ב-A, ו-$OP=17$. OP חותך את המעגל ב-C. מצאו את PC ואת אורך המשיק.

21 PA ו-PB משיקים למעגל, ו-$\angle APB=40^\circ$. C נקודה על הקשת הגדולה AB. מצאו את $\angle ACB$.

22 מהנקודה P העבירו שני משיקים למעגל שרדיוסו 9, ואורך כל משיק 12. מצאו את שטח המרובע $OAPB$ ואת אורך המיתר AB.

23 ישר ℓ משיק למעגל שרדיוסו 5. מרכז המעגל במרחק 13 מהנקודה P שעל ℓ. מהו המרחק מ-P לנקודת ההשקה?

24 PA משיק למעגל שמרכזו O ורדיוסו 5. הקטע OP חותך את המעגל בנקודה C, ו-$PC=8$. מצאו את OP ואת אורך המשיק PA.

25 PA משיק למעגל שמרכזו O ורדיוסו 4, ו-$\sphericalangle OPA=30^\circ$. מצאו את OP ואת PA.

26 PA ו-PB משיקים למעגל, ו-$PA = x + 3$, $PB = 2x - 1$. מצאו את x ואת אורך המשיקים.

27 PA ו-PB משיקים למעגל שרדיוסו 6, ו-$\sphericalangle APB = 90^\circ$. מצאו את אורך המשיקים ואת OP. איזה מרובע הוא $OAPB$?

28 PA ו-PB משיקים למעגל שמרכזו O, ו-$\sphericalangle AOP = 55^\circ$. מצאו את $\sphericalangle APO$ ואת $\sphericalangle APB$.

29 הנקודה P נמצאת במרחק 15 ממרכז מעגל שרדיוסו 9. מצאו את אורך המשיק מ-P למעגל ואת המרחק הקצר ביותר מ-P למעגל.

30 PA ו-PB משיקים למעגל שמרכזו O, והמרחק OP שווה לקוטר המעגל. מצאו את $\sphericalangle APO$ ואת $\sphericalangle APB$.

✔ תשובות סופיות – נושא 9.2

1. $PA = 12$
2. $R = 8$
3. $PA = 13$; $x = 4$
4. $\angle AOB = 130°$ (במרובע $OAPB$ שתי זוויות ישרות)
5. $\angle PAB = 65°$; $\angle OAB = 25°$
6. $OP = 12$; $PA = 6\sqrt{3}$
7. ריבוע ; $OP = 4\sqrt{2}$
8. חפיפת המשולשים OAP ו-OBP (יתר וניצב: OP משותף, $OA = OB$)
9. $AB = 9.6$ ($AM = \frac{6\cdot 8}{10} = 4.8$)
10. $45°$ ו-$45°$ (משולש ישר זווית ושווה שוקיים)
11. $PA = 6$, $OP = 10$
12. $\sphericalangle APB = 45°$, $\sphericalangle AOB = 135°$
13. $AB = 7$ – המשולש APB שווה צלעות
14. $\sphericalangle APB = 50°$, $\sphericalangle AOB = 130°$
15. $PA = PB = 24$; היקף 68
16. 60
17. $AC = 10$; $BD = 4.8$
18. 24
19. 24 ($DC = DA$, $EC = EB$)
20. $PC = 9$; $PA = 15$
21. $\angle ACB = 70°$ ($\angle AOB = 140°$)
22. $AB = 14.4$; שטח 108
23. 12

24 $PA = 12$,$OP = 13$

25 $PA = 4\sqrt{3}$,$OP = 8$

26 $x = 4$, אורך המשיק 7

27 $PA = 6$,$OP = 6\sqrt{2}$; ריבוע

28 $\sphericalangle APO = 35°$,$\sphericalangle APB = 70°$

29 משיק 12 ; המרחק הקצר ביותר 6

30 $\sphericalangle APO = 30°$,$\sphericalangle APB = 60°$

פרק 9 סיכומון סוף פרק – גיאומטריה – מעגלים

מיתרים ואנך מהמרכז

- אנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר (ולהפך).
- $R^2 = d^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$ – פיתגורס במשולש רדיוס, מרחק וחצי מיתר.
- מיתרים שווים – מרחקים שווים מהמרכז; מיתר ארוך יותר קרוב יותר למרכז.

משיקים

- המשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.
- שני משיקים מאותה נקודה – שווים.
- הקטע מהמרכז לנקודה חוצה את הזווית שבין המשיקים.
- במרובע $OAPB$: $\sphericalangle AOB + \sphericalangle APB = 180^\circ$.

זוויות במעגל

- זווית מרכזית שווה לפעמיים הזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת.
- זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת – שוות.
- זווית היקפית הנשענת על קוטר – 90°.

משיק ופיתגורס

- $PA^2 + R^2 = OP^2$ – אורך משיק מנקודה שמחוץ למעגל.
- המרחק הקצר ביותר מ-P למעגל: $OP - R$.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- להשוות זווית היקפית לזווית מרכזית – ההיקפית היא **מחצית**.
- לשכוח להעביר רדיוס לנקודת ההשקה כדי לקבל זווית ישרה.
- באנך למיתר – להציב את כל המיתר במקום מחציתו.

💡 **הטיפ של אילון:** במעגל, הצעד הראשון כמעט תמיד הוא להעביר רדיוסים – לנקודות ההשקה ולקצות המיתרים. משם נולדים משולשים שווי שוקיים וזוויות ישרות.

פרק 10

הסתברות

מאורעות, טבלה דו-ממדית, עץ הסתברות והסתברות מותנית

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

10.1 **מאורעות, "או", טבלה דו-ממדית, מאורעות זרים ובלתי תלויים** — 35 תרגילים

10.2 **עץ הסתברות והסתברות מותנית** — 35 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

הסתברות "או" – הסבר ברור
YouTube · 3:39

הסתברות עם טבלה – המבנה הנכון
YouTube · 4:30

הסתברות עם תרשים עץ
YouTube · 2:55

הסתברות מותנית – הסבר ברור
YouTube · 3:31

10.1 מאורעות, "או", טבלה דו-ממדית, מאורעות זרים ובלתי תלויים

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. משלים: $P(\bar{A})=1-P(A)$. זרים: $P(A\cap B)=0$. בלתי תלויים: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. בטבלה דו-ממדית – סכום כל השורות והעמודות הוא 1.

צפו לפני שמתחילים:

הסתברות "או" – הסבר ברור וטכניקות חישוב
YouTube · 3:39

הסתברות עם טבלה – המבנה הנכון
YouTube · 4:30

מאורעות תלויים ובלתי תלויים
YouTube · 3:48

1. מטילים קובייה הוגנת. מה ההסתברות לקבל מספר זוגי?
2. מטילים קובייה הוגנת. מה ההסתברות לקבל מספר גדול מ-4?
3. מטילים קובייה הוגנת. מה ההסתברות לקבל מספר זוגי **או** מספר גדול מ-4?
4. מטילים קובייה הוגנת. מה ההסתברות **שלא** יתקבל 6?
5. מטילים שתי קוביות הוגנות. מה ההסתברות שסכום התוצאות יהיה 7?
6. מטילים שתי קוביות הוגנות. מה ההסתברות שסכום התוצאות יהיה לפחות 10?
7. מטילים שתי קוביות הוגנות. מה ההסתברות ששתי התוצאות שוות?
8. מטילים שתי קוביות הוגנות. מה ההסתברות שמכפלת התוצאות תהיה זוגית?
9. מטילים מטבע הוגן שלוש פעמים. מה ההסתברות לקבל בדיוק שני "עץ"?

10 בכד 5 כדורים אדומים ו-3 כחולים. מוציאים כדור אחד. מה ההסתברות שהוא כחול?

11 ידוע: $P(A)=0.5$, $P(B)=0.3$, $P(A\cap B)=0.1$. חשבו את $P(A\cup B)$.

12 ידוע: $P(A\cup B)=0.8$, $P(A)=0.6$, $P(B)=0.4$. חשבו את $P(A\cap B)$.

13 A ו-B מאורעות זרים, $P(A)=0.25$, $P(B)=0.4$. חשבו את $P(A\cup B)$.

14 A ו-B בלתי תלויים, $P(A)=0.5$, $P(B)=0.2$. חשבו את $P(A\cap B)$ ואת $P(A\cup B)$.

15 A ו-B בלתי תלויים, $P(A)=0.3$ ו-$P(A\cup B)=0.58$. מצאו את $P(B)$.

16 $P(A)=0.4$, $P(B)=0.5$, $P(A\cap B)=0.2$. האם A ו-B בלתי תלויים? האם הם זרים?

17 $P(A)=0.3$, $P(B)=0.6$ ו-A, B זרים. האם הם בלתי תלויים? נמקו.

18 $P(A)=0.7$. חשבו את $P(\bar{A})$.

19 A, B בלתי תלויים, $P(A)=0.6$, $P(B)=0.5$. חשבו את ההסתברות שאף אחד מהמאורעות לא יתרחש.

20 A, B בלתי תלויים, $P(A)=0.6$, $P(B)=0.5$. חשבו את ההסתברות שיתרחש בדיוק אחד מהם.

21 ידוע ש-$P(A\cap\bar{B})=0.3$ ו-$P(A)=0.5$. חשבו את $P(A\cap B)$.

22 בכיתה 30 תלמידים: 18 לומדים פיזיקה, 12 לומדים כימיה ו-5 לומדים את שני המקצועות. בוחרים תלמיד באקראי. מה ההסתברות שהוא לומד לפחות אחד מהם?

23 בהמשך לתרגיל הקודם: מה ההסתברות שהתלמיד לומד בדיוק מקצוע אחד מהשניים?

24 בטבלה ההסתברויות לבחירת תלמיד מהשכבה:

	בנים	בנות
אוהבים ספורט	0.35	0.25
לא אוהבים ספורט	0.15	0.25

מה ההסתברות שהתלמיד שנבחר הוא בת?

25 לפי הטבלה בתרגיל הקודם: מה ההסתברות שהתלמיד אוהב ספורט?

26 לפי הטבלה: מה ההסתברות שהתלמיד הוא בן **או** אוהב ספורט?

27 לפי הטבלה: האם המאורעות "בן" ו-"אוהב ספורט" בלתי תלויים?

28 בטבלה דו-ממדית ידוע: $P(A)=0.4$, $P(B)=0.7$, $P(A\cap B)=0.25$. השלימו ומצאו את $P(\bar{A}\cap\bar{B})$.

29 ב-60% מהבתים יש מזגן, ב-30% יש מייבש כביסה, וב-20% יש את שניהם. מה ההסתברות שבבית שנבחר אין אף אחד מהמכשירים?

30 בהמשך לתרגיל הקודם: מה ההסתברות שבבית שנבחר יש מזגן אך אין מייבש?

31 $P(A)=p$, $P(B)=2p$, A ו-B זרים ו-$P(A\cup B)=0.6$. מצאו את p.

32 A , B בלתי תלויים ו-$P(A)=P(B)=p$. ידוע ש-$P(A\cap B)=0.16$. מצאו את $P(A\cup B)$.

33 A ו-B בלתי תלויים. הוכיחו ש-$\bar{A}$ ו-B בלתי תלויים, ובדקו עם $P(A)=0.3$, $P(B)=0.5$.

34 שולפים קלף מחפיסה של 52 קלפים. מה ההסתברות לקבל לב **או** מלך?

35 מספר בין 1 ל-20 נבחר באקראי. מה ההסתברות שהוא מתחלק ב-3 או ב-5?

✔ תשובות סופיות – נושא 10.1

1	$\frac{1}{2}=0.5$
2	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{2}{3}$
4	$\frac{5}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$
7	$\frac{1}{6}$
8	$\frac{3}{4}=0.75$
9	$\frac{3}{8}=0.375$
10	$\frac{3}{8}=0.375$
11	$\frac{7}{10}=0.7$
12	$\frac{1}{5}=0.2$
13	$\frac{13}{20}=0.65$
14	$P(A\cup B)=0.6\ ;\ P(A\cap B)=0.1$
15	$\frac{2}{5}=0.4$
16	בלתי תלויים ($0.4\cdot 0.5=0.2$) ; לא זרים
17	לא – $P(A\cap B)=0\neq 0.18$
18	$\frac{3}{10}=0.3$
19	$\frac{1}{5}=0.2$
20	$\frac{1}{2}=0.5$
21	$\frac{1}{5}=0.2$
22	$\frac{5}{6}$
23	$\frac{2}{3}$

24 $\frac{1}{2} = 0.5$

25 $\frac{3}{5} = 0.6$

26 $\frac{3}{4} = 0.75$

27 לא - $0.5 \cdot 0.6 = 0.3 \neq 0.35$

28 $\frac{3}{20} = 0.15$

29 $\frac{3}{10} = 0.3$

30 $\frac{2}{5} = 0.4$

31 $\frac{1}{5} = 0.2$

32 $\frac{16}{25} = 0.64$

33 $P(\bar{A} \cap B) = 0.35 = 0.7 \cdot 0.5$

34 $\frac{4}{13}$

35 $\frac{9}{20} = 0.45$

10.2 עץ הסתברות והסתברות מותנית

בעץ: כופלים לאורך ענף ומחברים בין ענפים. הסתברות מותנית: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. "ידוע ש..." – סימן להסתברות מותנית. בלי החזרה – ההסתברויות בשלב השני משתנות.

צפו לפני שמתחילים:



הסתברות עם תרשים עץ – המבנה הנכון
YouTube · 2:55



הסתברות מותנית – הסבר ברור לבגרות
YouTube · 3:31



הסתברות "לפחות" – איך לפתור בקלות
YouTube · 4:34

1. בכד 4 כדורים אדומים ו-6 לבנים. מוציאים שני כדורים **עם החזרה**. מה ההסתברות ששניהם אדומים?

2. אותו כד: מוציאים שני כדורים **בלי החזרה**. מה ההסתברות ששניהם אדומים?

3. אותו כד, בלי החזרה: מה ההסתברות שהכדורים בצבעים שונים?

4. אותו כד, בלי החזרה: מה ההסתברות שלפחות אחד מהכדורים לבן?

5. אותו כד, בלי החזרה: ידוע שהכדור השני אדום. מה ההסתברות שגם הראשון אדום?

6. ההסתברות שיירד גשם מחר היא 0.3. אם יורד גשם – ההסתברות שדן יאחר היא 0.6, ואם לא – 0.1. מה ההסתברות שדן יאחר?

7. בהמשך: ידוע שדן איחר. מה ההסתברות שירד גשם?

8. בהמשך: מה ההסתברות שירד גשם ודן לא איחר?

9 40% מהמוצרים מיוצרים במכונה א' ו-60% במכונה ב'. אחוז הפגומים: 5% במכונה א', 2% במכונה ב'. מה ההסתברות שמוצר שנבחר פגום?

10 בהמשך: מוצר שנבחר פגום. מה ההסתברות שיוצר במכונה א'?

11 קלע פוגע במטרה בהסתברות 0.8 בכל ירייה, באופן בלתי תלוי. הוא יורה פעמיים. מה ההסתברות שיפגע לפחות פעם אחת?

12 בכיתה 25 תלמידים, מתוכם 10 בנים. בוחרים באקראי שני תלמידים לוועד (בלי החזרה). מה ההסתברות ששניהם בנות?

13 ידוע: $P(A)=0.5$, $P(B|A)=0.4$. חשבו את $P(A\cap B)$.

14 ידוע: $P(A\cap B)=0.12$, $P(B)=0.3$. חשבו את $P(A|B)$.

15 ידוע: $P(A)=0.6$, $P(B)=0.5$, $P(A\cup B)=0.8$. חשבו את $P(A|B)$ ואת $P(B|A)$.

16 A ו-B בלתי תלויים, $P(A)=0.3$. חשבו את $P(A|B)$.

17 ידוע ש-$P(B|A)=P(B)$. מה אפשר לומר על המאורעות A ו-B?

18 ב-70% מהימים דנה נוסעת באוטובוס ובשאר ברכבת. באוטובוס היא מגיעה בזמן בהסתברות 0.8, ברכבת 0.95. מה ההסתברות שתגיע בזמן?

19 בהמשך: דנה איחרה. מה ההסתברות שנסעה ברכבת?

20 בשקית א' 3 סוכריות תות ו-2 לימון; בשקית ב' 1 תות ו-4 לימון. בוחרים שקית באקראי ומוציאים סוכרייה. מה ההסתברות שהיא תות?

21 בהמשך: הסוכרייה היא תות. מה ההסתברות שנבחרה שקית א'?

22 מעבירים כדור אחד באקראי מכד א' (3 לבנים, 1 שחור) לכד ב' (2 לבנים, 2 שחורים), ואז מוציאים כדור מכד ב'. מה ההסתברות שהוא לבן?

23 בהמשך: הכדור שהוצא מכד ב' לבן. מה ההסתברות שהועבר כדור שחור?

24 ההסתברות שמכונה תתקלקל ביום מסוים היא 0.1. אם התקלקלה – היא מתוקנת באותו יום בהסתברות 0.7. מה ההסתברות שבסוף היום המכונה מקולקלת?

25 בבדיקה רפואית: 2% מהאוכלוסייה נשאים. הבדיקה מזהה נשא בהסתברות 0.9, ונותנת תוצאה חיובית שגויה ללא-נשא בהסתברות 0.05. מה ההסתברות לתוצאה חיובית?

26 בהמשך: התוצאה חיובית. מה ההסתברות שהנבדק נשא?

27 $P(A)=0.4$, $P(B|A)=0.5$, $P(B|\bar{A})=0.25$. חשבו את $P(B)$.

28 בהמשך: חשבו את $P(A|B)$.

29 בהמשך: האם A ו-B בלתי תלויים?

30 $P(B|A)=0.3$ ו-$P(A|B)=0.6$, $P(A\cap B)=0.12$. מצאו את $P(A)$ ואת $P(B)$.

31 בכד n כדורים, מתוכם 2 אדומים. מוציאים 2 בלי החזרה, וההסתברות ששניהם אדומים היא $\frac{1}{15}$. מצאו את n.

32 בכד 3 אדומים ו-k כחולים. מוציאים שניים עם החזרה, וההסתברות ששניהם אדומים היא $\frac{1}{4}$. מצאו את k.

33 40% מהתלמידים בנים. 30% מהבנים ו-50% מהבנות משחקים כדורעף. בוחרים כדורעפן באקראי. מה ההסתברות שהוא בן?

34 בבית ספר 60% מהתלמידים עברו את מבחן הנהיגה בפעם הראשונה. מבין אלה שנכשלו, 75% עברו בפעם השנייה. מה ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי עבר עד הפעם השנייה (כולל)?

35 בהמשך לתרגיל הקודם: ידוע שהתלמיד עבר עד הפעם השנייה. מה ההסתברות שעבר כבר בפעם הראשונה?

✔ תשובות סופיות – נושא 10.2

1	$\frac{4}{25}=0.16$
2	$\frac{2}{15}$
3	$\frac{8}{15}$
4	$\frac{13}{15}$
5	$\frac{1}{3}$
6	$\frac{1}{4}=0.25$
7	$\frac{18}{25}=0.72$
8	$\frac{3}{25}=0.12$
9	$\frac{4}{125}=0.032$
10	$\frac{5}{8}=0.625$
11	$\frac{24}{25}=0.96$
12	$\frac{7}{20}=0.35$
13	$\frac{1}{5}=0.2$
14	$\frac{2}{5}=0.4$
15	$P(B\|A)=\frac{1}{2}\ ;\ P(A\|B)=0.6$
16	$\frac{3}{10}=0.3$
17	הם בלתי תלויים
18	$\frac{169}{200}=0.845$
19	$\frac{3}{31}$
20	$\frac{2}{5}=0.4$
21	$\frac{3}{4}=0.75$
22	$\frac{11}{20}=0.55$
23	$\frac{2}{11}$

24 $\frac{3}{100} = 0.03$

25 $\frac{67}{1000} = 0.067$

26 $\frac{18}{67}$

27 $\frac{7}{20} = 0.35$

28 $\frac{4}{7}$

29 לא - $P(B|A) \neq P(B)$

30 $P(A) = 0.4 \ ; \ P(B) = 0.2$

31 $n = 6$

32 $k = 3$

33 $\frac{2}{7}$

34 $\frac{9}{10} = 0.9$

35 $\frac{2}{3}$

פרק 10 סיכומון סוף פרק – הסתברות

הבסיס

- הסתברות = מספר התוצאות המתאימות חלקי מספר כל התוצאות (כשהן שוות סיכוי).
- משלים: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- תמיד $0 \le P(A) \le 1$.

"או" ו"וגם"

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- זרים (אין חיתוך): $P(A \cap B) = 0$.
- בלתי תלויים: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- זרים (עם הסתברויות חיוביות) הם תמיד תלויים!

טבלה דו-ממדית

- שורות ועמודות – שני מאפיינים; בתאים – הסתברויות החיתוך.
- סכום שורה/עמודה – ההסתברות של המאפיין לבד.
- סכום כל התאים 1 – משלימים תאים חסרים.

עץ הסתברות

- לאורך ענף – כופלים.
- בין ענפים שונים שמובילים לאותה תוצאה – מחברים.
- בלי החזרה – בשלב השני משתנים גם המונה וגם המכנה.

הסתברות מותנית

- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
- \"ידוע ש..."\ – זה התנאי, והוא במכנה.
- בעץ: ההסתברות על ענף שני היא הסתברות מותנית.
- בלתי תלויים: $P(A|B) = P(A)$.

"לפחות אחד"

- לפחות אחד = 1 פחות ההסתברות לאף אחד – כמעט תמיד הדרך הקצרה.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לחבר הסתברויות של מאורעות שאינם זרים בלי להחסיר את החיתוך.
- בבלי החזרה – לשכוח להקטין את מספר הכדורים בשלב השני.
- בהסתברות מותנית – לשים במכנה את המאורע הלא נכון.
- לבלבל בין "זרים" לבין "בלתי תלויים".

💡 **הטיפ של אילון:** תמיד תשאלו: האם הסדר חשוב? האם יש החזרה? האם יש "ידוע ש"? שלוש שאלות – ואתם כבר יודעים אם זה טבלה, עץ או מותנית.

פרק 11

טריגונומטריה

משולש ישר זווית, מרובעים, משפט הסינוסים ושטח משולש

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

11.1 סינוס, קוסינוס וטנגנס במשולש ישר זווית ובמרובעים — 36 תרגילים

11.2 משפט הסינוסים ושטח משולש בעזרת טריגונומטריה — 32 תרגילים

סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



תרגול טריגונומטריה במשולש ישר זווית

YouTube · 7:39



מה צריך לדעת לטריגונומטריה במישור

YouTube · 3:52



משפט הסינוסים – הסבר מלא

YouTube · 13:12



כל משפטי השטחים בטריגונומטריה

YouTube · 3:20

המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף



מעגל היחידה

גררו את הנקודה על המעגל וראו בזמן אמת את $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ו-$\tan\alpha$ של הזווית.

11.1 סינוס, קוסינוס וטנגנס במשולש ישר זווית ובמרובעים

במשולש ישר זווית: $\sin\alpha$ = הניצב שמול הזווית חלקי היתר, $\cos\alpha$ = הניצב שליד הזווית חלקי היתר, $\tan\alpha$ = הניצב שמול חלקי הניצב שליד. במרובעים – מורידים גובה או אלכסון ומחפשים משולש ישר זווית. תשובות מקורבות – עד שתי ספרות אחרי הנקודה.

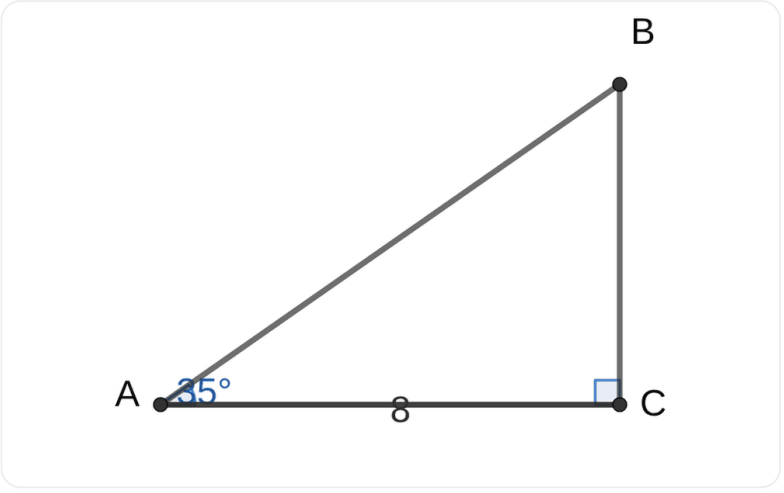
צפו לפני שמתחילים:

תרגול טריגונומטריה במשולש ישר זווית
YouTube · 7:39

סינוס קוסינוס טנגנס – ושיטה לזכור
YouTube · 10:16

מה צריך לדעת לטריגונומטריה במישור
YouTube · 3:52

1 במשולש ABC ישר הזווית ($\angle C = 90^\circ$), $AC = 8$ ו-$\angle A = 35^\circ$. מצאו את BC ואת AB.



2 במשולש ישר זווית ($\angle C = 90^\circ$), $BC = 5$ ו-$AB = 13$. מצאו את $\angle A$ ואת $\angle B$.

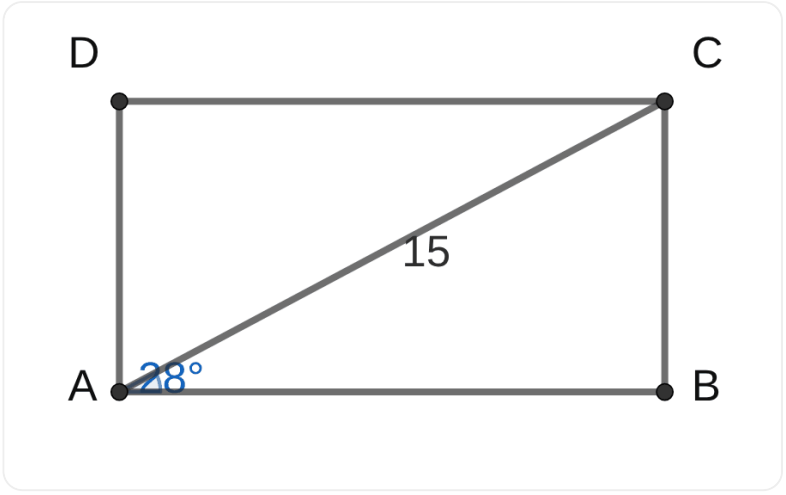
3 ניצבי משולש ישר זווית הם 7 ו-24. מצאו את היתר ואת הזוויות החדות.

4 יתר משולש ישר זווית הוא 20, ואחת הזוויות החדות 40°. מצאו את הניצבים.

5 במשולש שווה שוקיים $AB = AC = 10$ וזווית הבסיס $50°$. מצאו את הגובה לבסיס ואת אורך הבסיס.

6 במשולש שווה שוקיים הבסיס 12 וזווית הראש $80°$. מצאו את אורך השוק ואת הגובה לבסיס.

7 אלכסון מלבן הוא 15, והזווית בין האלכסון לצלע הארוכה $28°$. מצאו את צלעות המלבן ואת שטחו.

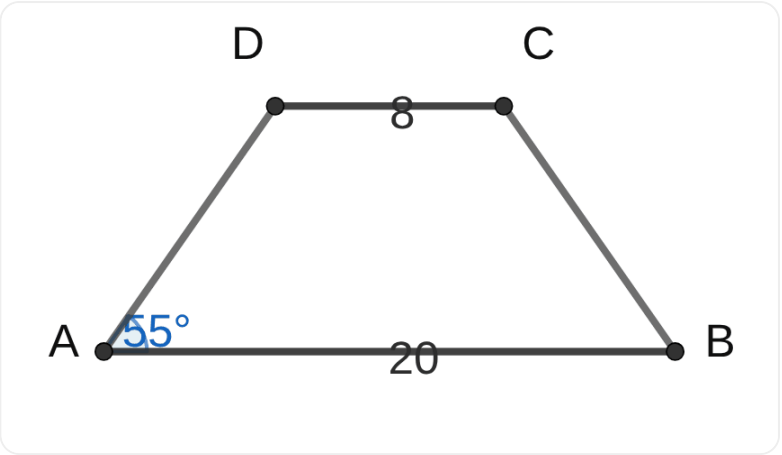


8 צלעות מלבן הן 6 ו-10. מצאו את הזווית החדה בין האלכסונים.

9 צלע מעוין 8 וזווית חדה שלו $70°$. מצאו את אורכי האלכסונים.

10 אלכסוני מעוין הם 10 ו-24. מצאו את זויות המעוין.

11 בסיסי טרפז שווה שוקיים הם 20 ו-8, וזווית הבסיס $55°$. מצאו את הגובה, את השוק ואת השטח.



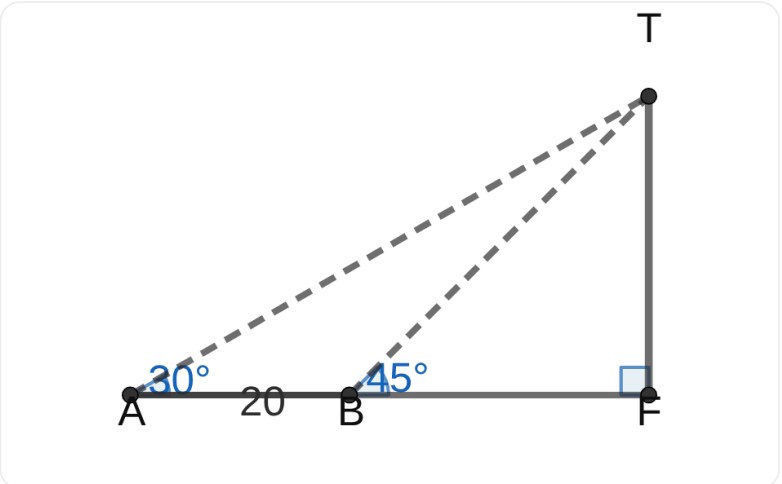
12 בטרפז ישר זווית $ABCD$ ($\angle A=\angle D=90°$): $AB=14$, $CD=8$, $AD=6$. מצאו את $\angle B$ ואת השוק BC.

13 בדלתון $ABCD$: $AB=AD=5$, $CB=CD=9$ ו-$\angle BAD=100°$. מצאו את האלכסון BD ואת $\angle BCD$.

14 סולם שאורכו 6 מ' נשען על קיר ויוצר זווית של $65°$ עם הרצפה. לאיזה גובה מגיע הסולם, ומה המרחק של בסיסו מהקיר?

15 ממרחק 30 מ' מבסיס בניין רואים את ראש הבניין בזווית הגבהה של $40°$. מה גובה הבניין?

16 שני צופים עומדים באותו צד של מגדל, במרחק 20 מ' זה מזה. זוויות ההגבהה לראש המגדל הן $30°$ ו-$45°$. מצאו את גובה המגדל.



17 במקבילית שצלעותיה 8 ו-12 והזווית ביניהן $60°$, מצאו את הגובה לצלע 12 ואת שטח המקבילית.

18 מחומש משוכלל שצלעו 10. מצאו את המרחק מהמרכז לצלע (אפותמה) ואת שטח המחומש.

19 במשולש ישר זווית ($\angle C = 90°$), $\angle A = 30°$ והגובה ליתר $CD = 6$. מצאו את AC, BC ו-AB.

20 במשולש ABC, AD גובה לצלע BC, $\angle B = 40°$, $\angle C = 65°$ ו-$AD = 8$. מצאו את BC.

21 במשולש ישר זווית, היתר 15 ו-$\sin\alpha = 0.6$ (α זווית חדה). מצאו את הניצבים בלי מחשבון.

22 α זווית חדה ו-$\tan\alpha = \frac{3}{4}$. מצאו את $\sin\alpha$ ואת $\cos\alpha$ בלי מחשבון.

23 בעזרת משולש ישר זווית שווה שוקיים בניצב 1 מצאו את $\sin 45°$, $\cos 45°$ ו-$\tan 45°$.

24 בעזרת משולש שווה צלעות שצלעו 2 מצאו את $\sin 60°$, $\cos 60°$, $\tan 30°$.

25 עמוד שגובהו 5 מ' מטיל צל באורך 8 מ'. באיזו זווית פוגעות קרני השמש בקרקע?

26 רמפה באורך 12 מ' עולה לגובה 1.5 מ'. מה זווית השיפוע של הרמפה?

27 במלבן $ABCD$: $AB = 10$, $AD = 6$. הנקודה E על DC כך ש-$\angle DAE = 30°$. מצאו את DE, EC ואת $\angle EBC$.

28 במעוין, האלכסון הקצר שווה לצלע. מצאו את זוויות המעוין.

29 במעגל שרדיוסו 10 הזווית המרכזית $\angle AOB = 70°$. מצאו את אורך המיתר AB ואת מרחקו מהמרכז.

30 משושה משוכלל שצלעו 6. מצאו את המרחק ממרכזו לכל צלע.

31 מלבן שצלעותיו 5 ו-12. מצאו את הזווית בין האלכסון לצלע הארוכה ואת אורך האלכסון.

32 במשולש ישר זווית התיכון ליתר הוא 10, ואחת הזוויות החדות 25°. מצאו את הניצבים.

33 במשולש שווה שוקיים השוקיים 13 והבסיס 10. מצאו את זויות המשולש.

34 מטוס ממריא בזווית קבועה של 12°. איזה גובה ישיג אחרי שעבר 5 ק"מ באוויר (לאורך מסלולו)?

35 במשולש ישר זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$): $AB = 10$ ו-$\angle B = 53^\circ$. מצאו את היקף המשולש.

36 מצלמה תלויה על עמוד בגובה 4 מ' ומכוונת לנקודה על הקרקע בזווית של 25° מתחת לקו האופק. מה המרחק מבסיס העמוד לנקודה?

✔ תשובות סופיות – נושא 11.1

1. $AB \approx 9.77$; $BC \approx 5.60$
2. $\angle A \approx 22.62°$; $\angle B \approx 67.38°$
3. יתר 25 ; $16.26°$ ו- $73.74°$
4. 12.86 (מול $40°$) ו- 15.32
5. גובה ≈ 7.66 ; בסיס ≈ 12.86
6. שוק ≈ 9.33 ; גובה ≈ 7.15
7. 13.24 ו- 7.04 ; שטח ≈ 93.27
8. $\approx 61.93°$
9. 9.18 ו- 13.11
10. $45.24°$ ו- $134.76°$
11. גובה ≈ 8.57 ; שוק ≈ 10.46 ; שטח ≈ 119.96
12. $\angle B = 45°$; $BC = 6\sqrt{2} \approx 8.49$
13. $BD \approx 7.66$; $\angle BCD \approx 50.37°$
14. גובה ≈ 5.44 מ' ; מרחק ≈ 2.54 מ'
15. ≈ 25.17 מ'
16. $10(\sqrt{3}+1) \approx 27.32$ מ'
17. גובה $4\sqrt{3} \approx 6.93$; שטח $48\sqrt{3} \approx 83.14$
18. ≈ 6.88 ; שטח ≈ 172.05
19. $AC = 12$; $BC = 4\sqrt{3} \approx 6.93$; $AB = 8\sqrt{3} \approx 13.86$
20. $BD \approx 9.53$, $DC \approx 3.73$; $BC \approx 13.26$
21. 9 (מול α) ו- 12
22. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{4}{5}$
23. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1

24	$\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$
25	$\approx 32.01^\circ$
26	$\approx 7.18^\circ$
27	$DE = 2\sqrt{3} \approx 3.46$; $EC \approx 6.54$; $\angle EBC \approx 47.45^\circ$
28	60° ו- 120°
29	$AB \approx 11.47$; ≈ 8.19
30	$3\sqrt{3} \approx 5.2$
31	$\approx 22.62^\circ$; 13
32	8.45 ו- 18.13
33	זווית הבסיס $\approx 67.38^\circ$; זווית הראש $\approx 45.24^\circ$
34	≈ 1.04 ק"מ
35	≈ 24
36	≈ 8.58 מ'

11.2 משפט הסינוסים ושטח משולש בעזרת טריגונומטריה

משפט הסינוסים: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ (R – רדיוס המעגל החוסם). שטח משולש: $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ – שתי צלעות והזווית **שביניהן**. משתמשים במשפט הסינוסים כשידועות צלע והזווית שמולה.

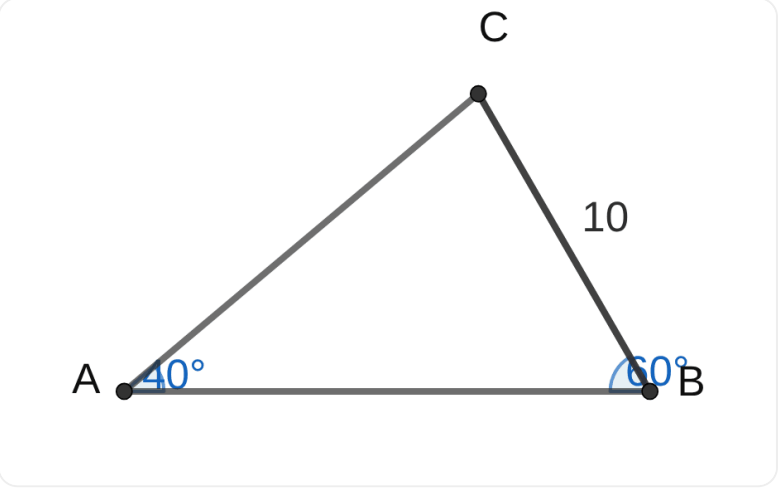
צפו לפני שמתחילים:

משפט הסינוסים – הסבר מלא ופתרון תרגילים
YouTube · 13:12

כל משפטי השטחים בטריגונומטריה
YouTube · 3:20

מה צריך לדעת לטריגונומטריה במישור
YouTube · 3:52

1 במשולש ABC: $\angle A=40^\circ$, $\angle B=60^\circ$ ו-$a=BC=10$. מצאו את b ואת c.



2 מצאו את שטח המשולש שבו שתי צלעות 6 ו-8 והזווית ביניהן 30°.

3 במשולש ABC: $a=10$ ו-$\angle A=30^\circ$. מצאו את רדיוס המעגל החוסם את המשולש.

4 במשולש ABC: $a=3$, $b=8$, $\angle A=30^\circ$. הראו שאין משולש כזה.

5 שטח משולש 30, ושתיים מצלעותיו 10 ו-12. מצאו את הזווית שביניהן (שתי אפשרויות).

6 במשולש ABC רדיוס המעגל החוסם 5 ו-$\angle B=50^\circ$. מצאו את b.

7 במשולש ABC: $\angle A=45^\circ$, $\angle B=75^\circ$ ו-$c=10$. מצאו את a ואת b.

8 אלכסוני מרובע הם 10 ו-14 והזווית ביניהם 40°. מצאו את שטח המרובע.

9 מתומן משוכלל חסום במעגל שרדיוסו 4. מצאו את שטח המתומן.

10 שטח משולש 24, $b=8$ ו-$\angle A=30^\circ$. מצאו את c.

11 זוויות משולש מתייחסות כ-$3:2:1$, והצלע הארוכה 10. מצאו את שאר הצלעות.

12 במשולש ABC: $a=12$, $\angle B=35^\circ$, $\angle C=105^\circ$. מצאו את b, c ואת רדיוס המעגל החוסם.

13 זוויות משולש 50°, 60°, 70°, והצלע הארוכה 10. מצאו את הצלע הקצרה.

14 משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו 6, ו-$a=6$. מצאו את $\angle A$ (שתי אפשרויות).

15 במעגל שרדיוסו 8, זווית מרכזית 50°. מצאו את שטח המשולש שקודקודיו המרכז וקצות הקשת.

16 שני צופים A ו-B נמצאים במרחק 40 מ' זה מזה, באותו צד של עמוד. זוויות ההגבהה לראש העמוד הן 30° (מ-A, הרחוק) ו-50° (מ-B). מצאו את גובה העמוד.

17 במשולש ABC: $\angle A=30^\circ$, $\angle B=45^\circ$, $c=10$. מצאו את שטח המשולש.

18 במשולש ABC: $\angle A=45^\circ$, $\angle B=70^\circ$ ו-$BC=8$. מצאו את $\angle C$ ואת הצלעות AC ו-AB.

19 במשולש ABC: $BC=12$, $AC=9$ ו-$\angle A=40^\circ$. מצאו את $\angle B$ ואת $\angle C$.

20 במשולש שווה צלעות שצלעו 6, מצאו את שטח המשולש בעזרת הנוסחה $S=\frac{1}{2}ab\sin C$.

21 שטח משולש הוא 20, שתי צלעותיו 8 ו-10, והזווית ביניהן חדה. מצאו את הזווית.

22 שתי צלעות במשולש הן 7 ו-9 והזווית ביניהן 110°. מצאו את שטח המשולש.

23 שטח מקבילית שצלעותיה 6 ו-10 הוא 30. מצאו את הזווית החדה של המקבילית.

24 במשולש ABC: $AB=10$ ו-$\angle C=50^\circ$. מצאו את רדיוס המעגל החוסם את המשולש.

25 במשולש ABC ידוע ש-$\angle A=30^\circ$ ו-$\angle B=60^\circ$. מצאו את היחס $AC:BC$.

26 במשולש ABC, D נקודה על BC. נתון: $AB=10$, $\angle B=40^\circ$, $\angle BAD=35^\circ$. מצאו את AD ואת BD.

27 שני מגדלי תצפית A ו-B נמצאים במרחק 12 ק"מ זה מזה. משניהם רואים שריפה בנקודה C: $\angle CAB=35^\circ$ ו-$\angle CBA=65^\circ$. מה המרחק מהמגדל A לשריפה?

28 בהמשך לתרגיל הקודם: מה המרחק מהשריפה לקו המחבר את שני המגדלים?

29 במשולש ABC: $\angle A=120^\circ$, $AB=AC=6$. מצאו את שטח המשולש ואת BC (בעזרת משפט הסינוסים).

30 מרובע $ABCD$ מחולק על ידי האלכסון AC לשני משולשים. במשולש ABC: $AB=8$, $BC=6$, $\angle B=60^\circ$. במשולש ACD: $AD=5$, $DC=7$, $\angle D=100^\circ$. מצאו את שטח המרובע.

31 משולש חסום במעגל שרדיוסו 5. אחת מזוויותיו 30°. מהי הצלע שמול זווית זו?

32 במשולש ABC: $AC=15$, $\angle B=90^\circ$ ו-$\angle C=40^\circ$. מצאו את AB פעם בעזרת משפט הסינוסים ופעם בעזרת סינוס במשולש ישר זווית. מה אתם מגלים?

✔ תשובות סופיות – נושא 11.2

1	$c \approx 15.32$; $b \approx 13.47$
2	12
3	$R = 10$
4	$\sin B = \frac{4}{3} > 1$ – אין פתרון
5	$30°$ או $150°$
6	$b \approx 7.66$
7	$b \approx 11.15$; $a \approx 8.16$
8	≈ 45
9	$32\sqrt{2} \approx 45.25$
10	$c = 12$
11	5 ו- $5\sqrt{3} \approx 8.66$
12	$R \approx 9.33$; $c \approx 18.03$; $b \approx 10.71$
13	≈ 8.15
14	$30°$ או $150°$
15	≈ 24.51
16	≈ 44.80 מ'
17	≈ 18.30
18	$AB \approx 10.25$; $AC \approx 10.63$; $\angle C = 65°$
19	$\angle C \approx 111.18°$; $\angle B \approx 28.82°$
20	$9\sqrt{3} \approx 15.59$
21	$30°$
22	≈ 29.60
23	$30°$

24	$R \approx 6.53$
25	$1 : \sqrt{3}$
26	$AD \approx 6.65$; $BD \approx 5.94$
27	$AC \approx 11.04$ ס"מ
28	≈ 6.33 ס"מ
29	שטח $9\sqrt{3} \approx 15.59$; $BC = 6\sqrt{3} \approx 10.39$
30	≈ 38.02
31	5
32	$AB \approx 9.64$ בשתי הדרכים

פרק 11 סיכומון סוף פרק – טריגונומטריה

משולש ישר זווית

- $\sin\alpha$ = ניצב מול חלקי יתר.
- $\cos\alpha$ = ניצב ליד חלקי יתר.
- $\tan\alpha$ = ניצב מול חלקי ניצב ליד.
- מוצאים זווית בעזרת $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ במחשבון.

ערכים מיוחדים

- $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.
- $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan 45^\circ = 1$.
- $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

מרובעים ומצולעים

- מורידים גובה או אלכסון – ומקבלים משולש ישר זווית.
- במעוין האלכסונים מאונכים וחוצים את הזוויות.
- בטרפז שווה שוקיים – שני גבהים יוצרים שני משולשים ישרי זווית חופפים.

זוויות הגבהה והנמכה

- זווית ההגבהה נמדדת מהקו האופקי כלפי מעלה.
- זווית ההנמכה – מהקו האופקי כלפי מטה, ושווה לזווית ההגבהה מהצד השני.
- שני צופים – שני משולשים עם צלע משותפת (הגובה).

משפט הסינוסים

- $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.
- מתאים כשידועות צלע והזווית שמולה.
- אם יוצא $\sin B > 1$ – אין משולש כזה.
- R – רדיוס המעגל החוסם את המשולש.

שטח משולש

- $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ – שתי צלעות והזווית שביניהן.
- שטח מקבילית: $ab\sin\alpha$.
- מרובע – מחלקים לשני משולשים בעזרת אלכסון.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- מחשבון במצב רדיאנים במקום מעלות.
- בשטח – להשתמש בזווית שאינה בין שתי הצלעות.
- במשפט הסינוסים – להתאים צלע לזווית שלא מולה.
- לעגל באמצע החישוב – עגלו רק בסוף.

💡 **הטיפ של אילון:** לפני כל חישוב – סמנו על השרטוט מה ידוע ומה מחפשים. אם יש צלע והזווית שמולה – משפט הסינוסים; אם יש זווית ישרה – סינוס/קוסינוס/טנגנס.

פרק 12

גיאומטריה אנליטית – הישר

שיפוע, ישרים מקבילים ומאונכים, אמצע קטע, אורך קטע וצורות במערכת צירים

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

12.1 שיפוע, ישרים מקבילים ומאונכים, אמצע קטע, אורך קטע וצורות

42 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



אנליטית 4 יחידות – הכול!
YouTube · 38:03



אנליטית בקלות – טכניקות וסדרי פעולה
YouTube · 12:55



אנליטית – קו ישר, טרפז וקטע אמצעים בטרפז
YouTube · 17:04



שיפוע הופכי ונגדי – ישרים מאונכים
YouTube · 3:28

🎛️ המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף



מעבדת הקו הישר
שנו שיפוע ונקודת חיתוך של שני ישרים וגלו מתי הם מקבילים, מאונכים או נחתכים.

12.1 שיפוע, ישרים מקבילים ומאונכים, אמצע קטע, אורך קטע וצורות

שיפוע: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$; ישר: $y-y_1=m(x-x_1)$. ישרים מקבילים – שיפועים שווים; מאונכים – $m_1\cdot m_2=-1$. אמצע קטע: $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$; אורך קטע: $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

צפו לפני שמתחילים:

שיפוע הופכי ונגדי – ישרים מאונכים
YouTube · 3:28

נוסחת אמצע קטע – הסבר ותרגילים
YouTube · 5:44

נוסחת דיסטנס – מרחק בין שתי נקודות
YouTube · 8:28

אנליטית – קו ישר, טרפז וקטע אמצעים
YouTube · 17:04

1. מצאו את שיפוע הישר העובר בנקודות $A(2,3)$ ו-$B(6,11)$.
2. מצאו את שיפוע הישר העובר בנקודות $A(-1,4)$ ו-$B(3,-4)$. האם הישר עולה או יורד?
3. מצאו את משוואת הישר שעובר בנקודה $(1,2)$ ושיפועו 3.
4. מצאו את משוואת הישר העובר בנקודות $A(2,5)$ ו-$B(4,9)$.
5. מצאו את משוואת הישר העובר בנקודה $(3,-2)$ ומקביל לישר $y=4x+1$.
6. מצאו את משוואת הישר העובר בנקודה $(2,1)$ ומאונך לישר $y=2x+3$.
7. האם הישרים $y=3x+2$ ו-$y=-\frac{1}{3}x+5$ מאונכים זה לזה? נמקו.
8. מצאו את k שעבורו הישר $y=kx+1$ מקביל לישר העובר בנקודות $(0,0)$ ו-$(2,6)$.

9 מצאו את k שעבורו הישר $y=(k-1)x+2$ מאונך לישר $y=\frac{1}{2}x$.

10 מצאו את אמצע הקטע AB, אם $A(2,8)$ ו-$B(6,-2)$.

11 הנקודה $M(3,1)$ היא אמצע הקטע AB, ו-$A(1,5)$. מצאו את הנקודה B.

12 מצאו את המרחק בין הנקודות $A(1,2)$ ו-$B(4,6)$.

13 מצאו את אורך הקטע AB, אם $A(-2,3)$ ו-$B(4,-5)$.

14 מצאו נקודה על ציר x שנמצאת במרחקים שווים מהנקודות $A(1,3)$ ו-$B(5,1)$.

15 מצאו נקודה על ציר y שנמצאת במרחקים שווים מהנקודות $A(2,1)$ ו-$B(4,3)$.

16 מצאו את משוואת האנך האמצעי לקטע AB, כאשר $A(1,1)$ ו-$B(5,5)$.

17 מצאו את נקודת החיתוך של הישרים $y=2x-1$ ו-$y=-x+5$.

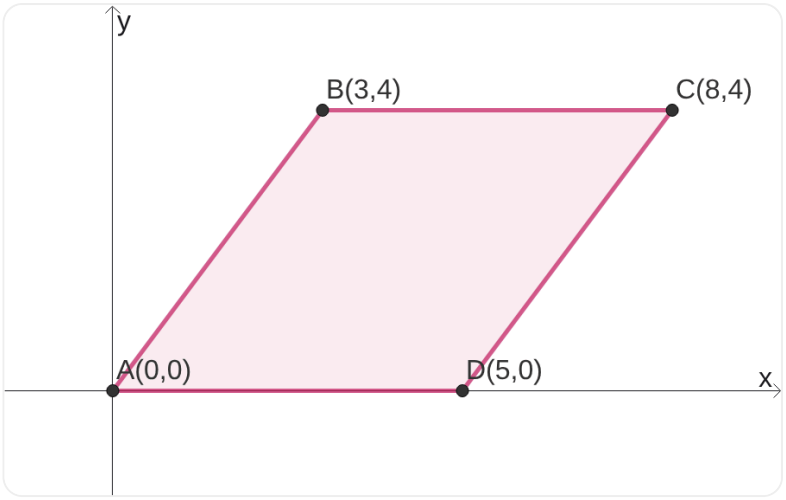
18 מצאו את שטח המשולש שקודקודיו $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(2,4)$.

19 נתון משולש שקודקודיו $A(1,1)$, $B(4,2)$, $C(0,4)$. הראו שהמשולש ישר זווית, וקבעו באיזה קודקוד הזווית הישרה.

20 נתון משולש $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(2,5)$. הראו שהמשולש שווה שוקיים ומצאו את הגובה לבסיס AB.

21 שלושה קודקודים של המקבילית $ABCD$ הם $A(1,1)$, $B(5,2)$, $C(6,5)$. מצאו את הקודקוד D.

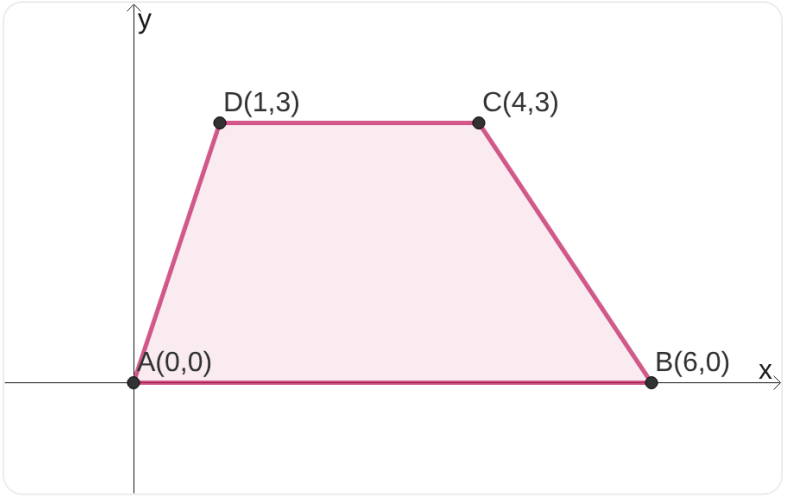
22 הראו שהמרובע $ABCD$ שקודקודיו $A(0,0)$, $B(3,4)$, $C(8,4)$, $D(5,0)$ הוא מעוין, והראו שאלכסוניו מאונכים.



23 הראו שהמרובע $A(0,0)$, $B(4,2)$, $C(3,4)$, $D(-1,2)$ הוא מלבן, ומצאו את שטחו.

24 הראו שהמרובע $A(1,0)$, $B(4,1)$, $C(3,4)$, $D(0,3)$ הוא ריבוע, ומצאו את שטחו.

25 הראו שהמרובע $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(4,3)$, $D(1,3)$ הוא טרפז. מצאו את אורך קטע האמצעים שלו ואת שטחו.



26 במשולש $A(2,6)$, $B(0,0)$, $C(8,2)$ הנקודות D ו-E הן אמצעי AB ו-AC. מצאו את D ואת E, והראו ש-$DE \parallel BC$ ו-$DE = \frac{1}{2}BC$.

27 במשולש $A(0,0)$, $B(6,3)$, $C(1,4)$ מצאו את משוואת הגובה מהקודקוד C לצלע AB.

28 במשולש $A(2,4)$, $B(0,0)$, $C(6,2)$ מצאו את משוואת התיכון מהקודקוד A.

29 מצאו את נקודת מפגש התיכונים במשולש $A(1,2)$, $B(5,0)$, $C(3,7)$ (ממוצע שיעורי הקודקודים).

30 הנקודה C נמצאת על הישר $y=x+1$, ומרחקיה מהנקודות $A(0,0)$ ו-$B(4,0)$ שווים. מצאו את C.

31 מצאו את a שעבורו הנקודות $(1,2)$, $(3,6)$ ו-$(a,10)$ נמצאות על ישר אחד.

32 מצאו את m שעבורו שיפוע הישר העובר בנקודות $(m,3)$ ו-$(2,7)$ הוא -2.

33 הישר $y=2x+b$ עובר דרך אמצע הקטע שבין $A(1,1)$ ל-$B(3,5)$. מצאו את b.

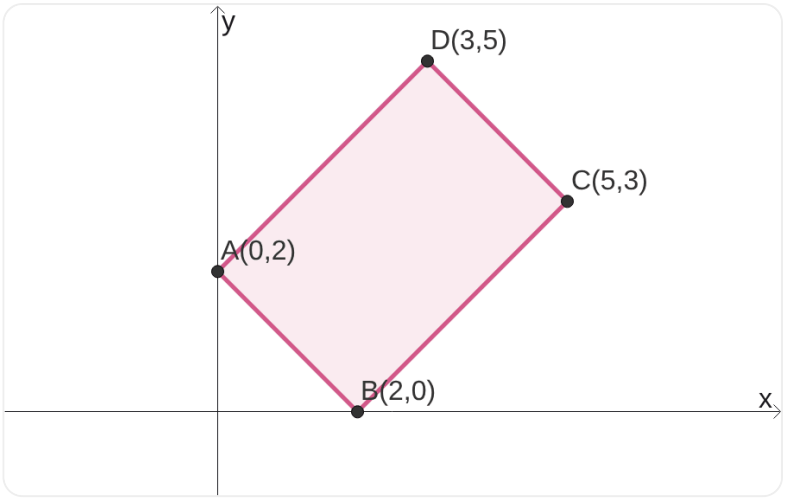
34 מצאו את נקודות החיתוך של הישר $3x+2y=12$ עם הצירים, ואת שטח המשולש שהישר יוצר עם הצירים.

35 מצאו את המרחק מראשית הצירים לנקודת החיתוך של הישרים $y=x+1$ ו-$y=-2x+7$.

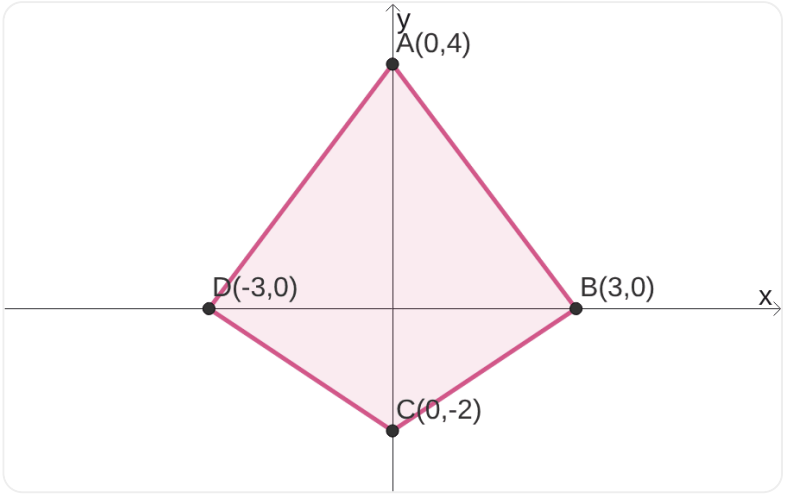
36 נתון משולש $A(-2,0)$, $B(4,0)$, $C(1,k)$ ששטחו 15. מצאו את ערכי k.

37 במקבילית $ABCD$: $A(0,0)$, $B(4,0)$, $D(1,3)$. מצאו את C ואת נקודת החיתוך של האלכסונים.

38 שלושה קודקודים של המלבן $ABCD$ הם $A(0,2)$, $B(2,0)$, $C(5,3)$. הראו ש-$AB \perp BC$, מצאו את D ואת שטח המלבן.



39 הראו שהמרובע $A(0,4)$, $B(3,0)$, $C(0,-2)$, $D(-3,0)$ הוא דלתון, ומצאו את שטחו.



40 מצאו את מרכז המעגל החוסם את המשולש ישר הזווית $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(0,8)$ ואת רדיוסו (רמז: התיכון ליתר).

41 מהנקודה $P(5,0)$ מורידים אנך לישר $y=2x$. מצאו את משוואת האנך, את נקודת החיתוך שלו עם הישר ואת המרחק מ-P לישר.

42 נתונות הנקודות $A(1,3)$ ו-$B(7,3)$. מצאו נקודה C על הישר $x=4$ כך ש-$\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

✔ תשובות סופיות – נושא 12.1

1	$m=2$
2	$m=-2$; יורד
3	$y=3x-1$
4	$y=2x+1$
5	$y=4x-14$
6	$y=2-\frac{x}{2}$
7	כן - מכפלת השיפועים $3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$
8	$k=3$
9	$k=-1$
10	$(4,3)$
11	$B(5,-3)$
12	5
13	10
14	$(2,0)$
15	$(0,5)$
16	$y=-x+6$
17	$(2,3)$
18	12
19	ישר זווית ב-A: $m_{AB}=\frac{1}{3}$, $m_{AC}=-3$
20	$AC=BC=\sqrt{29}$; גובה 5
21	$D(2,4)$
22	כל הצלעות 5 ; $m_{AC}=\frac{1}{2}$, $m_{BD}=-2$
23	מקבילית (האלכסונים חוצים זה את זה) עם $AB\perp BC$; שטח 10

24 צלע $\sqrt{10}$, צלעות סמוכות מאונכות ; שטח 10

25 $AB \parallel DC$ (שיפוע 0) ; קטע אמצעים 4.5 ; שטח 13.5

26 $D(1,3)$, $E(5,4)$; שיפוע לשניהם $\frac{1}{4}$; $DE=\sqrt{17}$, $BC=2\sqrt{17}$

27 $y=-2x+6$

28 $y=-3x+10$

29 $(3,3)$

30 $C(2,3)$

31 $a=5$

32 $m=4$

33 $b=-1$

34 $(4,0)$, $(0,6)$; שטח 12

35 נקודת החיתוך $(2,3)$; מרחק $\sqrt{13}$

36 $k=5$ או $k=-5$

37 $C(5,3)$; $(2.5,1.5)$

38 $m_{AB}=-1$, $m_{BC}=1$; $D(3,5)$; שטח 12

39 $AB=AD=5$, $CB=CD=\sqrt{13}$; שטח $\frac{6\cdot 6}{2}=18$

40 מרכז $(3,4)$ – אמצע היתר ; רדיוס 5

41 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$; $(1,2)$; $2\sqrt{5}$

42 $C(4,0)$ או $C(4,6)$

פרק 12 סיכומון סוף פרק – גיאומטריה אנליטית – הישר

שיפוע ומשוואת ישר

- $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$; $m > 0$ – ישר עולה, $m < 0$ – יורד.
- ישר דרך נקודה ושיפוע: $y - y_1 = m(x - x_1)$.
- חיתוך עם הצירים: $x = 0$ לציר y, $y = 0$ לציר x.

מקבילים ומאונכים

- מקבילים: $m_1 = m_2$.
- מאונכים: $m_1 \cdot m_2 = -1$ (שיפוע הופכי ונגדי).

אמצע קטע ואורך קטע

- אמצע: $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.
- אורך: $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.
- מפגש תיכונים: ממוצע שיעורי שלושת הקודקודים.

קווים מיוחדים במשולש

- תיכון: מהקודקוד לאמצע הצלע שמולו.
- גובה: מאונך לצלע ועובר דרך הקודקוד שמולה.
- אנך אמצעי: מאונך לקטע ועובר באמצעו – כל נקודה עליו במרחקים שווים מקצות הקטע.

הוכחת סוג מרובע

- מקבילית: האלכסונים חוצים זה את זה (אותו אמצע) או צלעות נגדיות מקבילות.
- מלבן: מקבילית + צלעות סמוכות מאונכות; מעוין: כל הצלעות שוות.
- ריבוע: גם מלבן וגם מעוין; טרפז: זוג צלעות מקבילות בלבד; דלתון: שני זוגות צלעות סמוכות שוות.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לחסר את שיעורי הנקודות בסדר שונה במונה ובמכנה של השיפוע.
- שיפוע מאונך – להפוך בלי לשנות סימן (או להפך).
- בנוסחת המרחק – לשכוח את השורש.

💡 **הטיפ של אילון:** תמיד סרטטו סקיצה מהירה של הנקודות – היא מראה מיד איזה מרובע זה, איזו צלע מקבילה לאיזו ואם התשובה הגיונית.

פרק 13

גיאומטריה אנליטית – המעגל

משוואת מעגל, מציאת מעגל, נקודות על המעגל, מעגל וישר ומשיק

סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

13.1 משוואת מעגל, מציאת מעגל, נקודות על המעגל ומעגל וישר

41 תרגילים

סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

אנליטית – מעגל: כל הבסיס לשאלון 471
YouTube · 11:23

איך מוצאים משוואת מעגל?
YouTube · 7:37

כל משפטי האנליטית במעגל
YouTube · 11:14

אנליטית במעגל – משיקים למעגל
YouTube · 9:39

13.1 משוואת מעגל, מציאת מעגל, נקודות על המעגל ומעגל וישר

משוואת מעגל שמרכזו (a,b) ורדיוסו R: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. מצורה כללית $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ משלימים לריבוע. נקודה בתוך המעגל, עליו או מחוצה לו – לפי המרחק שלה מהמרכז. חיתוך מעגל וישר: מציבים את משוואת הישר במשוואת המעגל. המשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

צפו לפני שמתחילים:



אנליטית – מעגל: כל הבסיס לשאלון 471
YouTube · 11:23



איך מוצאים משוואת מעגל?
YouTube · 7:37



אנליטית במעגל – משיקים למעגל
YouTube · 9:39

1 מצאו את מרכז המעגל ואת רדיוסו: $(x-2)^2+(y+3)^2=25$.

2 מצאו את מרכז המעגל ואת רדיוסו: $x^2+(y-4)^2=7$.

3 כתבו את משוואת המעגל שמרכזו $(1,-2)$ ורדיוסו 3.

4 כתבו את משוואת המעגל שמרכזו $(3,4)$ והעובר בראשית הצירים.

5 הקטע AB הוא קוטר במעגל, כאשר $A(-1,2)$ ו-$B(5,10)$. כתבו את משוואת המעגל.

6 השלימו לריבוע ומצאו את מרכז המעגל ואת רדיוסו: $x^2+y^2-6x+4y-12=0$.

7 מצאו את מרכז המעגל ואת רדיוסו: $x^2+y^2+8x-2y+8=0$.

8 מצאו את מרכז המעגל $x^2+y^2-10y=0$ ואת רדיוסו. הראו שהמעגל עובר בראשית הצירים.

9 האם הנקודה $(4,1)$ נמצאת על המעגל $(x-1)^2+(y+3)^2=25$?

10 קבעו אם הנקודה $(2,2)$ נמצאת בתוך המעגל $(x-5)^2+(y-6)^2=36$, עליו או מחוצה לו.

11 מצאו את a שעבורו הנקודה $(a,3)$ נמצאת על המעגל $x^2+(y+1)^2=25$.

12 מצאו את נקודות החיתוך של המעגל $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ עם ציר x.

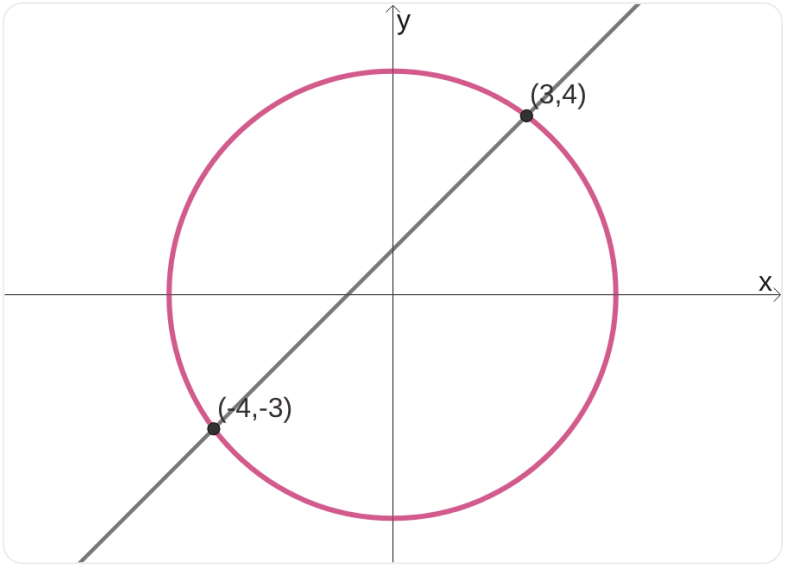
13 מצאו את נקודות החיתוך של אותו מעגל, $(x-2)^2+(y-3)^2=25$, עם ציר y.

14 כתבו את משוואת המעגל שמרכזו $(5,3)$ והמשיק לציר x.

15 כתבו את משוואת המעגל שמרכזו $(-4,2)$ והמשיק לציר y.

16 כתבו את משוואת המעגל שרדיוסו 3, מרכזו ברביע הראשון, והוא משיק לשני הצירים.

17 מצאו את נקודות החיתוך של המעגל $x^2+y^2=25$ עם הישר $y=x+1$.



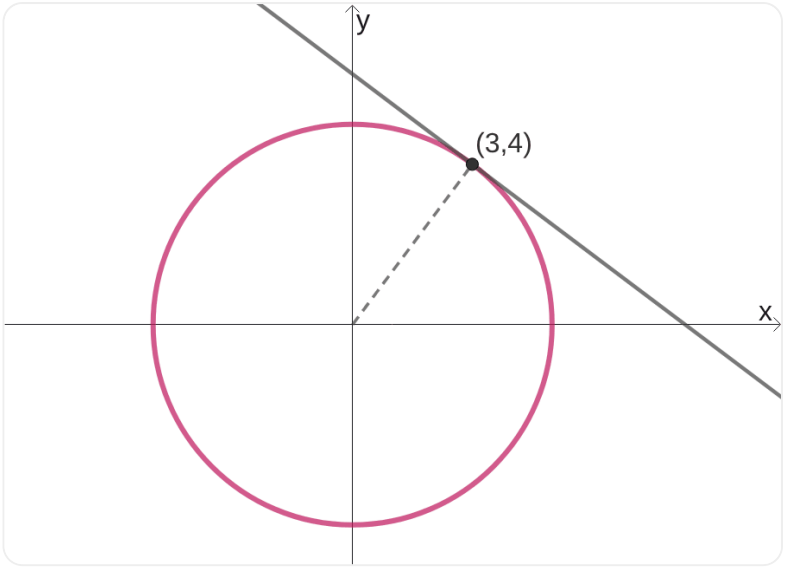
18 מצאו את נקודות החיתוך של הישר $y=7$ עם המעגל $x^2+(y-2)^2=25$. מה אפשר לומר על הישר?

19 הראו שהישר $y=2x+10$ אינו חותך את המעגל $x^2+y^2=5$ (רמז: דיסקרימיננטה).

20 הישר $y=3$ חותך את המעגל $x^2+y^2=25$ בנקודות A ו-B. מצאו את אורך המיתר AB.

21 הנקודות $A(3,4)$ ו-$B(-4,3)$ על המעגל $x^2+y^2=25$. מצאו את אמצע המיתר M והראו ש-$OM \perp AB$.

22 מצאו את משוואת המשיק למעגל $x^2+y^2=25$ בנקודה $(3,4)$ (רמז: המשיק מאונך לרדיוס).



23 מצאו את משוואת המשיק למעגל $(x-2)^2+(y+3)^2=25$ בנקודה $(5,1)$.

24 מרכז מעגל נמצא על הישר $y=x$, והמעגל עובר בנקודות $(0,2)$ ו-$(4,6)$. מצאו את משוואת המעגל.

25 מצאו את משוואת המעגל העובר בקודקודי המשולש $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(0,8)$.

26 מרכז מעגל נמצא על ציר x, והמעגל עובר בנקודות $(1,3)$ ו-$(5,1)$. מצאו את משוואת המעגל.

27 מצאו את k שעבורו המשוואה $x^2+y^2-4x+6y+k=0$ מתארת מעגל שרדיוסו 5.

28 לאילו ערכי k המשוואה $x^2+y^2-4x+6y+k=0$ מתארת מעגל?

29 נתונים המעגלים $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ ו-$(x-4)^2+(y-6)^2=9$. מצאו את המרחק בין המרכזים והשוו אותו לסכום הרדיוסים. מה אפשר להסיק?

30 לאיזה ערך של r המעגל $(x-3)^2+(y-2)^2=r^2$ עובר בנקודה $(0,-2)$?

31 הקטע AB קוטר במעגל, $A(1,1)$, $B(7,9)$. הראו שהנקודה $C(7,1)$ על המעגל, ומצאו את $\sphericalangle ACB$.

32 מצאו את הנקודות על המעגל $x^2+y^2=10$ ששיעור ה-x שלהן הוא 1.

33 מצאו את נקודות החיתוך של המעגל $x^2+y^2=25$ עם הישר $y=2x$.

34 המעגל $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ חותך את ציר x בנקודות A ו-B, ו-M מרכזו. מצאו את שטח המשולש ABM.

35 הנקודה $P(13,6)$ נמצאת מחוץ למעגל $(x-1)^2+(y-1)^2=25$. מצאו את המרחק מ-P למרכז ואת אורך המשיק מ-P למעגל.

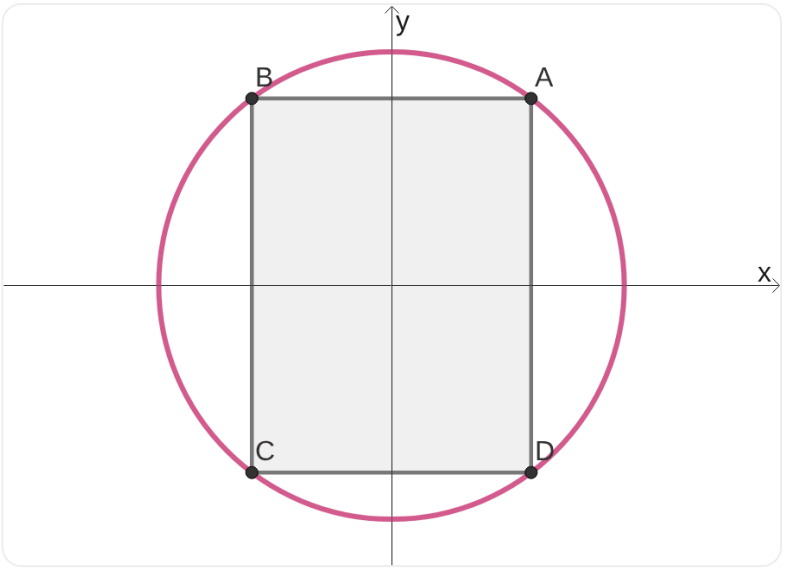
36 מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $P(9,7)$ למעגל $(x-3)^2+(y+1)^2=25$.

37 מצאו את משוואת המעגל שמרכזו $(2,-1)$ והעובר בנקודת החיתוך של הישרים $y=x$ ו-$y=-x+6$.

38 מצאו את ערכי k שעבורם הישר $y=x+k$ משיק למעגל $x^2+y^2=8$ (רמז: הישר משיק כשיש נקודת חיתוך אחת בלבד).

39 מעגל שמרכזו בראשית עובר בנקודה $(6,8)$. מצאו את נקודות החיתוך שלו עם הישר $y=6$.

40 המלבן $ABCD$ חסום במעגל $x^2+y^2=25$ (אלכסוניו קטרים), $A(3,4)$ ו-$B(-3,4)$. מצאו את C, את D ואת שטח המלבן.



41 ישר שעובר דרך מרכז המעגל $(x+1)^2+(y-2)^2=20$ ושיפועו 2 חותך את המעגל בשתי נקודות. מצאו את משוואת הישר ואת שתי הנקודות.

✔ תשובות סופיות – נושא 13.1

1. מרכז $(2,-3)$, רדיוס 5
2. מרכז $(0,4)$, רדיוס $\sqrt{7}$
3. $(x-1)^2+(y+2)^2=9$
4. $(x-3)^2+(y-4)^2=25$
5. $(x-2)^2+(y-6)^2=25$
6. $(x-3)^2+(y+2)^2=25$; מרכז $(3,-2)$, רדיוס 5
7. מרכז $(-4,1)$, רדיוס 3
8. מרכז $(0,5)$, רדיוס 5 ; $(0,0)$ מקיימת את המשוואה
9. כן: $9+16=25$
10. בתוך המעגל – המרחק מהמרכז $5<6$
11. $a=3$ או $a=-3$
12. $(-2,0)$ ו-$(6,0)$
13. $(0,3+\sqrt{21})$ ו-$(0,3-\sqrt{21})$
14. $(x-5)^2+(y-3)^2=9$
15. $(x+4)^2+(y-2)^2=16$
16. $(x-3)^2+(y-3)^2=9$
17. $(3,4)$ ו-$(-4,-3)$
18. נקודה אחת $(0,7)$ – הישר משיק למעגל
19. מתקבל $x^2+8x+19=0$, $\Delta=64-76<0$ – אין חיתוך
20. $A(-4,3)$, $B(4,3)$; $AB=8$
21. $M(-0.5,3.5)$; $m_{AB}=\frac{1}{7}$, $m_{OM}=-7$
22. $y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$
23. $y=-\frac{3}{4}x+\frac{19}{4}$

24 $(x-3)^2+(y-3)^2=10$

25 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ (מרכז באמצע היתר BC)

26 $(x-2)^2+y^2=10$

27 $k=-12$

28 $k<13$

29 מרחק $3+2=5$ – המעגלים משיקים מבחוץ

30 $r=5$

31 מרכז $(4,5)$, רדיוס 5, $9+16=25$; $\sphericalangle ACB=90^\circ$

32 $(1,3)$ ו-$(1,-3)$

33 $(\sqrt{5},2\sqrt{5})$ ו-$(-\sqrt{5},-2\sqrt{5})$

34 $A(-2,0)$, $B(6,0)$, $M(2,3)$; שטח 12

35 מרחק 13 ; משיק 12

36 $10-5=5$

37 נקודת החיתוך $(3,3)$; $(x-2)^2+(y+1)^2=17$

38 $k=4$ או $k=-4$

39 $(8,6)$; $x^2+y^2=100$ ו-$(-8,6)$

40 $C(-3,-4)$, $D(3,-4)$; שטח $6\cdot 8=48$

41 $(1,6)$; $y=2x+4$ ו-$(-3,-2)$

פרק 13 סיכומון סוף פרק – גיאומטריה אנליטית – המעגל

משוואת מעגל

- מרכז (a,b) ורדיוס R: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
- מעגל שמרכזו בראשית: $x^2+y^2=R^2$.

מצורה כללית למרכז ורדיוס

- $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ – משלימים לריבוע בנפרד ב-x וב-y.
- זה מעגל רק אם אגף ימין אחרי ההשלמה חיובי.

מציאת מעגל

- מרכז ונקודה – הרדיוס הוא המרחק ביניהם.
- קוטר AB – מרכז באמצע AB, רדיוס חצי AB.
- מרכז על ישר נתון – מסמנים מרכז עם נעלם ומשווים מרחקים לשתי נקודות.
- משיק לציר x: $R=|b|$; משיק לציר y: $R=|a|$.

נקודה ומעגל

- מציבים: שווה ל-R^2 – על המעגל; קטן – בתוכו; גדול – מחוצה לו.

מעגל וישר

- מציבים את y מהישר במשוואת המעגל ופותרים משוואה ריבועית.
- $\Delta>0$ – שתי נקודות; $\Delta=0$ – משיק; $\Delta<0$ – אין חיתוך.
- משיק בנקודה P: מאונך לרדיוס – שיפוע הופכי ונגדי לשיפוע הרדיוס.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- מרכז $(x+2)^2$ הוא $x=-2$, לא 2 – שימו לב לסימן!
- לשכוח שהמספר באגף ימין הוא R^2 ולא R.
- בהשלמה לריבוע – להוסיף מספר רק לאגף אחד.

💡 **הטיפ של אילון:** בכל שאלת מעגל – רשמו בצד "מרכז = ..., רדיוס = ...". כמעט כל סעיף נפתר מהשניים האלה.

פרק 14

קדם אנליזה

לפני שגוזרים: איך נראה פולינום, ואיך גרף זז, נמתח ומשתקף

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

14.1 התנהגות פולינום באינסוף וסביב ציר x — 33 תרגילים

14.2 הזזות ומתיחות מתוך גרף — 40 תרגילים

סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



קורס קדם אנליזה – התנהגות באינסוף

YouTube · 6:27



קדם אנליזה – התנהגות סביב ציר x

YouTube · 4:09



קדם אנליזה – בנייה של פונקציה

YouTube · 6:44



קדם אנליזה – הזזה בציר x

YouTube · 9:22

המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף



התנהגות פולינום סביב ציר x

שנו שורשים וריבויים וסימן מקדם מוביל – וראו מתי הגרף חותך, משיק או משתטח.



מעבדת הטרנספורמציות

הזיזו מחוונים וראו בזמן אמת איך $f(x)$ זזה, נמתחת ומשתקפת.

14.1 התנהגות פולינום באינסוף וסביב ציר x

מפרקים לגורמים, מוצאים את השורשים ואת הריבוי של כל אחד: ריבוי אי-זוגי – הגרף **חותך**, ריבוי זוגי – הגרף **משיק**. את הקצוות קובעים לפי המעלה וסימן המקדם המוביל.

צפו לפני שמתחילים:



קדם אנליזה – התנהגות סביב ציר x
YouTube · 4:09



קדם אנליזה – התנהגות באינסוף
YouTube · 6:27



קדם אנליזה – חוקיות פולינומים
YouTube · 8:59

1 $f(x)=(x-2)(x+1)(x-5)$. מצאו את נקודות החיתוך עם ציר x ותארו את ההתנהגות באינסוף ובמינוס אינסוף.

2 $f(x)=-(x-4)(x+2)$. מצאו את נקודות החיתוך עם ציר x. לאיזה כיוון פתוחה הפרבולה?

3 $f(x)=x(x-3)$. האם הגרף עובר בראשית? תארו את ההתנהגות בשני הקצוות.

4 $f(x)=(x+3)^2(x-1)$. באיזו נקודה הגרף משיק לציר x ובאיזו הוא חותך אותו?

5 $f(x)=-x(x-2)^2$. מה המקדם המוביל? מה הוא אומר על הקצוות? סרטטו סקיצה.

6 $f(x)=(x-1)^3$. כיצד הגרף עובר דרך $x=1$? תארו את הקצוות.

7 $f(x)=x^2(x+4)$. מה קורה לגרף בראשית הצירים? סרטטו סקיצה.

8 $f(x)=(x-2)^2(x+2)^2$. האם הגרף יורד פעם אחת מתחת לציר x? נמקו.

9 $f(x)=x^3-9x$. הוציאו גורם משותף ופרקו לגורמים. מהן נקודות החיתוך עם ציר x?

10 $f(x)=x^3-4x^2$. פרקו לגורמים ותארו את ההתנהגות סביב כל שורש.

11 $f(x)=x^2-6x+9$. זהו את הביטוי לפי נוסחת הכפל המקוצר. מה הגרף עושה ב-$x=3$?

12 $f(x)=x^4-10x^2+9$. פרקו בעזרת משתנה עזר $t=x^2$, ומצאו את כל נקודות החיתוך עם ציר x.

13 $f(x)=(3x-1)(x+2)$. מצאו את השורש שאינו שלם ואת המקדם המוביל.

14 $f(x)=-(x+1)(x-1)(x-3)$. מהי מעלת הפולינום? תארו את שני הקצוות.

15 $f(x)=(x^2+4)(x+1)$. כמה נקודות חיתוך עם ציר x יש לגרף? מדוע x^2+4 אינו תורם חיתוך?

16 $f(x)=x^4$. תארו את ההתנהגות סביב ראשית הצירים ובאינסוף.

17 $f(x)=-x^3$. במה שונה הגרף מהגרף של x^3? תארו את הקצוות.

18 $f(x)=(2-x)(x+3)$. שימו לב לסימן של x בסוגריים הראשונים. מהו המקדם המוביל?

19 $f(x)=x^3+2x^2-8x$. פרקו לגורמים (גורם משותף ואז טרינום) ותארו את ההתנהגות.

20 $f(x)=(x+2)(x-1)(x-4)$. בעזרת סקיצה בלבד, פתרו את אי-השוויון $f(x)>0$.

21 $f(x)=-(x+1)(x-3)$. בעזרת סקיצה, פתרו את אי-השוויון $f(x)\geq 0$.

22 $f(x)=x^2(x-5)$. בעזרת סקיצה, פתרו את אי-השוויון $f(x)<0$. שימו לב לנקודה $x=0$!

23 $f(x)=(x-3)^2(x+1)$. לאילו ערכי x מתקיים $f(x)\leq 0$?

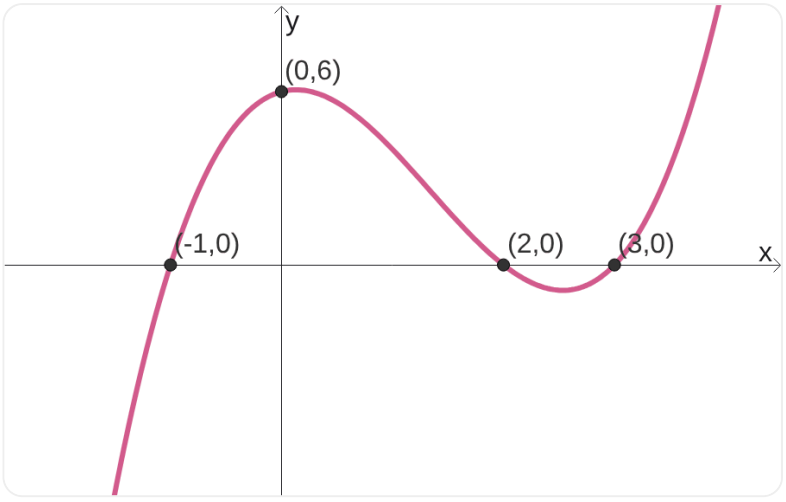
24 מצאו פולינום ממעלה שלישית עם מקדם מוביל 1, שחותך את ציר x ב-$x=-3$, ב-$x=0$ וב-$x=2$.

25 מצאו פולינום ממעלה נמוכה ככל האפשר, עם מקדם מוביל חיובי, שמשיק לציר x ב-$x=1$ וחותך אותו ב-$x=-2$. כתבו אותו כמכפלה.

26 $f(x)=a(x-1)(x-3)$, והגרף עובר בנקודה $(0,6)$. מצאו את a.

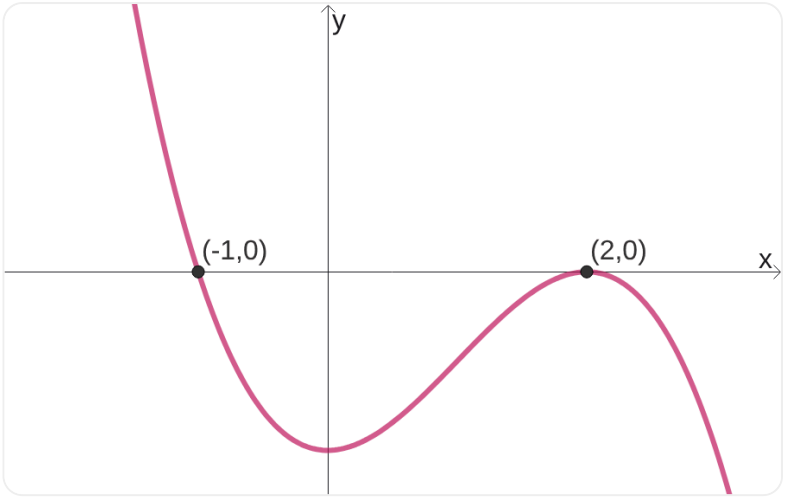
27 $f(x)=a(x+2)^2(x-1)$, וידוע ש-$f(0)=8$. מצאו את a ותארו את ההתנהגות באינסוף.

28 בציור גרף של פולינום ממעלה שלישית. מצאו את הפונקציה, אם ידוע שהגרף חותך את ציר y בנקודה $(0,6)$.



29 איזו מבין הפונקציות הבאות מתאימה לגרף שבציור? נמקו.

(1) $(x-2)^2(x+1)$ (2) $(x+1)^2(x-2)$ (3) $-(x-2)^2(x+1)$ (4) $(x-2)(x+1)$



30 $f(x)=x^3-x$. הראו שהגרף סימטרי ביחס לראשית ($f(-x)=-f(x)$), ומצאו את נקודות החיתוך עם ציר x.

31 $f(x)=-2x^3+x^2+50$. תארו את ההתנהגות באינסוף ובמינוס אינסוף. איזה איבר קובע?

32 $f(x)=x^4-3x^3$. תארו את שני הקצוות. האם הם באותו כיוון? נמקו לפי המעלה.

33 סרטטו סקיצה של פולינום ממעלה שנייה שאינו חותך את ציר x כלל ופתוח כלפי מטה, וכתבו נוסחה מתאימה.

✔ תשובות סופיות – נושא 14.1

1. $x=-1$ חותך, $x=2$ חותך, $x=5$ חותך ; $x\to\infty: f(x)\to\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to-\infty$

2. $x=-2$ חותך, $x=4$ חותך ; $x\to\infty: f(x)\to-\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to-\infty$; פרבולה בוכה

3. $x=0$ חותך, $x=3$ חותך ; $x\to\infty: f(x)\to\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to\infty$; כן

4. $x=-3$ משיק, $x=1$ חותך ; $x\to\infty: f(x)\to\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to-\infty$

5. מקדם מוביל -1 ; $x=0$ חותך, $x=2$ משיק ; $x\to\infty: f(x)\to-\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to\infty$

6. $x=1$ חותך בהשתטחות ; $x\to\infty: f(x)\to\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to-\infty$

7. $x=-4$ חותך, $x=0$ משיק ; $x\to\infty: f(x)\to\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to-\infty$

8. $x=-2$ משיק, $x=2$ משיק ; $x\to\infty: f(x)\to\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to\infty$; לא – $f(x)\geq 0$ לכל x

9. $x(x-3)(x+3)$; $x=-3$ חותך, $x=0$ חותך, $x=3$ חותך ; $x\to\infty: f(x)\to\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to-\infty$

10. $x^2(x-4)$; $x=0$ משיק, $x=4$ חותך ; $x\to\infty: f(x)\to\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to-\infty$

11. $(x-3)^2$; $x=3$ משיק ; $x\to\infty: f(x)\to\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to\infty$

12. $(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$; $x=-3$ חותך, $x=-1$ חותך, $x=1$ חותך, $x=3$ חותך ; $x\to\infty: f(x)\to\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to\infty$

13. מקדם מוביל 3 ; $x=-2$ חותך, $x=\frac{1}{3}$ חותך ; $x\to\infty: f(x)\to\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to\infty$

14. מעלה 3 ; $x=-1$ חותך, $x=1$ חותך, $x=3$ חותך ; $x\to\infty: f(x)\to-\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to\infty$

15. $x=-1$ חותך ; $x\to\infty: f(x)\to\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to-\infty$; $x^2+4>0$ תמיד

16. $x=0$ משיק ; $x\to\infty: f(x)\to\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to\infty$

17. $x=0$ חותך בהשתטחות ; $x\to\infty: f(x)\to-\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to\infty$

18 מקדם מוביל -1 ; $x=-3$ חותך, $x=2$ חותך ; $x\to\infty: f(x)\to-\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to-\infty$

19 $x(x+4)(x-2)$; $x=-4$ חותך, $x=0$ חותך, $x=2$ חותך ; $x\to\infty: f(x)\to\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to-\infty$

20 $-2<x<1$ או $x>4$

21 $-1\le x\le 3$

22 $x<0$ או $0<x<5$

23 $x\le -1$ או $x=3$

24 $f(x)=x(x+3)(x-2)$

25 $f(x)=(x-1)^2(x+2)$ (או כפולה חיובית שלו)

26 $a=2$

27 $a=-2$; $x\to\infty: f(x)\to-\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to\infty$

28 $f(x)=(x+1)(x-2)(x-3)$

29 (3)

30 $f(-x)=-x^3+x=-f(x)$; $x=-1$, $x=0$, $x=1$ - חותך בכולן

31 $x\to\infty: f(x)\to-\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to\infty$; האיבר $-2x^3$

32 $x\to\infty: f(x)\to\infty$, $x\to-\infty: f(x)\to\infty$; כן - מעלה זוגית

33 לדוגמה $f(x)=-x^2-1$

14.2 הזזות ומתיחות מתוך גרף

הפונקציה $f(x)$ נתונה רק בציור. $f(x)+k$ – הזזה אנכית; $f(x-h)$ – הזזה אופקית ($h>0$ ימינה!); $a\cdot f(x)$ – מתיחה אנכית; $f(bx)$ – כיווץ אופקי; $-f(x)$ – שיקוף בציר x; $f(-x)$ – שיקוף בציר y. מזיזים את הנקודות המסומנות – וקוראים את התשובה.

צפו לפני שמתחילים:

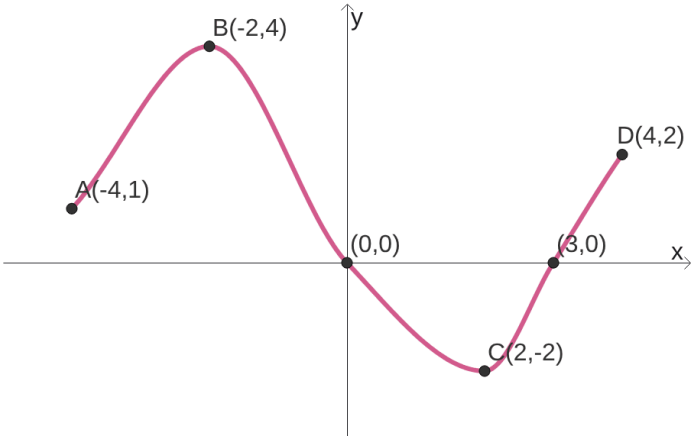
קדם אנליזה – הזזה בציר x
YouTube · 9:22

חקירת פונקציה – סעיפי חשיבה (הזזות)
YouTube · 8:32

פרבולה – הזזה אופקית
YouTube · 4:54

פרבולה – הזזה אנכית
YouTube · 8:39

תרגילים 1–10 בציור גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $-4\le x\le 4$.
בכל תרגיל נתונה פונקציה $g(x)$ שהתקבלה מ-$f(x)$.



גרף הפונקציה $f(x)$

1 $g(x)=f(x)+1$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ (כולל נקודות קצה) וקבעו את סוגן.

2 $g(x)=f(x)-4$. מצאו את נקודת החיתוך של $g(x)$ עם ציר x. האם הגרף חותך או משיק?

3 $g(x)=f(x-3)$. מהו תחום ההגדרה של $g(x)$?

4 $g(x)=f(x+2)$. מצאו את נקודות החיתוך של $g(x)$ עם ציר x.

5 $g(x)=3f(x)$. מהו תחום הערכים של $g(x)$?

6 $g(x)=-f(x)$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ (כולל נקודות קצה) וקבעו את סוגן.

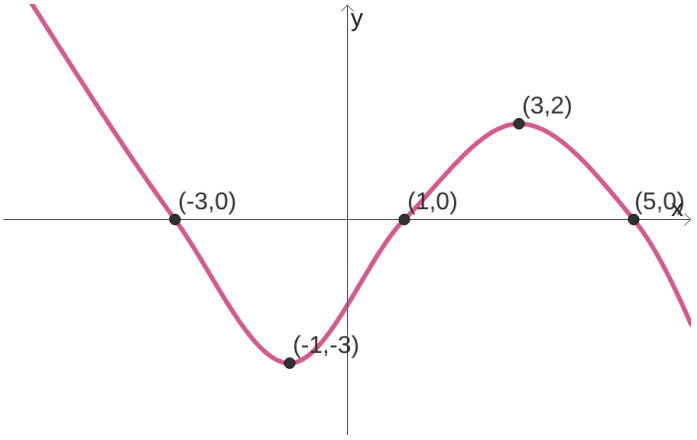
7 $g(x)=f(x)+2$. מהו תחום הערכים של $g(x)$? האם תחום ההגדרה השתנה?

8 $g(x)=f(x-1)$. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

9 $g(x)=f(x)-2$. כמה נקודות חיתוך יש ל-$g(x)$ עם ציר x? מצאו את זו שאפשר לדעת במדויק.

10 $g(x)=f(x+4)$. מצאו את נקודת החיתוך של $g(x)$ עם ציר y.

תרגילים 11–18 בציור גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. משמאל הגרף עולה לאינסוף ומימין יורד למינוס אינסוף.



גרף הפונקציה $f(x)$

11 $g(x)=f(x)+3$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגן.

12 $g(x)=f(x-2)$. מצאו את נקודות החיתוך של $g(x)$ עם ציר x.

13 $g(x)=f(x)-2$. מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)$ שנמצאת על ציר x.

14 $g(x)=-f(x)$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגן.

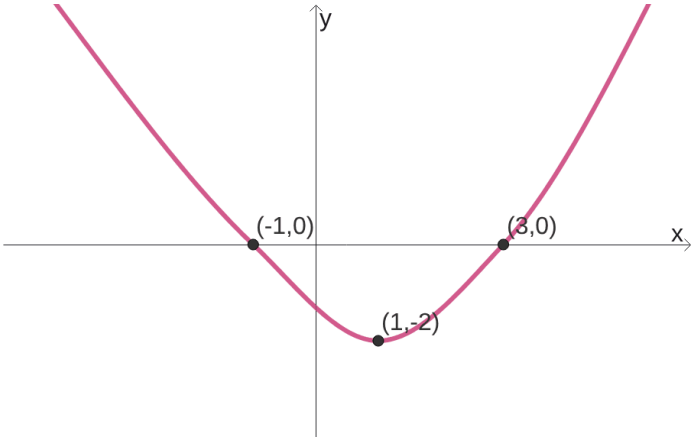
15 $g(x)=2f(x)$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$. אילו נקודות של $f(x)$ לא זוז?

16 $g(x)=f(x+1)$. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

17 $g(x)=f(x)+k$. מצאו את k שעבורו נקודת המינימום של $g(x)$ נמצאת על ציר x.

18 פתרו את אי-השוויון $f(x)>0$ ואת אי-השוויון $f(x-2)>0$.

תרגילים 19–26 בציור גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. בשני הקצוות הגרף עולה לאינסוף.



גרף הפונקציה $f(x)$

19 $g(x)=f(x)+2$. מצאו את נקודת החיתוך של $g(x)$ עם ציר x. האם הגרף חותך או משיק?

20 $g(x)=f(x)+5$. האם יש ל-$g(x)$ נקודות חיתוך עם ציר x? נמקו.

21 $g(x)=f(x-3)$. מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגה.

22 $g(x)=f(x+1)-1$. מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגה.

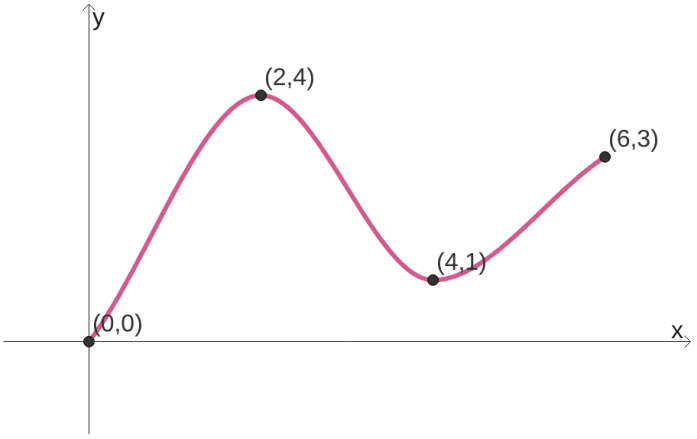
23 $g(x)=-f(x)$. מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגה. מהו תחום הערכים של $g(x)$?

24 $g(x)=\frac{1}{2}f(x)$. מהו תחום הערכים של $g(x)$?

25 $g(x)=f(2x)$. מצאו את נקודות החיתוך של $g(x)$ עם ציר x ואת נקודת הקיצון שלה.

26 לאילו ערכי k יש למשוואה $f(x)=k$ שני פתרונות? ופתרון אחד?

תרגילים 27–33 בציור גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $0\le x\le 6$.



גרף הפונקציה $f(x)$

27 $g(x)=f(x+2)$. מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$.

28 $g(x)=f(x)-1$. מצאו את תחום הערכים של $g(x)$, ואת נקודת החיתוך היחידה עם ציר x שאפשר לדעת במדויק.

29 $g(x)=f(-x)$. מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$ ואת נקודות הקיצון שלה (כולל נקודות קצה).

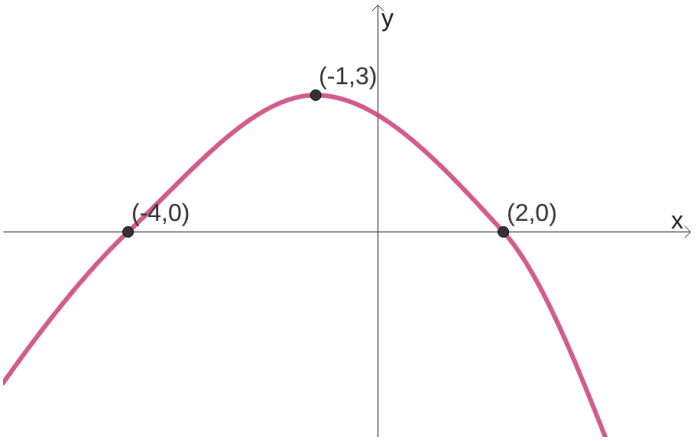
30 $g(x)=2f(x)+1$. מהו תחום הערכים של $g(x)$?

31 $g(x)=f(x-a)$, ונקודת המקסימום הפנימית של $g(x)$ היא $(5,4)$. מצאו את a ואת תחום ההגדרה של $g(x)$.

32 $g(x)=f(x)+b$, וגרף $g(x)$ עובר בנקודה $(6,0)$. מצאו את b.

33 $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)$. מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$ ואת נקודות הקיצון הפנימיות שלה.

תרגילים 34–40 בציור גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. בשני הקצוות הגרף יורד למינוס אינסוף.



גרף הפונקציה $f(x)$

34 $g(x)=f(x)-3$. מצאו את נקודת החיתוך של $g(x)$ עם ציר x.

35 $g(x)=f(x+3)$. מצאו את נקודות החיתוך של $g(x)$ עם ציר x ואת נקודת הקיצון שלה.

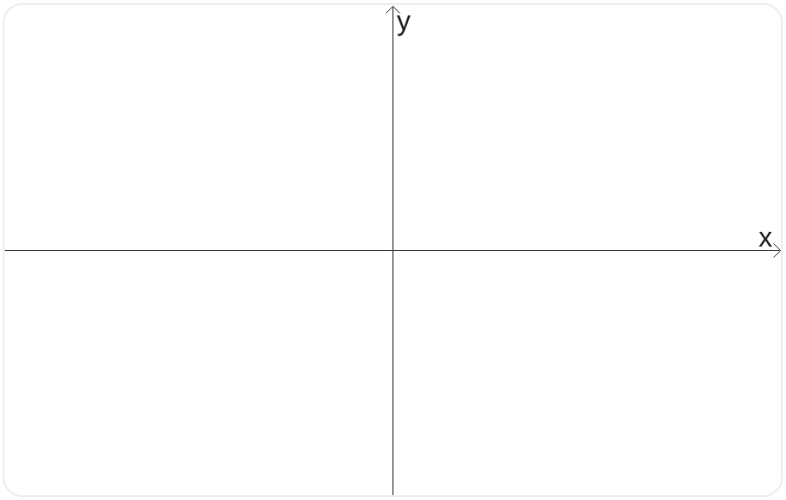
36 $g(x)=f(x)+1$. מהו תחום הערכים של $g(x)$?

37 $g(x)=-2f(x)$. מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגה.

38 $g(x)=f(-x)$. מצאו את נקודות החיתוך של $g(x)$ עם ציר x ואת נקודת הקיצון שלה.

39 $g(x)=f(x+h)$. מצאו את h שעבורו נקודות החיתוך של $g(x)$ עם ציר x סימטריות ביחס לציר y.

40 סרטטו במערכת הצירים הריקה סקיצה של $g(x)=f(x-1)+1$. סמנו על הסקיצה את הנקודות המיוחדות שמתקבלות מהנקודות המסומנות.



✔ תשובות סופיות – נושא 14.2

1. $(-4,2)$ מינימום (קצה), $(-2,5)$ מקסימום, $(2,-1)$ מינימום, $(4,3)$ מקסימום (קצה)
2. $(-2,0)$ – משיק
3. $-1 \le x \le 7$
4. $(-2,0)$, $(1,0)$
5. $-6 \le y \le 12$
6. $(-4,-1)$ מקסימום (קצה), $(-2,-4)$ מינימום, $(2,2)$ מקסימום, $(4,-2)$ מינימום (קצה)
7. $0 \le y \le 6$; לא – נשאר $-4 \le x \le 4$
8. עלייה: $-3 < x < -1$, $3 < x < 5$; ירידה: $-1 < x < 3$
9. 3 נקודות ; המדויקת: $(4,0)$ (נקודת קצה)
10. $(0,2)$, כי $g(0) = f(4) = 2$
11. $(-1,0)$ מינימום, $(3,5)$ מקסימום
12. $(-1,0)$, $(3,0)$, $(7,0)$
13. $(3,0)$ מקסימום
14. $(-1,3)$ מקסימום, $(3,-2)$ מינימום
15. $(-1,-6)$ מינימום, $(3,4)$ מקסימום ; נקודות החיתוך עם ציר x
16. עלייה: $-2 < x < 2$; ירידה: $x < -2$, $x > 2$
17. $k = 3$
18. $f(x) > 0$: $x < -3$ או $1 < x < 5$; $f(x-2) > 0$: $x < -1$ או $3 < x < 7$
19. $(1,0)$ – משיק
20. לא – ערך המינימום של $g(x)$ הוא $3 > 0$
21. $(4,-2)$ מינימום
22. $(0,-3)$ מינימום
23. $(1,2)$ מקסימום ; $y \le 2$

24 $y \geq -1$

25 $(-\frac{1}{2},0)$, $(\frac{3}{2},0)$; $(\frac{1}{2},-2)$ מינימום

26 שני פתרונות: $k > -2$; פתרון אחד: $k = -2$

27 $-2 \leq x \leq 4$

28 $-1 \leq y \leq 3$; $(4,0)$ – משיק

29 $-6 \leq x \leq 0$; $(-6,3)$ מקסימום (קצה), $(-4,1)$ מינימום, $(-2,4)$ מקסימום, $(0,0)$ מינימום (קצה)

30 $1 \leq y \leq 9$

31 $a = 3$; $3 \leq x \leq 9$

32 $b = -3$

33 $0 \leq x \leq 12$; $(4,4)$ מקסימום, $(8,1)$ מינימום

34 $(-1,0)$ – משיק

35 $(-7,0)$, $(-1,0)$; $(-4,3)$ מקסימום

36 $y \leq 4$

37 $(-1,-6)$ מינימום

38 $(-2,0)$, $(4,0)$; $(1,3)$ מקסימום

39 $h = -1$ (החיתוכים $(\pm 3,0)$)

40 $(-3,1)$, $(0,4)$, $(3,1)$

פרק 14 סיכומון סוף פרק – קדם אנליזה

התנהגות באינסוף

- קובע רק האיבר עם החזקה הגבוהה $a\,x^n$.
- n זוגי: שני הקצוות באותו כיוון – למעלה אם $a>0$, למטה אם $a<0$.
- n אי-זוגי: הקצוות בכיוונים הפוכים – כש-$a>0$ משמאל למטה ומימין למעלה.

התנהגות סביב ציר x

- ריבוי 1 – הגרף **חותך** את הציר.
- ריבוי 2 – הגרף **משיק** לציר ומסתובב.
- ריבוי 3 – **חותך בהשתטחות**.
- גורם כמו x^2+4 אינו מוסיף נקודות חיתוך.

מנוסחה לסקיצה

- פירוק לגורמים: גורם משותף, כפל מקוצר, טרינום, משתנה עזר.
- מסמנים את השורשים ואת הריבוי של כל אחד.
- קובעים את שני הקצוות ומחברים דרך השורשים.
- מהסקיצה פותרים אי-שוויון: איפה הגרף מעל/מתחת לציר.

מסקיצה לנוסחה

- כל שורש r נותן גורם $(x-r)$ או $(x-r)^2$ לפי סוג המגע.
- את המקדם a מוצאים בהצבת נקודה נוספת, למשל $f(0)$.

הזזות

- $f(x)+k$: $(x,y)\to(x,\,y+k)$ – למעלה אם $k>0$.
- $f(x-h)$: $(x,y)\to(x+h,\,y)$ – ימינה אם $h>0$.
- הזזה אנכית משנה את תחום הערכים; הזזה אופקית – את תחום ההגדרה.

מתיחות ושיקופים

- $a\cdot f(x)$: $(x,y)\to(x,\,ay)$ – החיתוכים עם ציר x לא זזים.
- $f(bx)$: $(x,y)\to\left(\frac{x}{b},\,y\right)$.
- $-f(x)$: שיקוף בציר x – מקסימום הופך למינימום.
- $f(-x)$: שיקוף בציר y – עלייה הופכת לירידה.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- $f(x-2)$ זז **ימינה** – לא שמאלה!
- $f(2x)$ מכווץ – **מחלקים** את שיעור ה-x ב-2.
- לשכוח להחליף את סוג הקיצון בשיקוף $-f(x)$.
- לשכוח את הקצוות כשנשאלים על תחום הגדרה או ערכים בגרף סגור.

💡 **הטיפ של אילון:** בכל טרנספורמציה לא מדמיינים את כל הגרף: לוקחים את הנקודות המסומנות, מזיזים כל אחת לפי הכלל – ורק אז מחברים.

פרק 15

מתחילים לחקור!

הנגזרת, המשיק ונקודות הקיצון – וחקירה מלאה של פולינום

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

15.1 נגזרת וכללי גזירה — 36 תרגילים

15.2 משיק לפונקציה — 33 תרגילים

15.3 נקודות קיצון, חקירת פולינום ומציאת פרמטרים — 35 תרגילים

סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו

נגזרת – מבוא והגיון
YouTube · 11:03

משיק לפונקציה – הסבר ותרגול שלב אחר שלב
YouTube · 10:23

חקירת פונקציית פולינום
YouTube · 11:51

כל סוגי הנגזרות – דף סיכום מלא
YouTube · 14:09

המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף

המשיק הנע

גררו נקודה לאורך הגרף וראו את המשיק ואת השיפוע שלו – הנגזרת בנקודה – בזמן אמת.

15.1 נגזרת וכללי גזירה

כלל החזקה: $(x^n)' = nx^{n-1}$; נגזרת של קבוע היא 0; את $f'(a)$ מחשבים בהצבה בנגזרת – זה שיפוע הגרף בנקודה $x = a$.

צפו לפני שמתחילים:

נגזרת – מבוא והגיון
YouTube · 11:03

נגזרת פולינום
YouTube · 11:51

כל סוגי הנגזרות – דף סיכום מלא
YouTube · 14:09

1. $f(x) = x^6$. גזרו את $f(x)$ (חזקה בודדת).
2. $f(x) = 4x^3$. גזרו את $f(x)$ (מקדם מספרי).
3. $f(x) = 7 - 3x^2$. גזרו את $f(x)$ (פרבולה עם קבוע).
4. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 1$. גזרו את $f(x)$ (פולינום ממעלה שלישית).
5. $f(x) = \frac{x^3}{3}$. גזרו את $f(x)$ (מקדם שבר).
6. $f(x) = -x^4 + 2x$. גזרו את $f(x)$ (מקדם מוביל שלילי).
7. $f(x) = 9$. גזרו את $f(x)$ (פונקציה קבועה).
8. $f(x) = 2 - 6x$. גזרו את $f(x)$ (פונקציה קווית).
9. $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}$. גזרו את $f(x)$ (מקדמים שמבטלים את החזקה).
10. $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} + x$. גזרו את $f(x)$ (שברים בכל המקדמים).

11 $f(x)=(x-4)(x+1)$. פתחו סוגריים ואז גזרו.

12 $f(x)=(x+3)^2$. פתחו לפי נוסחת הכפל המקוצר ואז גזרו.

13 $f(x)=x(x^2-5)$. פתחו ואז גזרו.

14 $f(x)=\dfrac{x^4+2x}{2}$. חלקו כל איבר ב-2 ואז גזרו.

15 $f(x)=\dfrac{2}{x}$. כתבו כחזקה שלילית וגזרו.

16 $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$. כתבו כחזקה שלילית וגזרו.

17 $f(x)=2\sqrt{x}$. כתבו כחזקה וגזרו.

18 $f(x)=x^3-x^2+4$. חשבו את $f'(3)$.

19 $f(x)=-2x^3+x$. חשבו את $f'(-2)$.

20 $f(x)=x^2-10x+3$. מצאו את ערך ה-x שבו $f'(x)=0$.

21 $f(x)=x^3-27x$. מצאו את ערכי ה-x שבהם $f'(x)=0$.

22 $f(x)=x^3-6x^2+9x$. מצאו את ערכי ה-x שבהם $f'(x)=0$.

23 $f(x)=x^3+2x$. הראו ש-$f'(x)>0$ לכל x.

24 $f(x)=x^2-3x$. מצאו את x שבו שיפוע הגרף הוא 5.

25 $f(x)=x^3$. מצאו את ערכי x שבהם שיפוע הגרף הוא 27.

26 $f(x)=2x^2+x$. מצאו את הנקודה על הגרף שבה השיפוע הוא -7.

27 $f(x)=x^2+6x$. מצאו את הנקודה שבה שיפוע הגרף שווה לשיפוע הישר $y=2x-1$.

28 $f(x)=x^2-1$. חשבו את $f'(x)$ לפי ההגדרה $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

29 $f(x)=5x-2$. חשבו את $f'(x)$ לפי ההגדרה. מה המשמעות של התוצאה?

30 $f(x)=ax^2-4x$, וידוע ש-$f'(2)=8$. מצאו את a.

31 $f(x)=x^3+bx^2$, וידוע ש-$f'(1)=-1$. מצאו את b.

32 $f(x)=x^3-12x$. פתרו את אי-השוויון $f'(x)>0$. מה המשמעות לגבי $f(x)$?

33 $f(x)=x^4-2x^2$. מצאו את כל ערכי x שבהם $f'(x)=0$.

34 $f(x)=\frac{1}{x}+x$. גזרו ומצאו היכן $f'(x)=0$.

35 $f(x)=x^2$ ו-$g(x)=4x-1$. באיזו נקודה שיפוע הגרף של $f(x)$ שווה לשיפוע של $g(x)$?

36 $f(x)=x^3-3x$. חשבו את $f'(2)$ ואת $f'(-2)$. מה אפשר לומר על התוצאות?

✔ תשובות סופיות – נושא 15.1

1	$f'(x)=6x^5$
2	$f'(x)=12x^2$
3	$f'(x)=-6x$
4	$f'(x)=3x^2-10x+2$
5	$f'(x)=x^2$
6	$f'(x)=2-4x^3$
7	$f'(x)=0$
8	$f'(x)=-6$
9	$f'(x)=x^4-x^2$
10	$f'(x)=2x^3-2x^2+1$
11	$f'(x)=2x-3$
12	$f'(x)=2x+6$
13	$f'(x)=3x^2-5$
14	$f'(x)=2x^3+1$
15	$f'(x)=-\frac{2}{x^2}$
16	$f'(x)=-\frac{3}{x^4}$
17	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$
18	21
19	-23
20	$x=5$
21	$x=3\ ,x=-3$
22	$x=3\ ,x=1$

23	$f'(x)=3x^2+2\geq 2>0$
24	$x=4$
25	$x=\pm 3$
26	$(-2,6)$
27	$(-2,-8)$
28	$f'(x)=2x$
29	$f'(x)=5$ – שיפוע הישר
30	$a=3$
31	$b=-2$
32	$x<-2$ או $x>2$; שם $f(x)$ עולה
33	$x=0$, $x=\pm 1$
34	$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$; $x=\pm 1$
35	$x=2$, הנקודה $(2,4)$
36	$f'(2)=f'(-2)=9$ – שווים

15.2 משיק לפונקציה

נקודת ההשקה $(x_0, f(x_0))$, השיפוע $m = f'(x_0)$ ומשוואת הישר $y - y_0 = m(x - x_0)$. מקביל – שיפוע שווה; מאונך – מכפלת השיפועים -1; משיק אופקי – שיפוע 0.

צפו לפני שמתחילים:



משיק לפונקציה – הסבר ותרגול שלב אחר שלב
YouTube · 10:23



משיק לפונקציה
YouTube · 9:21

1 $f(x) = x^2 + 1$. מצאו את משוואת המשיק לגרף בנקודה שבה $x = 2$.

2 $f(x) = x^3 - x$. מצאו את משוואת המשיק בנקודה $x = 2$.

3 $f(x) = x^2 - 6x + 7$. מצאו את משוואת המשיק בנקודת הקיצון של הפונקציה. מה מיוחד בו?

4 $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. מצאו את משוואת המשיק בנקודת החיתוך של הגרף עם ציר y.

5 $f(x) = x^2 - 4x$. מצאו את משוואות המשיקים בנקודות החיתוך של הגרף עם ציר x.

6 $f(x) = x^3 + 2$. מצאו את משוואת המשיק בנקודה שבה $x = -1$.

7 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. מצאו את משוואת המשיק בנקודה $x = 4$.

8 $f(x) = x^2 + 4x$. מצאו את משוואת המשיק שהשיפוע שלו 2.

9 $f(x) = x^2 - x$. מצאו את משוואת המשיק המקביל לישר $y = 3x - 5$.

10 $f(x) = x^3 - 12x$. מצאו את משוואות המשיקים המקבילים לציר x.

11 $f(x) = x^2 + 3$. מצאו את משוואת המשיק המאונך לישר $y = -\frac{1}{2}x$.

12 $f(x)=x^3-3x^2$. מצאו את הנקודות שבהן המשיק לגרף אופקי.

13 $f(x)=x^2-2x$. המשיק לגרף בנקודה $x=3$ חותך את ציר x. מצאו את נקודת החיתוך.

14 $f(x)=-x^2+9$. המשיק בנקודה $x=1$ חותך את הצירים. חשבו את שטח המשולש שהמשיק יוצר עם הצירים.

15 $f(x)=x^3$. מצאו את הנקודות על הגרף שבהן שיפוע המשיק הוא 3, ואת משוואות המשיקים בהן.

16 הישר $y=4x+k$ משיק לגרף $f(x)=x^2$. מצאו את k ואת נקודת ההשקה.

17 הישר $y=2x+b$ משיק לגרף $f(x)=x^2-4x$. מצאו את b.

18 $f(x)=ax^2$, והמשיק לגרף בנקודה $x=1$ הוא $y=6x-3$. מצאו את a.

19 $f(x)=x^2+bx$. שיפוע המשיק בנקודה $x=2$ הוא 1. מצאו את b ואת משוואת המשיק.

20 $f(x)=x^2+1$. מצאו את משוואות המשיקים לגרף שעוברים דרך ראשית הצירים.

21 $f(x)=x^3-x$. המשיק בנקודה $x=1$ חותך את הגרף בנקודה נוספת. מצאו אותה.

22 $f(x)=x^2-5x+6$. מצאו את משוואת המשיק בנקודה שבה $f(x)=2$ ו-$x>2$.

23 $f(x)=x^2$. מצאו את הנקודה על הגרף שבה המשיק יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר x.

24 $f(x)=x^2-1$. המשיקים בנקודות החיתוך עם ציר x נחתכים בנקודה C. מצאו את C.

25 $f(x)=x^2+2x$ ו-$g(x)=x^2-2x$. מצאו את משוואות המשיקים לשני הגרפים בנקודה $x=0$. מה הזווית בין המשיקים?

26 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$. מצאו את משוואות המשיקים שהשיפוע שלהם 8.

27 $f(x)=x^2+bx+c$. המשיק לגרף בנקודה $(1,2)$ הוא $y=4x-2$. מצאו את b ואת c.

28 $f(x)=\dfrac{4}{x}$. מצאו את משוואת המשיק בנקודה $x=2$.

29 $f(x)=\dfrac{1}{x}$. מצאו את הנקודות שבהן שיפוע המשיק הוא -1.

30 $f(x)=x^3-3x+1$. מצאו את משוואת המשיק בנקודת הקיצון שבה $x>0$.

31 $f(x)=x^2-4x+5$. מצאו את הנקודה על הגרף שבה המשיק מקביל לישר $y=2x+3$, ואת משוואת המשיק.

32 $f(x)=-x^2+4x$. המשיק בנקודה A על הגרף עובר דרך הנקודה $(0,4)$. מצאו את A ברביע הראשון.

33 $f(x)=x^3$. מצאו את משוואת המשיק בנקודה $x=0$. מה מיוחד בו?

✔ תשובות סופיות – נושא 15.2

1	$y = 4x - 3$
2	$y = 11x - 16$
3	$y = -2$ - משיק אופקי
4	$y = 2x + 3$
5	$y = 4x - 16$; $y = -4x$
6	$y = 3x + 4$
7	$y = 4x - 8$
8	$y = 2x - 1$
9	$y = 3x - 4$
10	$y = -16$; $y = 16$
11	$y = 2x + 2$
12	$(2, -4)$,$(0, 0)$
13	$(\frac{9}{4}, 0)$
14	25
15	$y = 3x + 2$:$(-1, -1)$; $y = 3x - 2$:$(1, 1)$
16	$(2, 4)$; $k = -4$
17	$b = -9$
18	$a = 3$
19	$y = x - 4$; $b = -3$
20	$y = -2x$; $y = 2x$
21	$(-2, -6)$
22	$y = 3x - 10$
23	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

24 $C(0,-2)$

25 $y=2x$ ו-$y=-2x$; המשיקים אינם מאונכים (מכפלת השיפועים -4)

26 $y=8x-18$; $y=8x+18$

27 $b=2$,$c=-1$

28 $y=-x+4$

29 $(1,1)$,$(-1,-1)$

30 $y=-1$

31 $(3,2)$; $y=2x-4$

32 $A(2,4)$

33 $y=0$ - ציר x עצמו

15.3 נקודות קיצון, חקירת פולינום ומציאת פרמטרים

פותרים $f'(x)=0$ ובונים טבלת סימנים: מ-$+$ ל-$-$ – מקסימום, מ-$-$ ל-$+$ – מינימום. פרמטרים: כל נתון הוא משוואה – נקודה על הגרף מציבים ב-$f(x)$, קיצון מציבים ב-$f'(x)=0$.

צפו לפני שמתחילים:



חקירת פונקציית פולינום
YouTube · 11:51



נקודת קיצון קצה / פנימית ומוחלטת / מקומית
YouTube · 5:05



איך מוצאים פרמטר בפונקציה? כל השיטות
YouTube · 6:41

1 $f(x)=x^2-8x+12$ (פרבולה). חקרו את הפונקציה: נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה. סרטטו סקיצה.

2 $f(x)=x^3-12x$ (שתי נקודות קיצון סימטריות). חקרו את הפונקציה: נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה. סרטטו סקיצה.

3 $f(x)=-x^3+3x$ (מקדם מוביל שלילי). חקרו את הפונקציה: נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה. סרטטו סקיצה.

4 $f(x)=x^3-6x^2$ (קיצון בראשית). חקרו את הפונקציה: נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה. סרטטו סקיצה.

5 $f(x)=x^4-8x^2$ (ממעלה רביעית). חקרו את הפונקציה: נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה. סרטטו סקיצה.

6 $f(x)=x^3-3x^2-9x$ (מקדמים שונים). חקרו את הפונקציה: נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה. סרטטו סקיצה.

7 $f(x)=-x^3+6x^2-9x$ (שורש כפול). חקרו את הפונקציה: נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה. סרטטו סקיצה.

8 $f(x)=x^4-4x^3$ (קיצון אחד בלבד). חקרו את הפונקציה: נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה. סרטטו סקיצה.

9 $f(x)=x^3+1$. האם יש לפונקציה נקודת קיצון? הסבירו בעזרת טבלת סימנים של $f'(x)$.

10 $f(x)=-x^3-x$. הראו שהפונקציה יורדת לכל x.

11 $f(x)=(x-2)^4$. מצאו את נקודת הקיצון וסווגו אותה.

12 $f(x)=x^3-27x+5$. מצאו את נקודות הקיצון וקבעו את סוגן.

13 $f(x)=2x^3-9x^2+12x$. מצאו את תחומי העלייה והירידה.

14 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$. מצאו את נקודות הקיצון.

15 $f(x)=x^2-6x$ בתחום $0\le x\le 4$. מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הקטן ביותר של $f(x)$ בתחום.

16 $f(x)=x^3-3x$ בתחום $-2\le x\le 3$. מצאו את נקודות הקיצון הפנימיות ונקודות הקצה, ואת הערך הגדול ביותר בתחום.

17 $f(x)=x^3-3x+3$. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=0$? היעזרו בערכי הקיצון.

18 $f(x)=x^3-12x$. לאילו ערכי k יש למשוואה $f(x)=k$ שלושה פתרונות?

19 $f(x)=x^2(x-3)$. מצאו את נקודות הקיצון. היעזרו גם בהתנהגות סביב ציר x.

20 סרטטו סקיצה של פונקציה $f(x)$ עם הנתונים: $f'(x)<0$ עבור $x<1$, $f'(x)>0$ עבור $x>1$, $f(1)=-3$. מהי נקודת הקיצון?

21 $f(x)=x^2+ax$. לפונקציה נקודת קיצון ב-$x=-2$. מצאו את a ואת סוג הקיצון.

22 $f(x)=x^3+ax$. לפונקציה נקודת קיצון ב-$x=1$. מצאו את a ואת נקודות הקיצון.

23 $f(x)=ax^3-3x$. לפונקציה נקודת קיצון ב-$x=-1$. מצאו את a.

24 $f(x)=x^2+bx+c$. נקודת הקיצון של הפונקציה היא $(3,-4)$. מצאו את b ואת c.

25 $f(x)=-x^2+bx$. ערך המקסימום של הפונקציה מתקבל ב-$x=2$. מצאו את b ואת ערך המקסימום.

26 $f(x)=x^3+ax^2$. לפונקציה נקודת קיצון ב-$x=4$. מצאו את a וסווגו את שתי נקודות הקיצון.

27 $f(x)=x^3-3x+k$. מצאו את k אם ידוע שערך המקסימום של הפונקציה הוא 5.

28 $f(x)=-x^2+6x+k$. מצאו את k אם ידוע שהגרף משיק לציר x.

29 $f(x)=ax^2+bx$. הגרף עובר בנקודה $(1,4)$, ושיפוע המשיק בה הוא 6. מצאו את a ואת b.

30 $f(x)=x^3+ax^2+bx$. לפונקציה נקודות קיצון ב-$x=-1$ וב-$x=1$. מצאו את a ואת b.

31 $f(x)=x^3-ax$ כאשר $a>0$. בטאו באמצעות a את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון.

32 $f(x)=x^3-3x^2+k$. מצאו את ערכי k שעבורם לגרף יש בדיוק שתי נקודות חיתוך עם ציר x.

33 $f(x)=x^4-2x^2$. מצאו את נקודות הקיצון והראו שהגרף סימטרי ביחס לציר y.

34 $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$. הראו שהפונקציה עולה לכל x, ומצאו את הנקודה שבה המשיק אופקי.

35 $f(x)=x^3+ax^2+3x$. מצאו את a אם ידוע שהמשיק בנקודה $x=1$ מקביל לציר x.

✔ תשובות סופיות – נושא 15.3

1. חיתוך: $(2,0)$, $(6,0)$, $(0,12)$; $(4,-4)$ מינימום ; עלייה: $x>4$; ירידה: $x<4$
2. חיתוך: $(-2\sqrt{3},0)$, $(0,0)$, $(2\sqrt{3},0)$; $(-2,16)$ מקסימום, $(2,-16)$ מינימום ; עלייה: $x<-2$, $x>2$; ירידה: $-2<x<2$
3. חיתוך: $(-\sqrt{3},0)$, $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$; $(-1,-2)$ מינימום, $(1,2)$ מקסימום ; עלייה: $-1<x<1$; ירידה: $x<-1$, $x>1$
4. חיתוך: $(0,0)$, $(6,0)$; $(0,0)$ מקסימום, $(4,-32)$ מינימום ; עלייה: $x<0$, $x>4$; ירידה: $0<x<4$
5. חיתוך: $(-2\sqrt{2},0)$, $(0,0)$, $(2\sqrt{2},0)$; $(-2,-16)$ מינימום, $(0,0)$ מקסימום, $(2,-16)$ מינימום ; עלייה: $-2<x<0$, $x>2$; ירידה: $x<-2$, $0<x<2$
6. חיתוך: $(\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{2},0)$, $(0,0)$, $(\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{2},0)$; $(-1,5)$ מקסימום, $(3,-27)$ מינימום ; עלייה: $x<-1$, $x>3$; ירידה: $-1<x<3$
7. חיתוך: $(0,0)$, $(3,0)$; $(1,-4)$ מינימום, $(3,0)$ מקסימום ; עלייה: $1<x<3$; ירידה: $x<1$, $x>3$
8. חיתוך: $(0,0)$, $(4,0)$; $(3,-27)$ מינימום ; עלייה: $x>3$; ירידה: $x<3$
9. אין – $f'(x)=3x^2\geq 0$ ואינה מחליפה סימן
10. $f'(x)=-3x^2-1<0$ לכל x
11. $(2,0)$ מינימום
12. $(-3,59)$ מקסימום, $(3,-49)$ מינימום
13. עלייה: $x<1$, $x>2$; ירידה: $1<x<2$
14. $(-2,\frac{16}{3})$ מקסימום, $(2,-\frac{16}{3})$ מינימום
15. גדול ביותר 0 (ב-$x=0$), קטן ביותר -9 (ב-$x=3$)
16. $(-1,2)$ מקסימום, $(1,-2)$ מינימום ; קצוות: $(-2,-2)$ מינימום, $(3,18)$ מקסימום ; ערך גדול ביותר 18
17. פתרון אחד (ערך המינימום $0>1$)
18. $-16<k<16$
19. $(0,0)$ מקסימום, $(2,-4)$ מינימום

20	$(1,-3)$ מינימום
21	$a=4$; מינימום
22	$a=-3$; $(-1,2)$ מקסימום, $(1,-2)$ מינימום
23	$a=1$
24	$b=-6$,$c=5$
25	$b=4$; 4
26	$a=-6$; $(0,0)$ מקסימום, $(4,-32)$ מינימום
27	$k=3$
28	$k=-9$
29	$a=2$,$b=2$
30	$a=0$,$b=-3$
31	$x=\pm\sqrt{\frac{a}{3}}$
32	$k=0$ או $k=4$
33	$(-1,-1)$ מינימום, $(0,0)$ מקסימום, $(1,-1)$ מינימום ; $f(-x)=f(x)$
34	$f'(x)=3(x-1)^2\geq 0$; $(1,0)$
35	$a=-3$

פרק 15 סיכומון סוף פרק – מתחילים לחקור!

כללי גזירה

- $(x^n)' = nx^{n-1}$; $(c)' = 0$; $(a \cdot x)' = a$.
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- מכפלה בסוגריים – קודם פותחים, אחר כך גוזרים.

משמעות הנגזרת

- $f'(a)$ = שיפוע המשיק לגרף בנקודה $x = a$.
- $f'(x) > 0$ – הפונקציה עולה; $f'(x) < 0$ – יורדת.
- $f'(x) = 0$ – משיק אופקי (חשוד לקיצון).

משוואת משיק – 3 צעדים

- נקודת ההשקה: x_0 ו-$y_0 = f(x_0)$.
- שיפוע: $m = f'(x_0)$.
- משוואה: $y - y_0 = m(x - x_0)$.
- נתון שיפוע? פותרים $f'(x) = m$ ומוצאים את x_0.

ישרים מקבילים ומאונכים

- מקבילים: $m_1 = m_2$.
- מאונכים: $m_1 \cdot m_2 = -1$.
- משיק מקביל לציר x: $m = 0$.

סדר חקירת פולינום

- חיתוך עם הצירים: $f(x) = 0$ ו-$f(0)$.
- נגזרת והשוואה לאפס: $f'(x) = 0$.
- טבלת סימנים ל-$f'(x)$ – סוג הקיצון ותחומי עלייה/ירידה.
- שרטוט סקיצה לפי כל הנתונים.

מציאת פרמטרים

- נקודה על הגרף – מציבים ב-$f(x)$.
- קיצון ב-x_0 – $f'(x_0) = 0$.
- שיפוע משיק נתון – $f'(x_0) = m$.
- כמה פרמטרים – כמה משוואות.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- $f'(x) = 0$ לא מבטיח קיצון – חייבים לבדוק החלפת סימן (למשל x^3).
- לשכוח להציב ב-$f(x)$ כדי לקבל את שיעור ה-y של נקודת הקיצון.
- במשוואת המשיק להציב את x_0 ב-$f'(x)$ – לא להשאיר x בשיפוע.
- בתחום סגור לשכוח לבדוק את נקודות הקצה.

💡 **הטיפ של אילון:** בכל שאלת משיק תשאלו את עצמכם: מה חסר לי – הנקודה או השיפוע? אחד מהם תמיד נתון, ואת השני מוצאים בעזרת הנגזרת.

פרק 16

מורכבת ומכפלה

נגזרת של פונקציה מורכבת ושל מכפלה, הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת, וזוגיות

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

16.1 נגזרת מורכבת ומכפלה וחקירת מכפלה — 31 תרגילים

16.2 קשר גרף–נגזרת, זוגיות והטרנספורמציה $f^2(x)$ — 32 תרגילים

סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



חקירת פונקציות – נגזרת מורכבת

YouTube · 3:04



פונקציה זוגית ואי-זוגית

YouTube · 11:29



חקירת פונקציית מכפלה

YouTube · 14:11



טרנספורמציה – הפונקציה בריבוע

YouTube · 5:40

המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף



הפונקציה והנגזרת – יד ביד

גרף הפונקציה וגרף הנגזרת זה מעל זה: ראו איך עלייה, ירידה וקיצון ב-$f(x)$ מתאימים לסימן של $f'(x)$.

16.1 נגזרת מורכבת ומכפלה וחקירת מכפלה

מורכבת: $[(u)^n]' = n\,u^{n-1}\cdot u'$ – לא לשכוח את הנגזרת הפנימית. מכפלה: $(u\cdot v)' = u'v + uv'$. אחרי הגזירה מוציאים גורם משותף כדי למצוא בקלות היכן $f'(x) = 0$.

צפו לפני שמתחילים:



חקירת פונקציות – נגזרת מורכבת
YouTube · 3:04



חקירת פונקציית מכפלה
YouTube · 14:11



כל סוגי הנגזרות – דף סיכום מלא
YouTube · 14:09

1 $f(x) = (2x+5)^3$. גזרו את $f(x)$ (פנימית קווית).

2 $f(x) = (x^2-3)^4$. גזרו את $f(x)$ (פנימית ריבועית).

3 $f(x) = (4-x)^5$. גזרו את $f(x)$ (שימו לב לסימן של הנגזרת הפנימית).

4 $f(x) = 3(x+1)^4$. גזרו את $f(x)$ (מקדם מחוץ לסוגריים).

5 $f(x) = (x^2+x)^2$. גזרו את $f(x)$ (שתי דרכים: פתיחה או מורכבת).

6 $f(x) = (x^3+1)^3$. גזרו את $f(x)$ (פנימית ממעלה שלישית).

7 $f(x) = \frac{(2x-1)^4}{4}$. גזרו את $f(x)$ (מקדם שבר).

8 $f(x) = (1-2x)^3$. גזרו את $f(x)$ (מינוס בפנימית).

9 $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$. כתבו כחזקה שלילית וגזרו.

10 $f(x)=x(x+2)^2$. גזרו בעזרת כלל המכפלה ופשטו למכפלת גורמים (מכפלה פשוטה).

11 $f(x)=x^2(x-3)$. גזרו בעזרת כלל המכפלה ופשטו למכפלת גורמים (פתיחה או כלל המכפלה).

12 $f(x)=(x-2)(x+1)^2$. גזרו בעזרת כלל המכפלה ופשטו למכפלת גורמים (שני גורמים).

13 $f(x)=(x-1)(x+1)^3$. גזרו בעזרת כלל המכפלה ופשטו למכפלת גורמים (גורם עם חזקה שלישית).

14 $f(x)=x^2(x-2)^2$. גזרו בעזרת כלל המכפלה ופשטו למכפלת גורמים (שני ריבועים).

15 $f(x)=(x-3)^3$. חשבו את $f'(1)$.

16 $f(x)=(x^2+1)^3$. חשבו את $f'(1)$.

17 $f(x)=x(x-3)^2$. מצאו את ערכי x שבהם $f'(x)=0$.

18 $f(x)=(x^2-9)^2$. מצאו את ערכי x שבהם $f'(x)=0$.

19 $f(x)=(3x-2)^4$. מצאו את משוואת המשיק בנקודה $x=1$.

20 $f(x)=x(x-2)^2$. מצאו את משוואת המשיק בנקודה שבה $x=1$.

21 $f(x)=(x^2-4x)^2$. מצאו את משוואת המשיק בנקודה $x=2$. מה מיוחד בו?

22 $f(x)=x(x-6)^2$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ ואת תחומי העלייה והירידה (מכפלה).

23 $f(x)=(x-1)^2(x+2)$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ ואת תחומי העלייה והירידה (שורש כפול).

24 $f(x)=x^2(x-4)^2$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ ואת תחומי העלייה והירידה (שני שורשים כפולים).

25 $f(x)=\left(x^2-4\right)^2$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ ואת תחומי העלייה והירידה (מורכבת).

26 $f(x)=x\left(x-4\right)^3$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ ואת תחומי העלייה והירידה (חזקה שלישית).

27 $f(x)=(x+3)^4$. האם $(-3,0)$ היא נקודת קיצון? סווגו.

28 $f(x)=(x-1)^3$. האם יש לפונקציה נקודת קיצון? הסבירו.

29 $f(x)=(ax-1)^2$, ו-$f'(1)=4$ כאשר $a>0$. מצאו את a.

30 $f(x)=x(x-a)^2$, ולפונקציה מינימום ב-$x=3$ כאשר $a>0$. מצאו את a.

31 $f(x)=(x+k)^2(x-1)$. לפונקציה נקודת קיצון ב-$x=-1$ שהיא שורש כפול. מצאו את k.

✔ תשובות סופיות – נושא 16.1

1	$f'(x)=6(2x+5)^2$
2	$f'(x)=8x(x^2-3)^3$
3	$f'(x)=-5(x-4)^4$
4	$f'(x)=12(x+1)^3$
5	$f'(x)=2x(x+1)(2x+1)$
6	$f'(x)=9x^2(x+1)^2(x^2-x+1)^2$
7	$f'(x)=2(2x-1)^3$
8	$f'(x)=-6(2x-1)^2$
9	$f'(x)=-\frac{2}{(x-2)^3}$
10	$f'(x)=(x+2)(3x+2)$
11	$f'(x)=3x(x-2)$
12	$f'(x)=3(x-1)(x+1)$
13	$f'(x)=2(x+1)^2(2x-1)$
14	$f'(x)=4x(x-2)(x-1)$
15	12
16	24
17	$x=1$, $x=3$
18	$x=0$, $x=\pm 3$
19	$y=12x-11$
20	$y=2-x$
21	$y=16$ – משיק אופקי
22	$(2,32)$ מקסימום, $(6,0)$ מינימום ; עלייה: $x<2$, $x>6$; ירידה: $2<x<6$

23	$(-1,4)$ מקסימום, $(1,0)$ מינימום ; עלייה: $x<-1$, $x>1$; ירידה: $-1<x<1$
24	$(0,0)$ מינימום, $(2,16)$ מקסימום, $(4,0)$ מינימום ; עלייה: $0<x<2$, $x>4$; ירידה: $x<0$, $2<x<4$
25	$(-2,0)$ מינימום, $(0,16)$ מקסימום, $(2,0)$ מינימום ; עלייה: $-2<x<0$, $x>2$; ירידה: $x<-2$, $0<x<2$
26	$(1,-27)$ מינימום ; עלייה: $x>1$; ירידה: $x<1$
27	כן - מינימום
28	אין - $f'(x)=3(x-1)^2$ לא מחליפה סימן
29	$a=2$
30	$a=3$
31	$k=1$

16.2 קשר גרף-נגזרת, זוגיות והטרנספורמציה $f^2(x)$

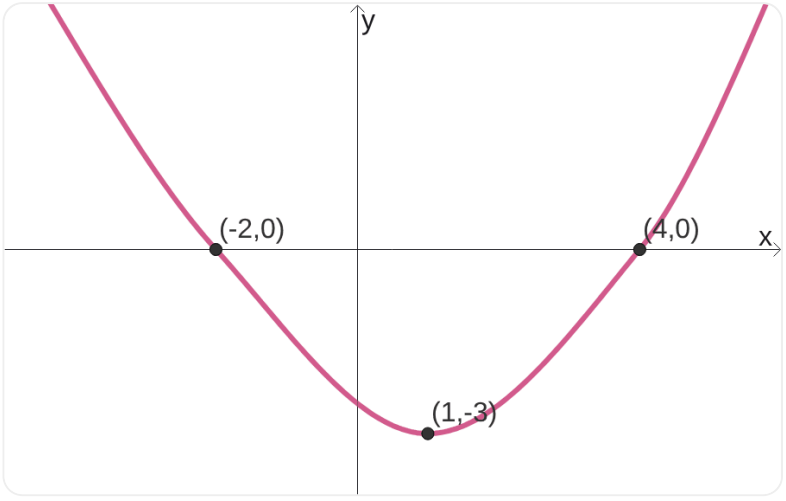
איפה $f'(x)>0$ – $f(x)$ עולה; איפה $f'(x)<0$ – יורדת; שורש של $f'(x)$ שבו יש החלפת סימן – קיצון של $f(x)$. זוגית: $f(x)=f(-x)$ (סימטריה לציר y); אי-זוגית: $f(-x)=-f(x)$ (סימטריה לראשית). ב-$f^2(x)$: הגרף תמיד מעל ציר x, ובכל שורש של $f(x)$ יש מינימום.

צפו לפני שמתחילים:

פונקציה זוגית ואי-זוגית
YouTube · 11:29

טרנספורמציה – הפונקציה בריבוע
YouTube · 5:40

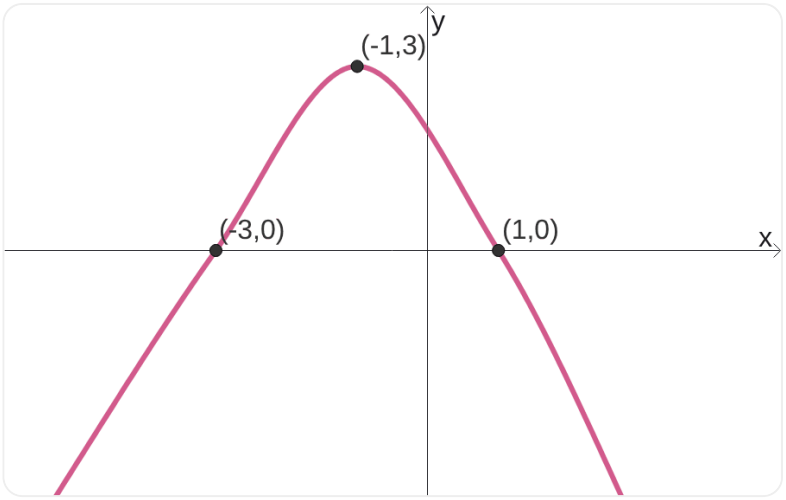
1 בציור גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.



2 (לפי הציור של תרגיל 1) מצאו את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן.

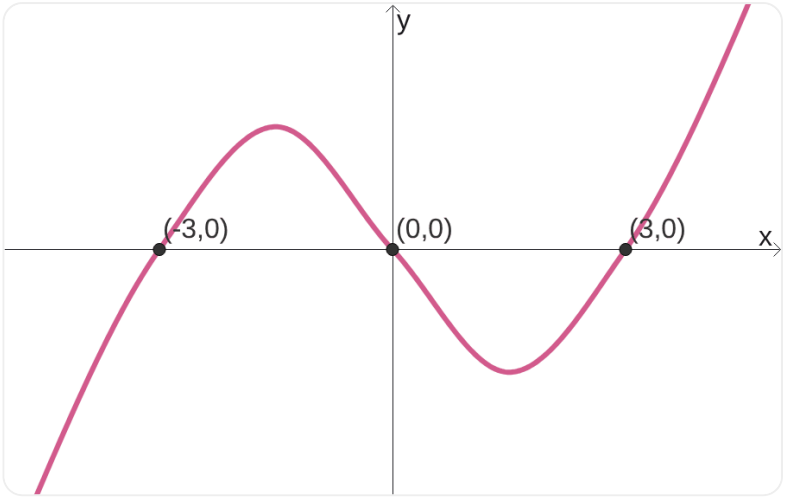
3 (לפי הציור של תרגיל 1) באיזה ערך x השיפוע של $f(x)$ הוא הקטן ביותר? מהו השיפוע שם?

4 בציור גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$ ואת שיעורי ה-x של נקודות הקיצון.



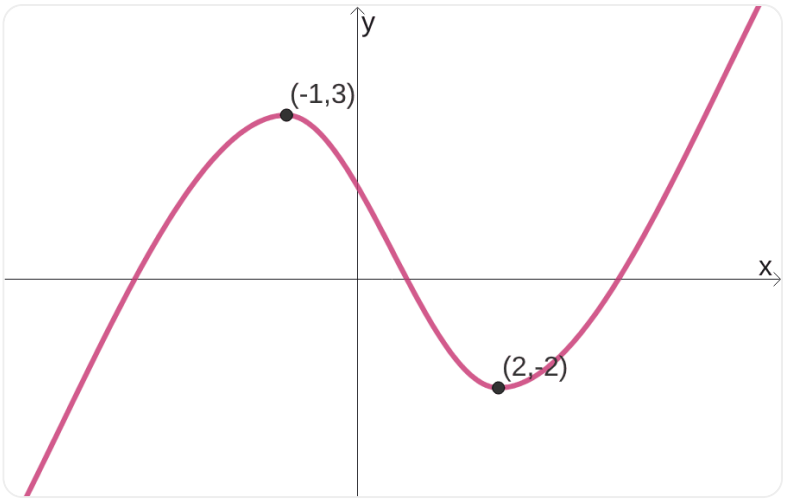
5 (לפי הציור של תרגיל 4) סדרו לפי הגודל: $f(-3)$, $f(-1)$, $f(1)$. נמקו.

6 בציור גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. מצאו את שיעורי ה-x של כל נקודות הקיצון של $f(x)$ וסווגו אותן.



7 (לפי הציור של תרגיל 6) ידוע ש-$f(x)$ זוגית ו-$f(3)=-4$. מהו $f(-3)$ ומה סוג הנקודה $(-3,f(-3))$?

8 בציור גרף הפונקציה $f(x)$. באילו תחומים $f'(x)>0$ ובאילו $f'(x)<0$?



9 (לפי הציור של תרגיל 8) פתרו את המשוואה $f'(x)=0$.

10 (לפי הציור של תרגיל 8) מה הסימן של $f'(0)$? ושל $f'(4)$?

11 $f'(x)=(x-2)(x+4)$. בלי לחשב את $f(x)$, מצאו את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון וסווגו אותן.

12 $f'(x)=x^2(x-3)$. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$. האם ב-$x=0$ יש קיצון?

13 $f'(x)=-(x-1)^2$. האם יש ל-$f(x)$ נקודות קיצון? מה אפשר לומר על $f(x)$?

14 $f(x)$ פולינום ממעלה שלישית עם מקסימום ב-$x=1$ ומינימום ב-$x=5$. איזו נגזרת מתאימה: (1) $f'(x)=(x-1)(x-5)$ (2) $f'(x)=-(x-1)(x-5)$?

15 $f(x)=x^4-5x^2$. קבעו אם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או אף אחת מהן. הוכיחו בעזרת $f(-x)$.

16 $f(x)=x^3-2x$. קבעו אם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או אף אחת מהן. הוכיחו בעזרת $f(-x)$.

17 $f(x)=x^2+x$. קבעו אם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או אף אחת מהן. הוכיחו בעזרת $f(-x)$.

18 $f(x)=3$. קבעו אם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או אף אחת מהן. הוכיחו בעזרת $f(-x)$.

19 $f(x)=x\left(x^2-1\right)$. קבעו אם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או אף אחת מהן. הוכיחו בעזרת $f(-x)$.

20 $f(x)=(x+2)^2$. קבעו אם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או אף אחת מהן. הוכיחו בעזרת $f(-x)$.

21 $f(x)=x^4+x^2+1$. קבעו אם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או אף אחת מהן. הוכיחו בעזרת $f(-x)$.

22 $f(x)=x^5-x$. קבעו אם $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או אף אחת מהן. הוכיחו בעזרת $f(-x)$.

23 $f(x)=x^4+ax^3+x^2$. מצאו את a שעבורו $f(x)$ זוגית.

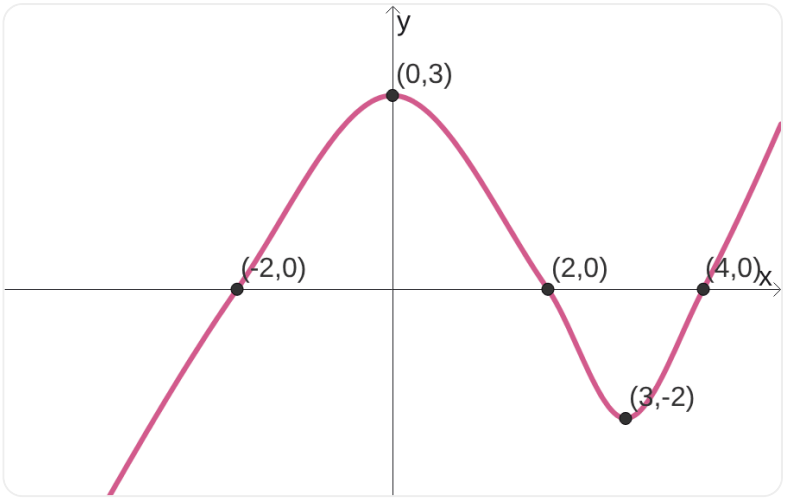
24 $f(x)$ אי-זוגית, ו- $f(2)=5$. מצאו את $f(-2)$.

25 $f(x)$ זוגית, ולה נקודת מינימום $(3,-1)$. מצאו נקודת קיצון נוספת וסווגו אותה.

26 $f(x)$ אי-זוגית, ולה נקודת מקסימום $(2,6)$. מצאו נקודת קיצון נוספת וסווגו אותה.

27 $f(x)$ זוגית ויורדת בתחום $x>0$. מה אפשר לומר על $f(x)$ בתחום $x<0$?

28 בציור גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. $g(x)=f^2(x)$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגן.



29 (לפי הציור של תרגיל 28) $g(x)=f^2(x)$. באילו נקודות הגרף של $g(x)$ משיק לציר x?

30 (לפי הציור של תרגיל 28) $g(x)=f^2(x)$. האם יש ערכי x שבהם $g(x)<0$? נמקו.

31 $f(x)=x^2-1$ ו-$g(x)=f^2(x)$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ וסווגו אותן.

32 $f(x)=x-3$ ו-$g(x)=f^2(x)$. מהי נקודת הקיצון של $g(x)$? איזו צורה יש לגרף של $g(x)$?

✔ תשובות סופיות – נושא 16.2

1. עלייה: $x<-2$, $x>4$; ירידה: $-2<x<4$
2. $x=-2$ מקסימום, $x=4$ מינימום
3. $x=1$; -3
4. עלייה: $-3<x<1$; ירידה: $x<-3$, $x>1$; $x=-3$ מינימום, $x=1$ מקסימום
5. $f(-3)<f(-1)<f(1)$ – הפונקציה עולה בתחום $-3<x<1$
6. $x=-3$ מינימום, $x=0$ מקסימום, $x=3$ מינימום
7. $f(-3)=-4$; מינימום
8. $f'(x)>0$: $x<-1$, $x>2$; $f'(x)<0$: $-1<x<2$
9. $x=-1$, $x=2$
10. $f'(0)<0$; $f'(4)>0$
11. $x=-4$ מקסימום, $x=2$ מינימום
12. עלייה: $x>3$; ירידה: $x<3$; ב-$x=0$ אין קיצון
13. אין קיצון ; $f(x)$ יורדת לכל x
14. (1)
15. זוגית
16. אי-זוגית
17. לא זוגית ולא אי-זוגית
18. זוגית
19. אי-זוגית
20. לא זוגית ולא אי-זוגית
21. זוגית
22. אי-זוגית
23. $a=0$

24 $f(-2)=-5$

25 $(-3,-1)$ מינימום

26 $(-2,-6)$ מינימום

27 עולה

28 $(-2,0)$ מינימום, $(0,9)$ מקסימום, $(2,0)$ מינימום, $(3,4)$ מקסימום, $(4,0)$ מינימום

29 $(-2,0)$, $(2,0)$, $(4,0)$

30 לא - $g(x)=f^2(x)\geq 0$ לכל x

31 $(-1,0)$ מינימום, $(0,1)$ מקסימום, $(1,0)$ מינימום

32 $(3,0)$ מינימום ; פרבולה

פרק 16 סיכומון סוף פרק – מורכבת ומכפלה

נגזרת של פונקציה מורכבת

- $[(u)^n]' = n\,u^{n-1}\cdot u'$.
- דוגמה: $\left[(2x+5)^3\right]' = 3(2x+5)^2\cdot 2$.
- בפנימית עם מינוס: $\left[(4-x)^5\right]' = -5(4-x)^4$.

נגזרת של מכפלה

- $(u\cdot v)' = u'v + uv'$.
- אחרי הגזירה – מוציאים גורם משותף (למשל $(x-1)^2$).
- כך קל לפתור $f'(x)=0$: כל גורם בנפרד שווה 0.

חקירת מכפלה

- שורשי $f'(x)$ – גם מהגורמים המשותפים.
- שורש בחזקה זוגית של $f'(x)$ – אין החלפת סימן, אין קיצון.
- שורש כפול של $f(x)$ – נקודת קיצון על ציר x.

מגרף הנגזרת לפונקציה

- $f'(x)>0$ (מעל הציר) – $f(x)$ עולה.
- $f'(x)<0$ (מתחת לציר) – $f(x)$ יורדת.
- $f'(x)$ חותך את הציר – קיצון; משיק לציר – אין קיצון.
- הנקודה הנמוכה/הגבוהה של $f'(x)$ – השיפוע הקטן/הגדול ביותר.

זוגית ואי-זוגית

- זוגית: $f(-x)=f(x)$ – סימטריה לציר y; קיצון משתקף עם אותו סוג.
- אי-זוגית: $f(-x)=-f(x)$ – סימטריה לראשית; מקסימום הופך למינימום.
- פולינום עם חזקות זוגיות בלבד – זוגי; אי-זוגיות בלבד – אי-זוגי.

הטרנספורמציה $f^2(x)$

- $f^2(x)\geq 0$ – הגרף לא יורד מתחת לציר x.
- בכל שורש של $f(x)$ – מינימום של $f^2(x)$ (משיק לציר).
- קיצון של $f(x)$ בגובה y_0 – קיצון של $f^2(x)$ בגובה y_0^2.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לשכוח לכפול בנגזרת הפנימית במורכבת.
- לגזור מכפלה כמכפלת הנגזרות – זה לא נכון!
- לבלבל בין גרף $f'(x)$ לגרף $f(x)$ – תמיד לבדוק מה מצויר.
- ב-$f^2(x)$ לשכוח שקיצון שלילי הופך לחיובי (וסוגו יכול להשתנות).

💡 **הטיפ של אילון:** כשנתון גרף של $f'(x)$ – תשכחו מהצורה שלו. תסתכלו רק על הסימן: מעל הציר – עולה, מתחת – יורדת. זה הכול.

פרק 17

חקירת פונקציית שורש

תחום הגדרה, נגזרת, קיצון קצה – והטרנספורמציה $\sqrt{f(x)}$

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

17.1 תחום הגדרה, נגזרת וחקירת פונקציית שורש

37 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



חקירת פונקציית שורש – תחום הגדרה

YouTube · 15:15



חקירת פונקציית שורש – חקירה מלאה

YouTube · 10:57



חקירת פונקציית שורש – נגזרת

YouTube · 11:33



פונקציית השורש – טרנספורמציה

YouTube · 4:53

🎛️ המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף



$\sqrt{f(x)}$

$|f(x)|$ ו-

בחרו פונקציה $f(x)$ וראו מה נמחק ומה נשאר כשמוציאים ממנה שורש.

17.1 תחום הגדרה, נגזרת וחקירת פונקציית שורש

שורש מוגדר רק כשהביטוי שבתוכו ≥ 0 (במכנה – > 0). נגזרת: $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
בחקירה בודקים גם את **נקודות הקצה** של התחום – הן יכולות להיות נקודות קיצון.
ב-$\sqrt{f(x)}$: התחום הוא איפה ש-$f(x) \geq 0$, והשורשים של $f(x)$ הופכים לקיצון קצה.

צפו לפני שמתחילים:



חקירת פונקציית שורש – תחום הגדרה
YouTube · 15:15



חקירת פונקציית שורש – נגזרת
YouTube · 11:33



חקירת פונקציית שורש – נקודות קיצון קצה
YouTube · 3:44



טרנספורמציה – שורש לפונקציה
YouTube · 8:20

1 $f(x) = \sqrt{x-5}$. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$.

2 $f(x) = \sqrt{8-2x}$. מצאו את תחום ההגדרה. שימו לב לכיוון אי-השוויון כשמחלקים במספר שלילי.

3 $f(x) = \sqrt{x^2-4}$. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$.

4 $f(x) = \sqrt{9-x^2}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת נקודות החיתוך עם הצירים.

5 $f(x) = \sqrt{x^2-6x+8}$. מצאו את תחום ההגדרה בעזרת סקיצה של הפרבולה x^2-6x+8.

6 $f(x) = \sqrt{x^2+4}$. הראו שהפונקציה מוגדרת לכל x, ומצאו את נקודת החיתוך עם ציר y.

7 $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{6-x}$. מצאו את תחום ההגדרה (שני השורשים צריכים להיות מוגדרים יחד).

8 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$. מצאו את תחום ההגדרה. מדוע $x = -2$ אינו בתחום?

9 $f(x)=\sqrt{4x+1}$. גזרו את $f(x)$.

10 $f(x)=\sqrt{x^2+16}$. גזרו את $f(x)$ ומצאו את $f'(3)$.

11 $f(x)=6\sqrt{x}$. מצאו את $f'(x)$ ואת שיפוע המשיק בנקודה שבה $x=9$.

12 $f(x)=\sqrt{x}-\frac{x}{2}$. מצאו את הנקודה שבה $f'(x)=0$.

13 $f(x)=\sqrt{10-x}$. גזרו את $f(x)$. מדוע הנגזרת שלילית בכל התחום?

14 $f(x)=\sqrt{2x+1}$. מצאו את משוואת המשיק לגרף בנקודה שבה $x=4$.

15 $f(x)=\sqrt{x}$. באיזו נקודה שיפוע המשיק לגרף הוא $\frac{1}{6}$?

16 $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$. כתבו את $f(x)$ כחזקה $x^{\frac{3}{2}}$ וגזרו.

17 $f(x)=\sqrt{x}\,(x-3)$. גזרו בכלל המכפלה ומצאו היכן $f'(x)=0$.

18 $f(x)=\sqrt{x^2-6x+10}$. גזרו את $f(x)$ ומצאו היכן $f'(x)=0$.

19 $f(x)=\sqrt{x+a}$. גרף $f(x)$ עובר בנקודה $(3,2)$. מצאו את a ואת תחום ההגדרה.

20 $f(x)=\sqrt{a-x}$. תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא $x\le 7$. מצאו את a ואת $f(3)$.

21 $f(x)=\sqrt{x}$ ו- $g(x)=\frac{x}{3}$. מצאו את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

22 $f(x)=\sqrt{x}\,(x-12)$ (שורש מכפלה). חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון (כולל קצה), תחומי עלייה וירידה. סרטטו סקיצה.

23 $f(x)=-4\sqrt{x}+x$ (פולינום פחות שורש). חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון (כולל קצה), תחומי עלייה וירידה. סרטטו סקיצה.

24 $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ (חצי מעגל). חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון (כולל קצה), תחומי עלייה וירידה. סרטטו סקיצה.

25 $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ (שני קטעים בתחום). חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון (כולל קצה), תחומי עלייה וירידה. סרטטו סקיצה.

26 $f(x)=x\sqrt{3-x}$ (מכפלה עם תחום חסום מימין). חקרו את $f(x)$: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון (כולל קצה), תחומי עלייה וירידה. סרטטו סקיצה.

27 $f(x)=\sqrt{x+4}-2$. מצאו את נקודת הקיצון של $f(x)$ (קצה) ואת נקודות החיתוך עם הצירים.

28 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה.

29 $f(x)=x\sqrt{x+3}$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ (כולל קצה) וקבעו את סוגן.

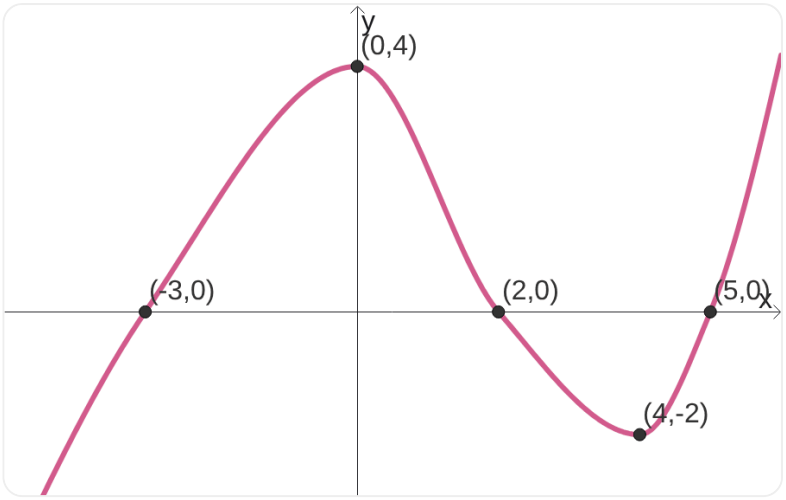
30 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$. מצאו את נקודות הקיצון (כולל קצוות) ואת הערך הגדול ביותר של $f(x)$.

31 $f(x)=\sqrt{x}(x-a)$ כאשר $a>0$. לפונקציה נקודת מינימום ב-$x=2$. מצאו את a.

32 $f(x)=x^2-4$ ו-$g(x)=\sqrt{f(x)}$. מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$ ואת נקודות הקיצון שלה.

33 $f(x)=-x^2+2x+8$ ו-$g(x)=\sqrt{f(x)}$. מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$ ואת נקודת המקסימום שלה.

34 בציור גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x; משמאל הגרף יורד למינוס אינסוף ומימין עולה לאינסוף. $g(x)=\sqrt{f(x)}$. מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$.



35 (לפי הציור של התרגיל הקודם) $g(x)=\sqrt{f(x)}$. מצאו את נקודת המקסימום של $g(x)$ בתחום $-3\le x\le 2$.

36 (לפי הציור של התרגיל הקודם) $g(x)=\sqrt{f(x)}$. מהן נקודות הקיצון בקצוות התחום של $g(x)$, ומה סוגן?

37 $g(x)=\sqrt{f(x)}$. הסבירו מדוע בכל תחום שבו $g(x)$ מוגדרת, ל-$g(x)$ ול-$f(x)$ אותם תחומי עלייה וירידה.

✔ תשובות סופיות – נושא 17.1

1	$x \geq 5$
2	$x \leq 4$
3	$x \leq -2$ או $x \geq 2$
4	$-3 \leq x \leq 3$; ציר x: $(-3,0)$, $(3,0)$; ציר y: $(0,3)$
5	$x \leq 2$ או $x \geq 4$
6	כל x ($x^2+4>0$) ; $(0,2)$
7	$0 \leq x \leq 6$
8	$x > -2$; המכנה מתאפס
9	$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$
10	$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$; $f'(3) = \frac{3}{5}$
11	$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$; 1
12	$(1, \frac{1}{2})$
13	$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{10-x}}$; המונה שלילי והמכנה חיובי
14	$y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$
15	$(9,3)$
16	$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
17	$f'(x) = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}$; $x = 1$
18	$f'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+10}}$; $x = 3$
19	$a = 1$; $x \geq -1$
20	$a = 7$; $f(3) = 2$
21	$(0,0)$, $(9,3)$
22	תחום: $x \geq 0$; ציר x: $(0,0)$, $(12,0)$; ציר y: $(0,0)$; קיצון: $(0,0)$ מקסימום (קצה), $(4,-16)$ מינימום ; עולה: $x > 4$; יורדת: $0 < x < 4$

23 תחום: $x \geq 0$; ציר x: $(0,0)$, $(16,0)$; ציר y: $(0,0)$; קיצון: $(0,0)$ מקסימום (קצה), $(4,-4)$ מינימום ; עולה: $x > 4$; יורדת: $0 < x < 4$

24 תחום: $-4 \leq x \leq 4$; ציר x: $(-4,0)$, $(4,0)$; ציר y: $(0,4)$; קיצון: $(-4,0)$ מינימום (קצה), $(0,4)$ מקסימום, $(4,0)$ מינימום (קצה) ; עולה: $-4 < x < 0$; יורדת: $0 < x < 4$

25 תחום: $x \leq -3$ או $x \geq 3$; ציר x: $(-3,0)$, $(3,0)$; ציר y: אין ; קיצון: $(-3,0)$ מינימום (קצה), $(3,0)$ מינימום (קצה) ; עולה: $x > 3$; יורדת: $x < -3$

26 תחום: $x \leq 3$; ציר x: $(0,0)$, $(3,0)$; ציר y: $(0,0)$; קיצון: $(2,2)$ מקסימום, $(3,0)$ מינימום (קצה) ; עולה: $x < 2$; יורדת: $2 < x < 3$

27 $(-4,-2)$ מינימום (קצה) ; ציר x: $(0,0)$; ציר y: $(0,0)$

28 $(1,2)$ מינימום ; עולה: $x > 1$; יורדת: $x < 1$

29 $(-3,0)$ מקסימום (קצה), $(-2,-2)$ מינימום

30 $(0,2)$ מינימום (קצה), $(2,2\sqrt{2})$ מקסימום, $(4,2)$ מינימום (קצה) ; ערך גדול ביותר $2\sqrt{2}$

31 $a = 6$

32 $x \leq -2$ או $x \geq 2$; $(-2,0)$, $(2,0)$ מינימום (קצה)

33 $-2 \leq x \leq 4$; $(1,3)$ מקסימום

34 $-3 \leq x \leq 2$ או $x \geq 5$

35 $(0,2)$

36 $(-3,0)$, $(2,0)$, $(5,0)$ – מינימום (קצה)

37 השורש פונקציה עולה – שומר על כיוון העלייה/ירידה

פרק 17 סיכומון סוף פרק – חקירת פונקציית שורש

תחום הגדרה

- $\sqrt{u}$ מוגדר כאשר $u \geq 0$.
- $\frac{1}{\sqrt{u}}$ מוגדר כאשר $u > 0$ (שורש במכנה).
- תוך ריבועי – פותרים אי-שוויון ריבועי בעזרת סקיצה של פרבולה.
- סכום של שני שורשים – חיתוך של שני התחומים.

סדר חקירה

- תחום הגדרה – תמיד ראשון.
- חיתוך עם הצירים (ציר y רק אם $x = 0$ בתחום).
- נגזרת, $f'(x) = 0$ וטבלת סימנים **בתוך התחום**.
- קיצון קצה: בודקים עלייה/ירידה ליד הקצה.

נגזרת

- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- מכפלה $\sqrt{x} \cdot g(x)$ – כלל המכפלה ואז מכנה משותף.
- $f'(x) = 0$ כאשר **המונה** מתאפס.

קיצון קצה

- בקצה שמאלי: אם הפונקציה עולה אחריו – מינימום; יורדת – מקסימום.
- בקצה ימני: אם הפונקציה עולה לפניו – מקסימום; יורדת – מינימום.

הטרנספורמציה $\sqrt{f(x)}$

- מוגדרת רק היכן ש-$f(x) \geq 0$ – החלקים מתחת לציר נמחקים.
- שורשי $f(x)$ – נקודות קיצון קצה (מינימום) של $\sqrt{f(x)}$.
- קיצון של $f(x)$ בגובה $y_0 > 0$ – קיצון מאותו סוג בגובה $\sqrt{y_0}$.
- תחומי העלייה והירידה נשמרים.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לשכוח את תחום ההגדרה ולהציב x שלא בתחום.
- לשכוח את הנגזרת הפנימית u' בגזירת $\sqrt{u}$.
- לא לבדוק את נקודות הקצה כנקודות קיצון.
- לחשוב שהנגזרת מתאפסת כשהמכנה מתאפס – שם היא **לא מוגדרת**.

💡 **הטיפ של אילון:** בפונקציית שורש, לפני כל דבר אחר – תחום הגדרה. זה ה'מפה' של השאלה: בלעדיו כל טבלת סימנים יכולה לצאת שגויה.

פרק 18

חקירת פונקציית מנה

תחום הגדרה, אסימפטוטות, נגזרת, קיצון, חקירה מלאה ופרמטרים

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

18.1 **תחום הגדרה ואסימפטוטות – אנכית ואופקית** — 33 תרגילים

18.2 **נגזרת, נקודות קיצון וחקירה מלאה של פונקציית מנה** — 32 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



פונקציה רציונלית – תחום הגדרה ואסימפטוטה אנכית

YouTube · 7:58



חקירת פונקציה – מציאת אסימפטוטה אופקית

YouTube · 10:53



חקירת פונקציה רציונלית – נגזרת

YouTube · 11:05



חקירת פונקציית מנה – הסבר מלא

YouTube · 18:47

🧩 המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף



מעבדת פונקציית מנה

שנו את המקדמים בפונקציה $f(x)=\frac{ax+b}{x-c}$ וראו איך האסימפטוטה האנכית והאופקית זזות.

18.1 תחום הגדרה ואסימפטוטות – אנכית ואופקית

תחום ההגדרה: המכנה שונה מאפס. ערך שמאפס את המכנה (ולא את המונה) – **אסימפטוטה אנכית**. אסימפטוטה אופקית: מעלת המונה קטנה ממעלת המכנה – $y=0$; מעלות שוות – יחס המקדמים המובילים; מעלת המונה גדולה – אין אסימפטוטה אופקית.

צפו לפני שמתחילים:

פונקציה רציונלית – תחום הגדרה ואסימפטוטה אנכית
YouTube · 7:58

חקירת פונקציה – מציאת אסימפטוטה אופקית
YouTube · 10:53

קדם אנליזה – טיפ לאסימפטוטה אנכית
YouTube · 2:29

1. $f(x)=\frac{1}{x-2}$. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$.

2. $f(x)=\frac{3}{x+5}$. מצאו את האסימפטוטה האנכית של $f(x)$.

3. $f(x)=\frac{x+1}{x-4}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטות של $f(x)$ המקבילות לצירים.

4. $f(x)=\frac{2x-6}{x+1}$. מצאו את האסימפטוטה האופקית של $f(x)$ ואת נקודות החיתוך של $f(x)$ עם הצירים.

5. $f(x)=\frac{4}{x^2-16}$. כמה אסימפטוטות אנכיות יש ל-$f(x)$? מצאו אותן.

6. $f(x)=\frac{x^2+3}{x^2+1}$. הראו ש-$f(x)$ מוגדרת לכל x, ומצאו את האסימפטוטה האופקית.

7. $f(x)=\frac{5}{x^2+4}$. מדוע אין ל-$f(x)$ אסימפטוטה אנכית? מהי האסימפטוטה האופקית?

8. $f(x)=\frac{3x}{x-2}$. מצאו את האסימפטוטות. מה הקשר בין המקדמים לאסימפטוטה האופקית?

9 $f(x)=\frac{6x+1}{2x-4}$. מצאו את האסימפטוטות של $f(x)$.

10 $f(x)=\frac{x}{x^2-x-6}$. פרקו את המכנה, ומצאו את תחום ההגדרה ואת כל האסימפטוטות.

11 $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-9}$. מצאו את כל האסימפטוטות ואת נקודות החיתוך עם הצירים.

12 $f(x)=\frac{1-2x}{x+3}$. שימו לב לסדר האיברים במונה: מהי האסימפטוטה האופקית?

13 $f(x)=\frac{x+2}{x^2+2x-8}$. מצאו את האסימפטוטות האנכיות ואת נקודת החיתוך של $f(x)$ עם ציר x.

14 $f(x)=\frac{2}{x}$. מצאו את האסימפטוטות של $f(x)$. האם הגרף חותך את אחד הצירים?

15 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$. לאן שואף $f(x)$ כאשר $x\to -1$ מימין? ומשמאל?

16 $f(x)=\frac{3}{(x-1)^2}$. לאן שואף $f(x)$ משני צידי האסימפטוטה האנכית? מה מיוחד בה?

17 $f(x)=\frac{2x+3}{x}$. כתבו את $f(x)$ כסכום של מספר ושבר, והסבירו בעזרת זה את האסימפטוטה האופקית.

18 $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$. האם יש ל-$f(x)$ אסימפטוטה אופקית? נמקו, ומצאו את האסימפטוטה האנכית.

19 $f(x)=\frac{4x^2}{x^2+2x-3}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת כל האסימפטוטות.

20 $f(x)=\frac{x+3}{x^2+1}$. מצאו את האסימפטוטה האופקית ואת נקודות החיתוך של $f(x)$ עם הצירים.

21 $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2+1}$. בדקו אם גרף $f(x)$ חותך את האסימפטוטה האופקית שלו.

22 $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+1}$. מצאו את נקודת החיתוך של $f(x)$ עם האסימפטוטה האופקית שלו.

23 $f(x)=\frac{ax+1}{x-3}$, והאסימפטוטה האופקית של $f(x)$ היא $y=2$. מצאו את a, ואת נקודות החיתוך של $f(x)$ עם הצירים.

24 $f(x)=\frac{4x-1}{x-b}$, והאסימפטוטה האנכית של $f(x)$ היא $x=2$. מצאו את b ואת האסימפטוטה האופקית.

25 $f(x)=\frac{ax+6}{x+b}$. לגרף $f(x)$ אסימפטוטה אנכית $x=-3$ ואסימפטוטה אופקית $y=-2$. מצאו את a ואת b.

26 $f(x)=\frac{ax^2+2}{x^2-b}$. לגרף $f(x)$ אסימפטוטה אופקית $y=3$ ואסימפטוטה אנכית $x=2$. מצאו את a ואת b, ואת האסימפטוטה האנכית השנייה.

27 $f(x)=\frac{ax-4}{x+b}$. גרף $f(x)$ חותך את ציר y בנקודה $(0,-2)$, והאסימפטוטה האופקית שלו היא $y=1$. מצאו את a ואת b.

28 $f(x)=\frac{3x+a}{x-2}$ עובר בנקודה $(1,-5)$. מצאו את a ואת נקודת החיתוך של $f(x)$ עם ציר x.

29 $f(x)=\frac{x+2}{x^2+bx+9}$. מצאו את ערכי b שעבורם אין ל-$f(x)$ אסימפטוטה אנכית.

30 $f(x)=\frac{2x+1}{x^2-6x+k}$. מצאו את k שעבורו יש ל-$f(x)$ אסימפטוטה אנכית אחת בלבד, ומצאו אותה.

31 $f(x)=\frac{x-2}{x+4}$. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)$ (שימו לב לאסימפטוטה!).

32 שרטטו סקיצה של פונקציה $f(x)$ שתחום הגדרתה $x\neq 1$, האסימפטוטה האופקית שלה $y=-2$, והיא חותכת את ציר x ב-$(3,0)$. רשמו נוסחה מתאימה מהצורה $\frac{ax+b}{x+c}$.

33 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4}$. מצאו את תחום ההגדרה, את כל האסימפטוטות, את נקודות החיתוך עם הצירים ואת תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)$.

✔ תשובות סופיות – נושא 18.1

1	$x \neq 2$
2	$x = -5$
3	תחום: $x \neq 4$; אנכית: $x = 4$; אופקית: $y = 1$
4	$y = 2$; ציר x: $(3,0)$; ציר y: $(0,-6)$
5	שתיים: $x = -4$, $x = 4$
6	המכנה $x^2 + 1 > 0$; $y = 1$
7	$x^2 + 4 \neq 0$ לכל x ; $y = 0$
8	אנכית: $x = 2$; אופקית: $y = 3$ – יחס המקדמים $\frac{3}{1}$
9	אנכית: $x = 2$; אופקית: $y = 3$
10	תחום: $x \neq -2,\ 3$; אנכית: $x = -2$, $x = 3$; אופקית: $y = 0$
11	אנכיות: $x = -3$, $x = 3$; אופקית: $y = 1$; ציר x: $(-2,0)$, $(2,0)$; ציר y: $(0,\frac{4}{9})$
12	$y = -2$
13	$x = -4$, $x = 2$; ציר x: $(-2,0)$
14	אנכית: $x = 0$; אופקית: $y = 0$; לא חותך את הצירים
15	מימין: $f(x) \to -\infty$; משמאל: $f(x) \to \infty$
16	משני הצדדים $f(x) \to \infty$ – הגרף עולה משני הצדדים של $x = 1$
17	$f(x) = 2 + \frac{3}{x}$; כאשר $x \to \pm\infty$ השבר שואף ל-0, ולכן $y = 2$
18	אין אסימפטוטה אופקית – מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה ; אנכית: $x = 1$
19	תחום: $x \neq -3,\ 1$; אנכית: $x = -3$, $x = 1$; אופקית: $y = 4$
20	$y = 0$; ציר x: $(-3,0)$; ציר y: $(0,3)$
21	$y = 2$; לא חותך ($2x^2 - 1 = 2x^2 + 2$ אין פתרון)
22	$y = 1$; $(1,1)$
23	$a = 2$; ציר x: $(-\frac{1}{2},0)$; ציר y: $(0,-\frac{1}{3})$

24 $y=4$; $b=2$

25 $b=3$,$a=-2$

26 $x=-2$; $b=4$,$a=3$

27 $b=2$,$a=1$

28 $\left(-\frac{2}{3},0\right)$; $a=2$

29 $-6<b<6$

30 $x=3$; $k=9$

31 חיובית: $x<-4$ או $x>2$; שלילית: $-4<x<2$

32 לדוגמה $f(x)=\frac{-2x+6}{x-1}$

33 תחום: $x\neq -2,\ 2$; אנכית: $x=-2$, $x=2$; אופקית: $y=1$; ציר x: $(-1,0)$, ציר y: $(1,0)$; חיובית: $x<-2$, $-1<x<1$; שלילית: $x>2$, $1<x<2$, $-2<x<-1$

18.2 נגזרת, נקודות קיצון וחקירה מלאה של פונקציית מנה

כלל המנה: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$. נקודות חשודות לקיצון: $f'(x)=0$ בתוך תחום ההגדרה.
בטבלת הסימנים מכניסים גם את האסימפטוטות האנכיות – הפונקציה יכולה להחליף כיוון גם שם, אבל אין שם נקודת קיצון!

צפו לפני שמתחילים:



חקירת פונקציה רציונלית – נגזרת
YouTube · 11:05



פונקציית מנה – תרגיל מסכם ודגשים
YouTube · 20:40



חקירת פונקציית מנה עם פרמטר
YouTube · 21:40



איך מוצאים פרמטר בפונקציה? כל השיטות
YouTube · 6:41

1. $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$. גזרו את $f(x)$ ופשטו את הנגזרת.
2. $f(x)=\frac{x}{x+3}$. גזרו את $f(x)$, והראו שהנגזרת חיובית בכל תחום ההגדרה.
3. $f(x)=\frac{5}{x-2}$. גזרו את $f(x)$ (רמז: ניתן לגזור גם כ-$5(x-2)^{-1}$).
4. $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$. גזרו את $f(x)$ ומצאו את הנקודות שבהן $f'(x)=0$.
5. $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$. גזרו את $f(x)$ ופרקו את המונה של הנגזרת.
6. $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן.
7. $f(x)=\frac{x}{x^2+9}$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן.
8. $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$. האם יש לה נקודות קיצון?
9. $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.
10. $f(x)=\frac{4}{x^2+1}$. מצאו את נקודת הקיצון של $f(x)$ ואת תחומי העלייה והירידה.

11 $f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}$. מצאו את נקודת הקיצון של $f(x)$. מהו הערך הקטן ביותר של $f(x)$?

12 $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן.

13 $f(x)=\frac{2x-1}{x^2}$. מצאו את נקודת הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגה.

14 $f(x)=x+\frac{4}{x}$. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ ואת תחומי העלייה והירידה.

15 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$. מצאו את משוואת המשיק לגרף $f(x)$ בנקודה שבה $x=2$.

16 $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$. מצאו את משוואות המשיקים לגרף $f(x)$ המקבילים לציר x.

17 $f(x)=\frac{3}{x-1}$. מצאו את הנקודה על גרף $f(x)$ שבה שיפוע המשיק הוא -3 (שתי נקודות).

18 $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$. מצאו: תחום הגדרה, אסימפטוטות, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

19 $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$. מצאו: תחום הגדרה, אסימפטוטות, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

20 $f(x)=\frac{4x}{x^2+4}$. מצאו: תחום הגדרה, אסימפטוטות, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

21 $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$. מצאו: תחום הגדרה, אסימפטוטות, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

22 $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$. מצאו: תחום הגדרה, אסימפטוטות, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, וסרטטו סקיצה.

23 $f(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}$. מצאו את נקודת הקיצון ואת האסימפטוטה. היעזרו בהן כדי למצוא את תחום הערכים של $f(x)$.

24 $f(x)=\frac{4}{x^2+1}$. סרטטו סקיצה של $f(x)$, ומצאו לאילו ערכי k יש למשוואה $f(x)=k$ שני פתרונות.

25 $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$. היעזרו בנקודות הקיצון ובאסימפטוטה, ומצאו לאילו ערכי k אין למשוואה $f(x)=k$ פתרון.

26 $f(x)=\frac{ax^2}{x^2-b}$. לגרף $f(x)$ אסימפטוטה אופקית $y=2$ ואסימפטוטה אנכית $x=2$. מצאו את a ואת b, ואחר כך מצאו את נקודת הקיצון של $f(x)$ ואת תחומי העלייה והירידה.

27 $f(x)=\frac{ax}{x-b}$. לגרף $f(x)$ אסימפטוטה אופקית $y=3$ ואסימפטוטה אנכית $x=1$. מצאו את a ואת b, והראו ש-$f(x)$ יורדת בכל תחום הגדרתה.

28 $f(x)=\frac{x^2+a}{x-b}$. לגרף $f(x)$ אסימפטוטה אנכית $x=1$, והוא חותך את ציר y ב-$(0,-3)$. מצאו את a ואת b ואת נקודות הקיצון של $f(x)$.

29 $f(x)=\frac{x^2+a}{x}$. ל-$f(x)$ יש נקודת קיצון שבה $x=3$. מצאו את a ואת סוג הקיצון.

30 $f(x)=\frac{ax}{x^2+4}$ כאשר $a>0$. ערך המקסימום של $f(x)$ הוא 2. מצאו את a.

31 $f(x)=\frac{ax+1}{x-2}$. מצאו את ערכי a שעבורם $f(x)$ עולה בכל תחום הגדרתה.

32 $f(x)=\frac{x^2}{x-3}$. מצאו את נקודות הקיצון, ואת המרחק בין שתי נקודות הקיצון של $f(x)$.

✔ תשובות סופיות – נושא 18.2

1	$f'(x)=-\frac{2}{(x-1)^2}$
2	$f'(x)=\frac{3}{(x+3)^2}$ – מונה $3>0$ ומכנה בריבוע
3	$f'(x)=-\frac{5}{(x-2)^2}$
4	$f'(x)=-\frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$; $x=\pm 1$
5	$f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$
6	$(-2,-4)$ מקסימום, $(2,4)$ מינימום
7	$(-3,-\frac{1}{6})$ מינימום, $(3,\frac{1}{6})$ מקסימום
8	עולה: $x<-2$, $x>-2$; יורדת: אין ; אין נקודות קיצון
9	עולה: $x<0$, $x>4$; יורדת: $0<x<2$, $2<x<4$
10	$(0,4)$ מקסימום ; עולה: $x<0$; יורדת: $x>0$
11	$(0,0)$ מינימום ; 0
12	$(1,2)$ מקסימום, $(3,6)$ מינימום
13	$(1,1)$ מקסימום
14	$(-2,-4)$ מקסימום, $(2,4)$ מינימום ; עולה: $x<-2$, $x>2$; יורדת: $-2<x<0$, $0<x<2$
15	$y=7-2x$
16	$y=0$ ו-$y=-4$
17	$(0,-3)$ ו-$(2,3)$
18	תחום: $x\neq -1,1$; אנכית: $x=-1$, $x=1$; אופקית: $y=1$; ציר x: $(0,0)$; ציר y: $(0,0)$; $(0,0)$ מקסימום ; עולה: $x<-1$, $-1<x<0$; יורדת: $0<x<1$, $x>1$
19	תחום: $x\neq 0$; אנכית: $x=0$; אופקית: אין אסימפטוטה אופקית ; $(-1,-2)$ מקסימום, $(1,2)$ מינימום ; עולה: $x<-1$, $x>1$; יורדת: $-1<x<0$, $0<x<1$
20	תחום: כל x ; אנכית: אין אסימפטוטה אנכית ; אופקית: $y=0$; ציר x: $(0,0)$; ציר y: $(0,0)$; $(-2,-1)$ מינימום, $(2,1)$ מקסימום ; עולה: $-2<x<2$; יורדת: $x<-2$, $x>2$

21	תחום: $x \neq -1$; אנכית: $x = -1$; אופקית: אין אסימפטוטה אופקית ; ציר x: $(1,0)$; ציר y: $(0,1)$; מקסימום $(-3,-8)$, מינימום $(1,0)$; עולה: $x < -3$, $x > 1$; יורדת: $-3 < x < -1$, $-1 < x < 1$
22	תחום: $x \neq -2,\ 2$; אנכית: $x = -2$, $x = 2$; אופקית: $y = 0$; ציר x: אין ; ציר y: $(0,-\frac{1}{4})$; מקסימום $(0,-\frac{1}{4})$; עולה: $x < -2$, $-2 < x < 0$; יורדת: $0 < x < 2$, $x > 2$
23	מינימום $(0,0)$; $y = 2$; $0 \leq y < 2$
24	$0 < k < 4$
25	מקסימום $(0,0)$, מינימום $(2,4)$; $0 < k < 4$
26	$a = 2$, $b = 4$; מקסימום $(0,0)$; עולה: $x < -2$, $-2 < x < 0$; יורדת: $0 < x < 2$, $x > 2$
27	$a = 3$, $b = 1$; $f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}$; עולה: אין ; יורדת: $x < 1$, $x > 1$
28	$a = 3$, $b = 1$; מקסימום $(-1,-2)$, מינימום $(3,6)$
29	$a = 9$; מינימום $(3,6)$
30	$a = 8$
31	$a < -\frac{1}{2}$
32	מקסימום $(0,0)$, מינימום $(6,12)$; $\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

פרק 18 סיכומון סוף פרק – חקירת פונקציית מנה

תחום הגדרה

- המכנה שונה מאפס: פותרים מכנה $= 0$ ומוציאים את הפתרונות מהתחום.
- מכנה כמו x^2+4 – תמיד חיובי, ולכן הפונקציה מוגדרת לכל x.

אסימפטוטה אנכית

- ערך $x=a$ שמאפס את המכנה ולא את המונה.
- בודקים לאן $f(x)$ שואפת מימין ומשמאל ל-a: ∞ או $-\infty$.

אסימפטוטה אופקית

- מעלת המונה קטנה ממעלת המכנה: $y=0$.
- מעלות שוות: $y=$ יחס המקדמים המובילים, למשל $y=3 \leftarrow \frac{6x+1}{2x-4}$.
- מעלת המונה גדולה: אין אסימפטוטה אופקית.
- הגרף **יכול** לחתוך אסימפטוטה אופקית – בודקים בהשוואה $f(x)=c$.

נגזרת של מנה

- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.
- המכנה v^2 תמיד חיובי – הסימן של $f'(x)$ נקבע לפי המונה.
- $\left(\frac{k}{x-a}\right)' = -\frac{k}{(x-a)^2}$.

חקירה מלאה – הסדר

- תחום הגדרה ← אסימפטוטות ← חיתוך עם הצירים.
- נגזרת ← $f'(x)=0$ ← טבלה (כולל האסימפטוטות האנכיות!).
- נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה ← סקיצה.

פרמטרים

- אסימפטוטה אופקית נתונה ← מוצאים את המקדם במונה (a).
- אסימפטוטה אנכית נתונה $x=c$ ← מציבים במכנה: מכנה$(c)=0$.
- נקודה נתונה ← מציבים אותה בפונקציה.
- קיצון ב-$x=c$ ← $f'(c)=0$.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לשכוח את האסימפטוטה האנכית בטבלת הסימנים של $f'(x)$.
- לכתוב נקודת קיצון במקום שבו $f(x)$ לא מוגדרת.
- להחליף את הסדר בכלל המנה: $u'v-uv'$ – המונה קודם!
- לחשוב שהגרף לעולם לא חותך את האסימפטוטה האופקית.

💡 **הטיפ של אילון:** לפני שמתחילים לגזור – כתבו את האסימפטוטות על הציור. הן ה"שלד" של הגרף, וכל השאר רק נכנס לתוכו.

פרק 19

סיכום החקירות וטרנספורמציות

חזרה על כל כללי הגזירה, והזזות, מתיחות וערך מוחלט של גרפים

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

19.1 טכניקות גזירה, טרנספורמציות (הזזה, מתיחה, ערך מוחלט) וסעיפי חשיבה

45 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



טרנספורמציות בפונקציות – הזזות, מתיחות ושילובים

YouTube · 12:52



טרנספורמציית ערך מוחלט בפונקציות

YouTube · 4:42



קשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת

YouTube · 7:17



קדם אנליזה – הזזה בציר x

YouTube · 9:22

🎛️ המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף



מעבדת הטרנספורמציות

הזיזו מחוונים של a, b, h, k וראו בזמן אמת איך הופכת $f(x)$ ל-$a \cdot f(b(x-h)) + k$.



שורש וערך מוחלט של פונקציה

עברו בין $f(x)$ ל-$|f(x)|$ וראו איך החלקים שמתחת לציר מתהפכים.

19.1 טכניקות גזירה, טרנספורמציות (הזזה, מתיחה, ערך מוחלט) וסעיפי חשיבה

גזירה: חזקה $(x^n)' = nx^{n-1}$, מכפלה $(uv)' = u'v + uv'$, מנה $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, מורכבת $((g(x))^n)' = n(g(x))^{n-1}g'(x)$, שורש $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. טרנספורמציות: $f(x) + k$ – הזזה אנכית; $f(x-h)$ – הזזה אופקית ($h > 0$ ימינה); $a \cdot f(x)$ – מתיחה אנכית; $|f(x)|$ – כל מה שמתחת לציר x מתהפך למעלה, ונקודות החיתוך עם ציר x הופכות לנקודות מינימום.

צפו לפני שמתחילים:



טרנספורמציות בפונקציות – הזזות, מתיחות ושילובים
YouTube · 12:52



טרנספורמציית ערך מוחלט בפונקציות
YouTube · 4:42



נגזרת פולינום
YouTube · 11:51



חקירת פונקציה – סעיפי חשיבה (הזזות)
YouTube · 8:32

1 גזרו: $f(x) = x^4 - 3x^2 + 7x - 2$

2 גזרו: $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5$

3 גזרו: $f(x) = (x^2+1)(x-3)$ (בכלל המכפלה, או בפתיחת סוגריים)

4 גזרו: $f(x) = (2x-1)^5$ (נגזרת של פונקציה מורכבת)

5 גזרו: $f(x) = \frac{3}{x}$

6 גזרו: $f(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$

7 גזרו: $f(x) = \sqrt{x}$

8 גזרו: $f(x) = \sqrt{x^2+9}$

9 גזרו: $f(x)=x\sqrt{x}$ (רמז: $x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$)

10 גזרו: $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$

11 גזרו: $f(x)=\frac{x^2}{x+3}$

12 גזרו: $f(x)=(x^2-4)^3$

13 גזרו: $f(x)=x(x-2)^4$ (כלל המכפלה ונגזרת מורכבת)

14 גזרו: $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$

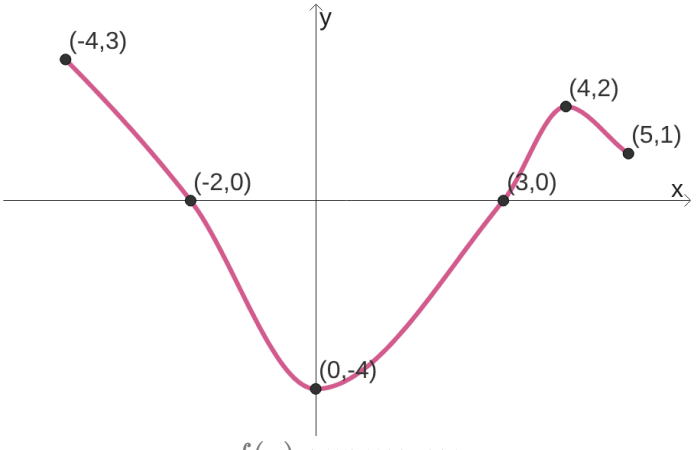
15 גזרו: $f(x)=\sqrt{4-x}$

16 $f(x)=x^3-3x$ ו-$g(x)=f(x-2)$. מצאו את $g'(3)$ בשתי דרכים: לפי כלל ההזזה ($g'(x)=f'(x-2)$), ובגזירה ישירה.

17 ידוע ש-$f'(2)=5$. מצאו את $g'(2)$ אם $g(x)=3f(x)+4$, ואת $h'(3)$ אם $h(x)=f(x-1)$.

18 המשיק לגרף $f(x)$ בנקודה $(1,2)$ הוא $y=3x-1$. מצאו את משוואת המשיק לגרף $g(x)=f(x)+4$ בנקודה שבה $x=1$.

תרגילים 19–27 בציור גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $-4\le x\le 5$.
בכל תרגיל נתונה פונקציה $g(x)$ שהתקבלה מ-$f(x)$.



גרף הפונקציה $f(x)$

19 $g(x)=f(x)+4$. מהו תחום הערכים של $g(x)$?

20 $g(x)=f(x-1)$. מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$ ואת נקודות החיתוך שלה עם ציר x.

21 $g(x)=f(x)+2$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ (כולל נקודות קצה) וקבעו את סוגן.

22 $g(x)=|f(x)|$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ (כולל נקודות קצה) ואת תחום הערכים שלה.

23 כמה פתרונות יש למשוואה $|f(x)|=4$? הסבירו בעזרת הגרף של $|f(x)|$.

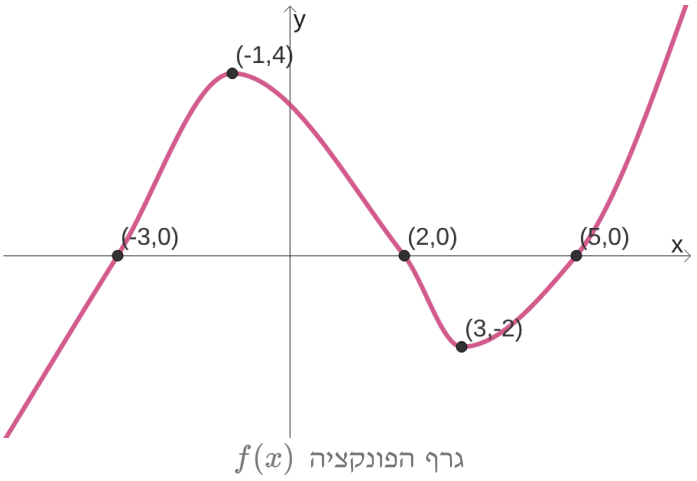
24 $g(x)=-f(x)+1$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ (כולל נקודות קצה) וקבעו את סוגן.

25 $g(x)=2f(x)$. מהו תחום הערכים של $g(x)$? אילו נקודות של $f(x)$ לא זזו?

26 $g(x)=f(x+2)-3$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ (כולל נקודות קצה).

27 $g(x)=f(x)+k$. מצאו את k שעבורו נקודת המינימום הפנימית של $g(x)$ נמצאת על ציר x. כמה נקודות חיתוך עם ציר x יש אז ל-$g(x)$?

תרגילים 28–37 בציור גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x. משמאל הגרף יורד למינוס אינסוף ומימין עולה לאינסוף.



גרף הפונקציה $f(x)$

28 $g(x)=f(x)-4$. מצאו את נקודת החיתוך של $g(x)$ עם ציר x. האם הגרף חותך או משיק?

29 $g(x)=f(x+3)$. מצאו את נקודות החיתוך של $g(x)$ עם ציר x.

30 $g(x)=|f(x)|$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגן.

31 לאילו ערכי k יש למשוואה $|f(x)|=k$ בדיוק ארבעה פתרונות? היעזרו בסקיצה של $|f(x)|$.

32 $g(x)=f(x)+k$. לאילו ערכי k יש ל-$g(x)$ בדיוק שתי נקודות חיתוך עם ציר x?

33 $g(x)=-f(x)$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגן.

34 $g(x)=f(2x)$. מצאו את נקודות החיתוך עם ציר x ואת נקודות הקיצון של $g(x)$.

35 פתרו את אי-השוויון $f(x-2)>0$.

36 $g(x)=\frac{1}{2}f(x)+1$. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגן.

37 סרטטו במחברת סקיצה של $g(x)=|f(x-1)|$. סמנו על הסקיצה את נקודות הקיצון ואת נקודות החיתוך עם הצירים שאפשר לדעת.

38 $f(x)=x^2-6x+5$. מצאו את נקודות הקיצון של $|f(x)|$, וכמה פתרונות יש למשוואה $|f(x)|=2$.

39 $f(x)=x^3-3x$. מצאו את ערכי k שעבורם לגרף $g(x)=f(x)+k$ יש בדיוק שתי נקודות חיתוך עם ציר x.

40 $f(x)=(x-1)^2$. מצאו את נקודות החיתוך של $g(x)=f(x+1)-4$ עם הצירים.

41 $f(x)=x^2-4$. מצאו את נקודת המקסימום של $|f(x)|$ בתחום $-2\le x\le 2$, ואת תחומי העלייה והירידה של $|f(x)|$ לכל x.

42 $f(x)=-x^2+2x+3$. איזו הזזה אנכית צריך לבצע כדי שהגרף יהיה משיק לציר x? מהי הפונקציה המתקבלת?

43 $f(x)=x^3$ ו-$g(x)=f(x-2)+1$. מצאו את נקודת הפיתול של $g(x)$, ונמקו בעזרת ההזזה.

44 $f(x)=\frac{2}{x}$. מצאו את האסימפטוטות של $g(x)=f(x-3)+1$.

45 $f(x)=\sqrt{x}$. מצאו את תחום ההגדרה ואת נקודת הקצה של $g(x)=f(x+4)-2$

.

✔ תשובות סופיות – נושא 19.1

1	$f'(x)=4x^3-6x+7$
2	$f'(x)=x^2-x$
3	$f'(x)=2x(x-3)+x^2+1=3x^2-6x+1$
4	$f'(x)=10(2x-1)^4$
5	$f'(x)=-\frac{3}{x^2}$
6	$f'(x)=-\frac{6}{x^4}+\frac{2}{x^3}$
7	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
8	$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$
9	$f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$
10	$f'(x)=-\frac{3}{(x-1)^2}$
11	$f'(x)=\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}$
12	$f'(x)=6x(x^2-4)^2$
13	$f'(x)=(x-2)^4+4x(x-2)^3=(x-2)^3(5x-2)$
14	$f'(x)=-\frac{2}{(x-2)^3}$
15	$f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$
16	$g'(3)=f'(1)=0$
17	$h'(3)=5\ ;\ g'(2)=15$
18	$y=3x+3$
19	$0\le y\le 7$
20	$-3\le x\le 6\ ;\ (-1,0)\ ,(4,0)$
21	$(-4,5)$ מקסימום (קצה), $(0,-2)$ מינימום, $(4,4)$ מקסימום, $(5,3)$ מינימום (קצה)
22	$(-4,3)$ מקסימום (קצה), $(-2,0)$ מינימום, $(0,4)$ מקסימום, $(3,0)$ מינימום, $(4,2)$ מקסימום, $(5,1)$ מינימום (קצה) ; $0\le y\le 4$

23 פתרון אחד: $x=0$

24 $(-4,-2)$ מינימום (קצה), $(0,5)$ מקסימום, $(4,-1)$ מינימום, $(5,0)$ מקסימום (קצה)

25 $-8\le y\le 6$; נקודות החיתוך עם ציר x

26 $(-6,0)$ מקסימום (קצה), $(-2,-7)$ מינימום, $(2,-1)$ מקסימום, $(3,-2)$ מינימום (קצה)

27 $k=4$; נקודה אחת - $(0,0)$ (כל שאר הגרף מעל הציר)

28 $(-1,0)$ - משיק

29 $(-6,0)$, $(-1,0)$, $(2,0)$

30 $(-3,0)$ מינימום, $(-1,4)$ מקסימום, $(2,0)$ מינימום, $(3,2)$ מקסימום, $(5,0)$ מינימום

31 $2<k<4$

32 $k=-4$ או $k=2$

33 $(-1,-4)$ מינימום, $(3,2)$ מקסימום

34 $(-\frac{3}{2},0)$, $(1,0)$, $(\frac{5}{2},0)$; $(-\frac{1}{2},4)$ מקסימום, $(\frac{3}{2},-2)$ מינימום

35 $-1<x<4$ או $x>7$

36 $(-1,3)$ מקסימום, $(3,0)$ מינימום

37 מינימום: $(-2,0)$, $(3,0)$, $(6,0)$; מקסימום: $(0,4)$, $(4,2)$

38 מינימום: $(1,0)$, $(5,0)$; מקסימום: $(3,4)$; ארבעה פתרונות

39 $k=2$ או $k=-2$

40 ציר x: $(-2,0)$, $(2,0)$; ציר y: $(0,-4)$

41 $(0,4)$; עולה: $-2<x<0$, $x>2$; יורדת: $x<-2$, $0<x<2$

42 הזזה למטה ב-4 ; $g(x)=-x^2+2x-1=-(x-1)^2$

43 $(2,1)$ - נקודת הפיתול $(0,0)$ של $f(x)$ זזה ימינה 2 ולמעלה 1

44 $x=3$, $y=1$

45 $x\ge -4$; $(-4,-2)$

פרק 19 סיכומון סוף פרק – סיכום החקירות וטרנספורמציות

כללי גזירה

- $(x^n)' = nx^{n-1}$; $(c)' = 0$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.
- $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- מכפלה: $(uv)' = u'v + uv'$.
- מנה: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

פונקציה מורכבת

- $((g(x))^n)' = n(g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$.
- $\left(\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$.
- לא לשכוח לכפול בנגזרת הפנימית!

הזזות

- $f(x) + k$: כל נקודה $(x, y) \to (x, y + k)$.
- $f(x - h)$: כל נקודה $(x, y) \to (x + h, y)$ – $h > 0$ ימינה.
- הזזה לא משנה את סוג הקיצון.

מתיחה ושיקוף

- $a \cdot f(x)$: $(x, y) \to (x, ay)$ – החיתוכים עם ציר x נשארים.
- $-f(x)$: שיקוף בציר x – מקסימום הופך למינימום.
- $f(2x)$: כיווץ אופקי – מחלקים את x ב-2.

ערך מוחלט $|f(x)|$

- מה שמעל ציר x – נשאר; מה שמתחתיו – מתהפך למעלה.
- נקודות החיתוך עם ציר x הופכות לנקודות מינימום.
- מינימום שלילי של $f(x)$ הופך למקסימום של $|f(x)|$.
- תחום הערכים של $|f(x)|$ תמיד $y \geq 0$.

סעיפי חשיבה

- מספר הפתרונות של $f(x) = k$ – ישר אופקי $y = k$ וספירת חיתוכים.
- $f(x) + k$ משיק לציר x ← אחת מנקודות הקיצון עלתה/ירדה בדיוק לציר.
- $g(x) = f(x - 2)$ ← $g'(x) = f'(x - 2)$.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- $f(x + 3)$ זז **שמאלה**, לא ימינה.
- בערך מוחלט לשכוח שהחיתוכים עם ציר x הם עכשיו נקודות מינימום.
- בנגזרת של מורכבת לשכוח את הנגזרת הפנימית.
- במתיחה $2f(x)$ להזיז גם את שיעורי ה-x.

💡 **הטיפ של אילון:** בכל טרנספורמציה – הזיזו קודם את הנקודות המיוחדות, ורק אחר כך חברו ביניהן. ככה אי אפשר לטעות בצורה.

פרק 20

אינטגרלים

פונקציה קדומה, אינטגרל מסוים וחישובי שטחים

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

20.1 פונקציה קדומה וטכניקות אינטגרציה — 34 תרגילים

20.2 חישוב שטחים בעזרת אינטגרלים — 32 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



כל טכניקות האינטגרל – הסבר וסיכום מלא לבגרות

YouTube · 10:04



אינטגרלים – סעיפי חשיבה

YouTube · 5:54



אינטגרלים – מציאת שטח מורכב

YouTube · 5:05

🧩 המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף



שטח מתחת לגרף

הזיזו את גבולות האינטגרל והגדילו את מספר המלבנים – וראו איך הסכום מתקרב לשטח.

20.1 פונקציה קדומה וטכניקות אינטגרציה

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (לכל $n \neq -1$), $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$,
$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$, $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x} + C$. אינטגרל מסוים:
$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. בדיקה תמיד: גוזרים את התשובה.

צפו לפני שמתחילים:



כל טכניקות האינטגרל – הסבר וסיכום מלא לבגרות
YouTube · 10:04



למה לומדים אינטגרלים?
YouTube · 1:48

1. מצאו את האינטגרל: $\int (6x^2 - 4x + 1)\,dx$
2. מצאו את האינטגרל: $\int (x^3 + x)\,dx$
3. מצאו את האינטגרל: $\int (5)\,dx$
4. מצאו את האינטגרל: $\int \left(\frac{1}{x^2}\right)\,dx$
5. מצאו את האינטגרל: $\int \left(\frac{4}{x^3}\right)\,dx$
6. מצאו את האינטגרל: $\int (\sqrt{x})\,dx$
7. מצאו את האינטגרל: $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,dx$
8. מצאו את האינטגרל: $\int \left(\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)\,dx$
9. מצאו את האינטגרל: $\int \left((x+3)^2\right)\,dx$
10. מצאו את האינטגרל: $\int \left((2x-1)^3\right)\,dx$
11. מצאו את האינטגרל: $\int \left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)\,dx$

12 מצאו את האינטגרל: $\int (x(x+2))\,dx$ (פתחו סוגריים)

13 מצאו את האינטגרל: $\int ((x-1)(x+1))\,dx$ (פתחו סוגריים)

14 מצאו את האינטגרל: $\int \left(\frac{x^3-2x}{x}\right)dx$ (חלקו כל איבר במכנה)

15 מצאו את האינטגרל: $\int \left(\frac{x^4+1}{x^2}\right)dx$ (חלקו כל איבר במכנה)

16 מצאו את האינטגרל: $\int \left(\sqrt{x+4}\right)dx$

17 מצאו את האינטגרל: $\int \left(2x-\frac{1}{x^2}\right)dx$

18 מצאו את האינטגרל: $\int (x\sqrt{x})\,dx$

19 חשבו: $\int_1^2 \left(3x^2\right)dx$

20 חשבו: $\int_0^3 (4x-1)\,dx$

21 חשבו: $\int_0^3 \left(x^2-2x\right)dx$ (התשובה יכולה להיות 0 – למה?)

22 חשבו: $\int_1^4 \left(\frac{1}{x^2}\right)dx$

23 חשבו: $\int_0^9 \left(\sqrt{x}\right)dx$

24 חשבו: $\int_0^4 \left((x-2)^3\right)dx$ (מה הסימטריה מסבירה?)

25 $f'(x)=3x^2-2x$ והגרף של $f(x)$ עובר בנקודה $(2,8)$. מצאו את $f(x)$.

26 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ו- $f(4)=1$. מצאו את $f(x)$.

27 שיפוע המשיק לגרף $f(x)$ בכל נקודה הוא $2x-4$, והגרף עובר בנקודה $(1,2)$. מצאו את $f(x)$ ואת נקודת הקיצון שלה.

28 $f'(x)=\frac{1}{x^2}$ ו- $f(1)=2$. מצאו את $f(x)$ ואת האסימפטוטה האופקית שלה.

29 ל-$f(x)$ נקודת מקסימום $(0,2)$, וידוע ש-$f'(x)=3x^2+bx$. מצאו את b אם ל-$f(x)$ קיצון גם ב-$x=2$, ואת $f(x)$.

30 מצאו את a אם $\int_0^2 ax\,dx=6$.

31 מצאו את $k>0$ אם $\int_0^k x^2\,dx=9$.

32 $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)=4x^3-2$, ו-$F(1)=0$. מצאו את $F(x)$ ואת $F(2)$.

33 $f(x)=6x-6$. מצאו פונקציה קדומה $F(x)$ שערך המינימום שלה הוא 5.

34 הסבירו מדוע $F(x)=x^2+7$ ו-$G(x)=x^2-1$ הן שתיהן פונקציות קדומות של $f(x)=2x$. במה שונים הגרפים שלהן?

✔ תשובות סופיות – נושא 20.1

1	$2x^3-2x^2+x+C$
2	$\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+C$
3	$5x+C$
4	$-\frac{1}{x}+C$
5	$-\frac{2}{x^2}+C$
6	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$
7	$2\sqrt{x}+C$
8	$3\sqrt{x}+C$
9	$\frac{(x+3)^3}{3}+C$
10	$\frac{(2x-1)^4}{8}+C$
11	$-\frac{1}{x+1}+C$
12	$\frac{x^3}{3}+x^2+C$
13	$\frac{x^3}{3}-x+C$
14	$\frac{x^3}{3}-2x+C$
15	$\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+C$
16	$\frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x+4}+C$
17	$x^2+\frac{1}{x}+C$
18	$\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$
19	7
20	15
21	0
22	$\frac{3}{4}$
23	18

24 0

25 $f(x)=x^3-x^2+4$

26 $f(x)=2\sqrt{x}-3$

27 $f(x)=x^2-4x+5$; $(2,1)$ מינימום

28 $f(x)=3-\frac{1}{x}$; $y=3$

29 $f(x)=x^3-3x^2+2$; $b=-6$

30 $a=3$

31 $k=3$

32 $F(x)=x^4-2x+1$; $F(2)=13$

33 $F(x)=3x^2-6x+8$

34 הנגזרת של שתיהן $2x$; הגרפים מוזזים אנכית זה מזה ב-8

20.2 חישוב שטחים בעזרת אינטגרלים

שטח בין גרף לציר x: מוצאים את נקודות החיתוך עם ציר x ומחשבים כל חלק בנפרד – חלק שמתחת לציר יוצא שלילי, ולוקחים אותו בערך מוחלט. שטח בין שני גרפים: $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$, כאשר $f(x)$ העליונה ו-$g(x)$ התחתונה, ו-a, b – נקודות החיתוך.

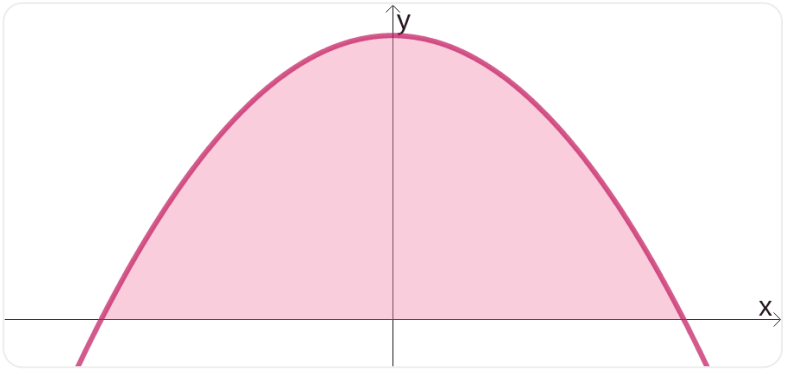
צפו לפני שמתחילים:

אינטגרלים – מציאת שטח מורכב
YouTube · 5:05

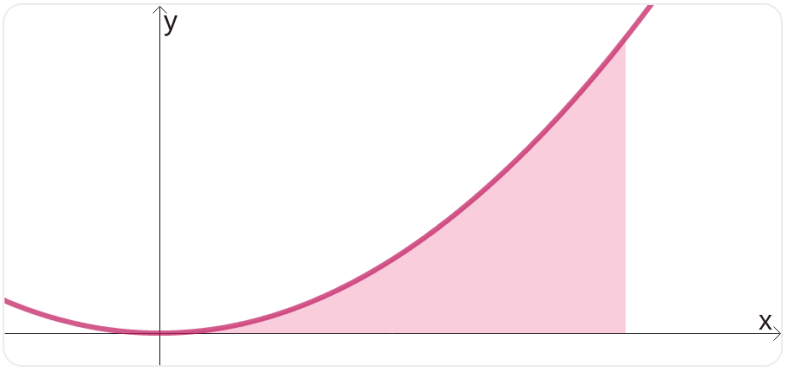
אינטגרלים – סעיפי חשיבה
YouTube · 5:54

אינטגרל – ערך מוחלט
YouTube · 2:46

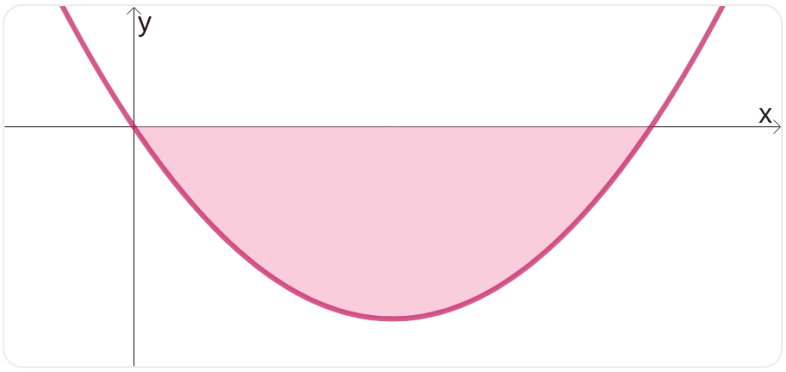
1 בציור גרף הפונקציה $f(x)=-x^2+9$. חשבו את השטח המוגבל בין הגרף לבין ציר x.



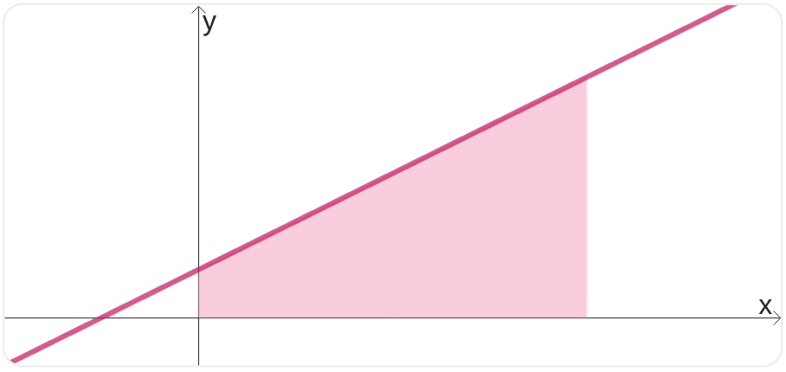
2 בציור גרף הפונקציה $f(x)=x^2$. חשבו את השטח המוגבל בין הגרף, ציר x והישר $x=3$.



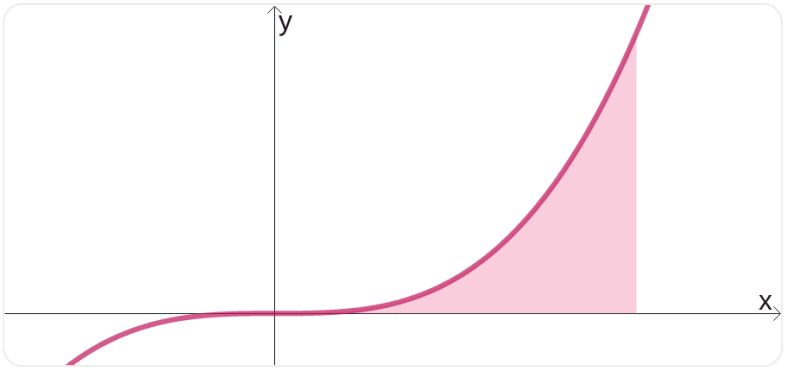
3 בציור גרף הפונקציה $f(x)=x^2-4x$. חשבו את השטח הכלוא בין הגרף לציר x (השטח מתחת לציר!).



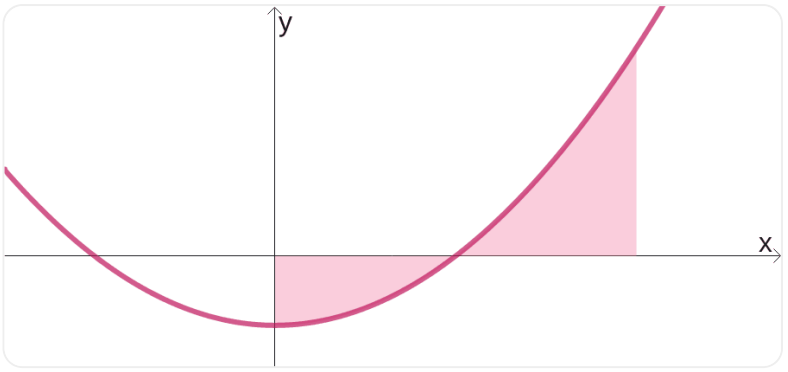
4 בציור הישר $f(x)=2x+1$. חשבו בעזרת אינטגרל את השטח המוגבל בין הישר, ציר x, ציר y והישר $x=2$, ובדקו בעזרת נוסחת שטח טרפז.



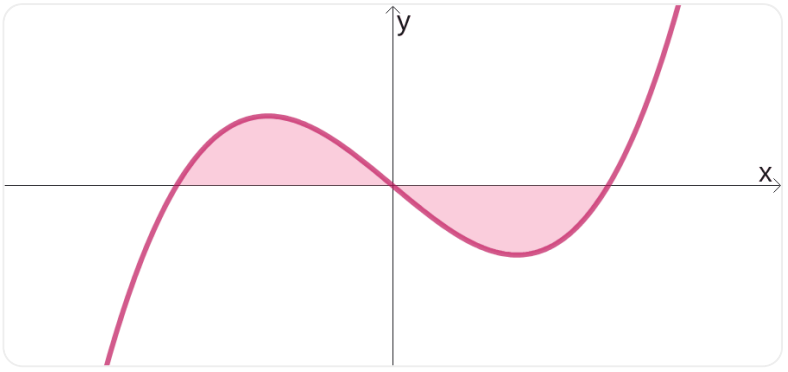
5 בציור גרף הפונקציה $f(x)=x^3$. חשבו את השטח המוגבל בין הגרף, ציר x והישר $x=2$.



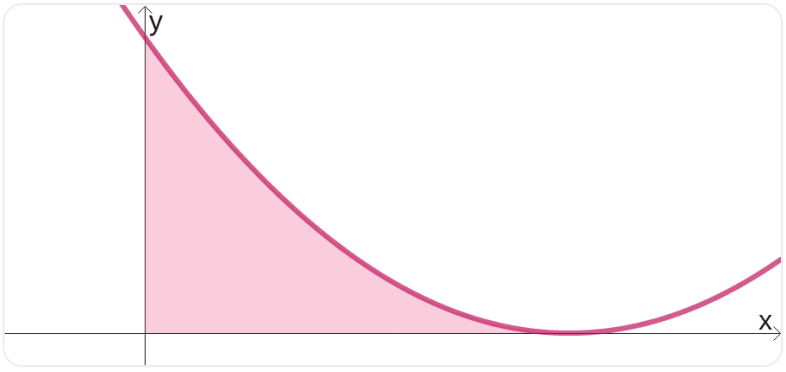
6 בציור גרף הפונקציה $f(x)=x^2-1$. חשבו את השטח המוגבל בין הגרף, ציר x, ציר y והישר $x=2$ (שטח מפוצל).



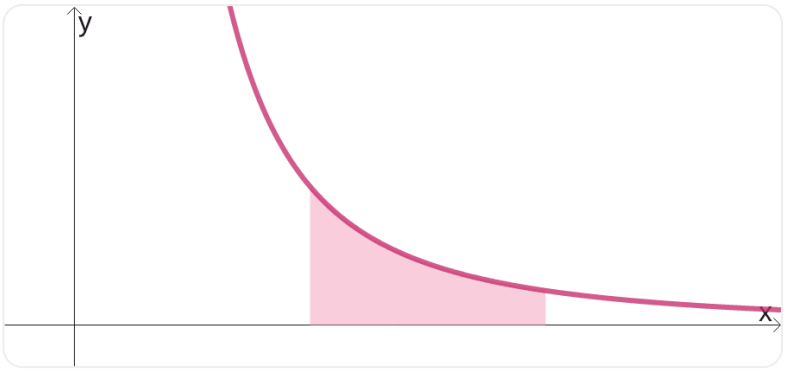
7 בציור גרף הפונקציה $f(x)=x^3-x$. חשבו את סכום השטחים הכלואים בין הגרף לציר x.



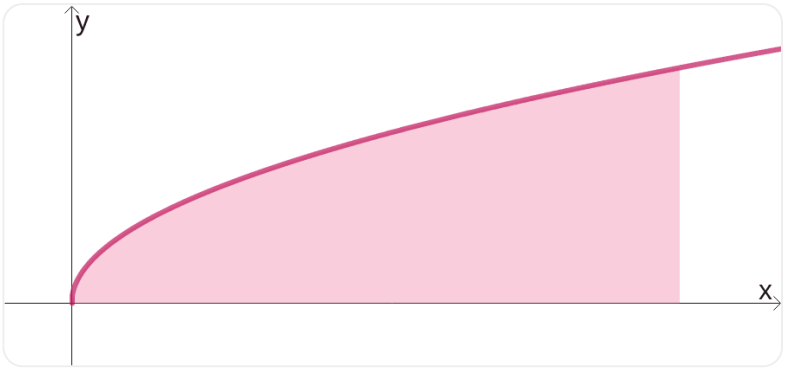
8 בציור גרף הפונקציה $f(x)=(x-3)^2$. חשבו את השטח המוגבל בין הגרף לבין שני הצירים.



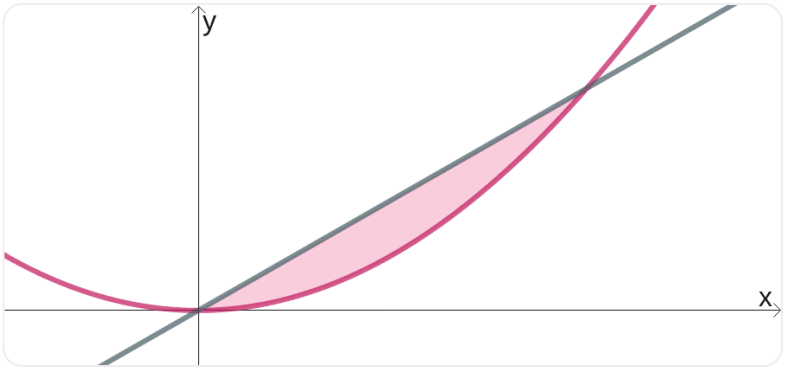
9 בציור גרף הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2}$. חשבו את השטח המוגבל בין הגרף, ציר x והישרים $x=1$ ו-$x=2$.



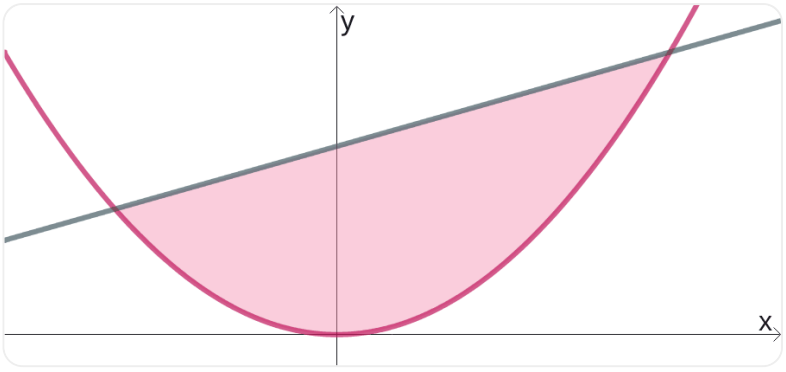
10 בציור גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$. חשבו את השטח המוגבל בין הגרף, ציר x והישר $x=9$.



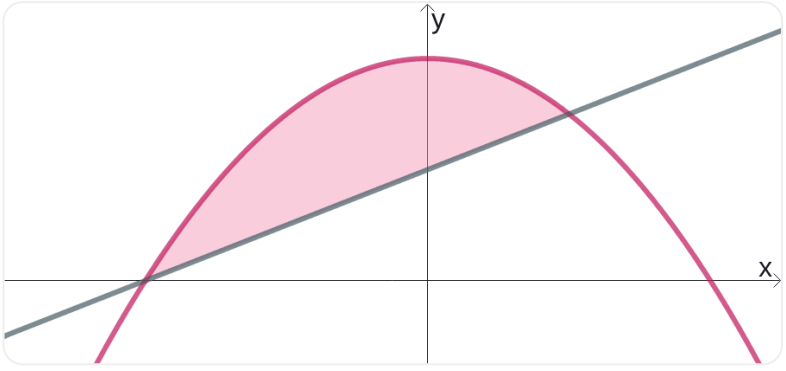
11 בציור הגרפים של $f(x)=x^2$ ו-$g(x)=2x$. מצאו את נקודות החיתוך שלהם, וחשבו את השטח הכלוא ביניהם.



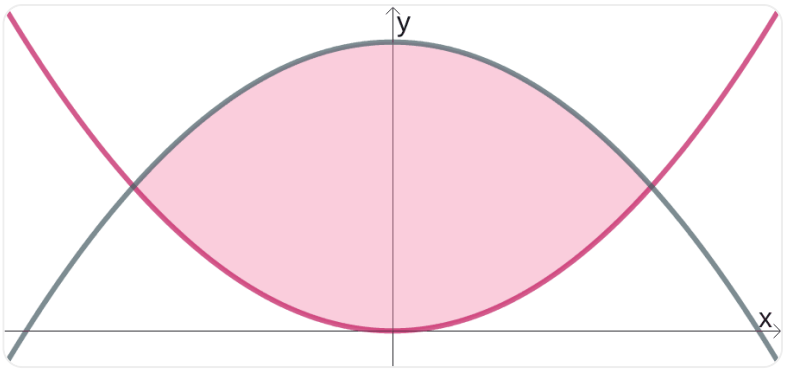
12 בציור הגרפים של $f(x)=x^2$ ו-$g(x)=x+6$. חשבו את השטח הכלוא ביניהם.



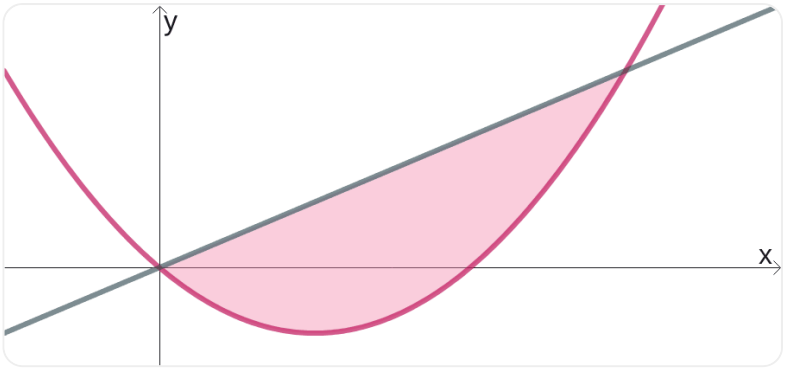
13 בציור הגרפים של $f(x)=-x^2+4$ ו-$g(x)=x+2$. חשבו את השטח הכלוא ביניהם.



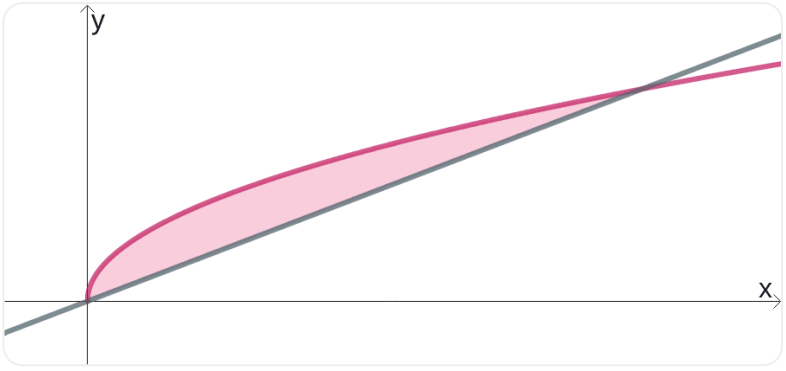
14 בציור הגרפים של $f(x)=x^2$ ו-$g(x)=8-x^2$. חשבו את השטח הכלוא ביניהם.



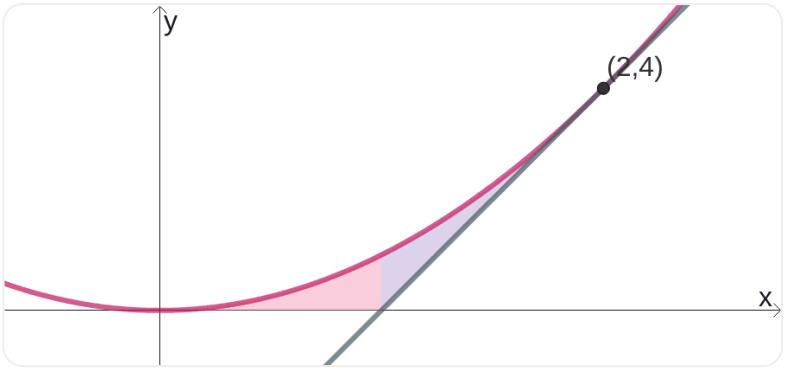
15 בציור הגרפים של $f(x)=x^2-2x$ ו-$g(x)=x$. חשבו את השטח הכלוא ביניהם.



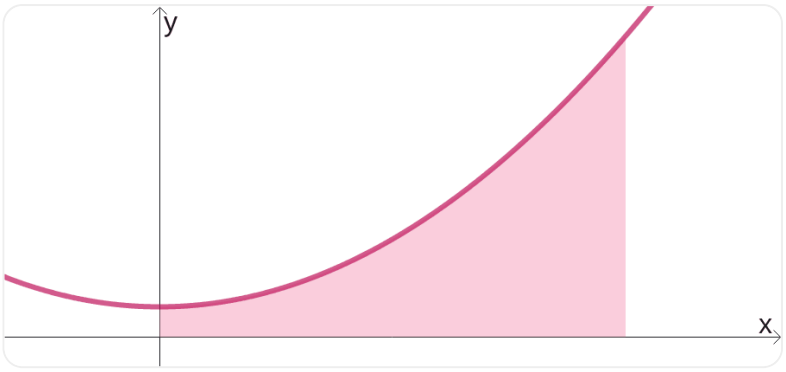
16 בציור הגרפים של $f(x)=\sqrt{x}$ ו-$g(x)=\frac{x}{2}$. מצאו את נקודות החיתוך, וחשבו את השטח הכלוא ביניהם.



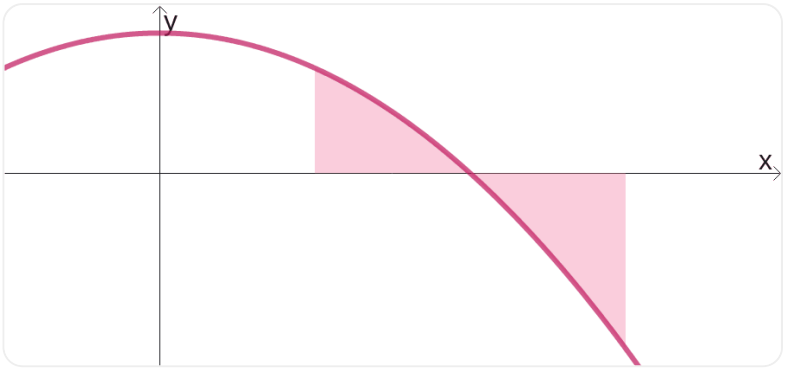
17 בציור גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ והמשיק לו בנקודה $(2,4)$. מצאו את משוואת המשיק, וחשבו את השטח המוגבל בין הגרף, המשיק וציר x.



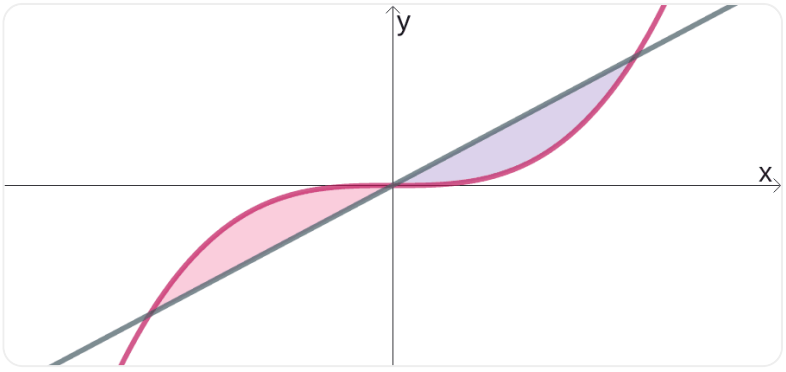
18 בציור גרף הפונקציה $f(x)=x^2+1$. חשבו את השטח המוגבל בין הגרף, הצירים והישר $x=3$.



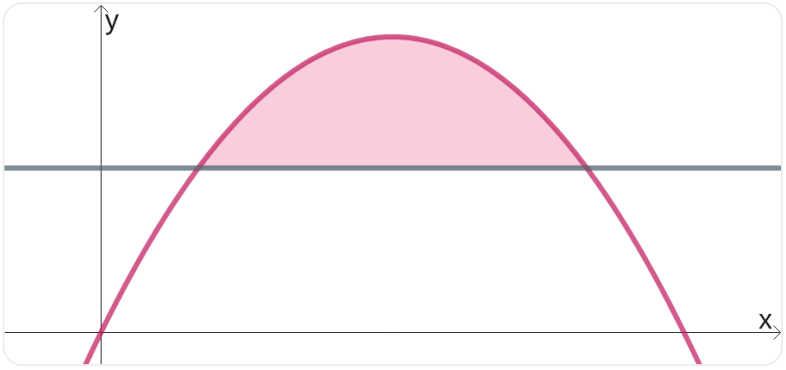
19 בציור גרף הפונקציה $f(x)=4-x^2$. חשבו את השטח המוגבל בין הגרף, ציר x והישרים $x=1$ ו-$x=3$ (חלק מעל הציר וחלק מתחתיו).



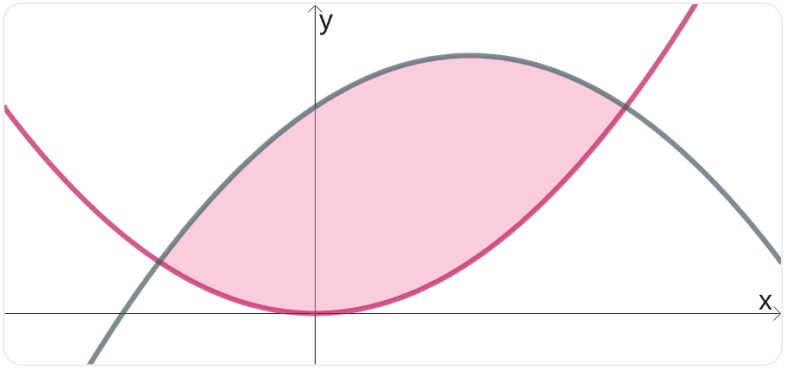
20 בציור הגרפים של $f(x)=x^3$ ו-$g(x)=x$. חשבו את סכום השטחים הכלואים ביניהם.



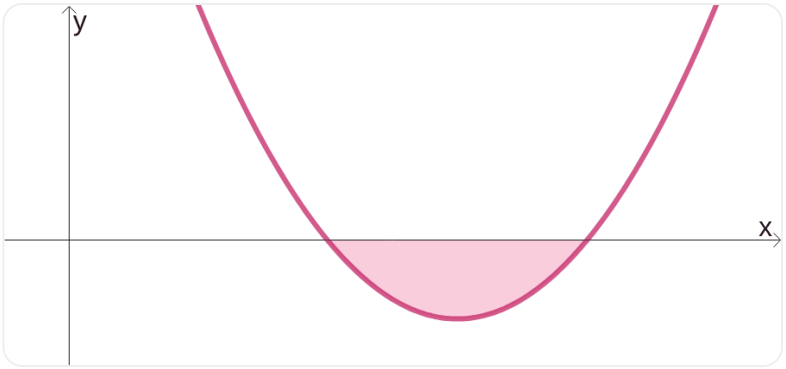
21 בציור גרף הפונקציה $f(x)=-x^2+6x$ והישר $y=5$. חשבו את השטח הכלוא בין הגרף לישר.



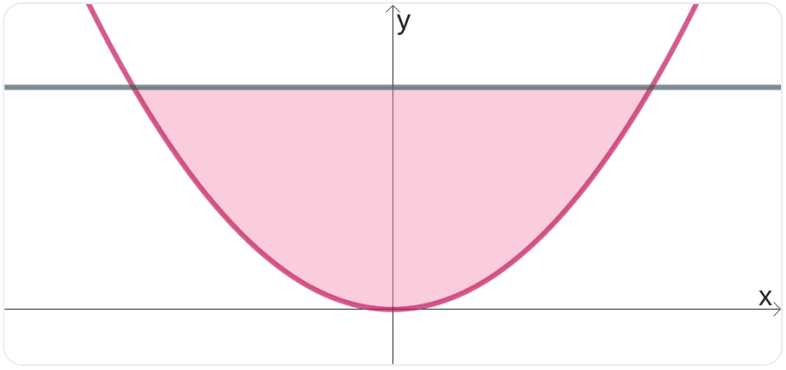
22 בציור הגרפים של $f(x)=x^2$ ו-$g(x)=-x^2+2x+4$. חשבו את השטח הכלוא ביניהם.



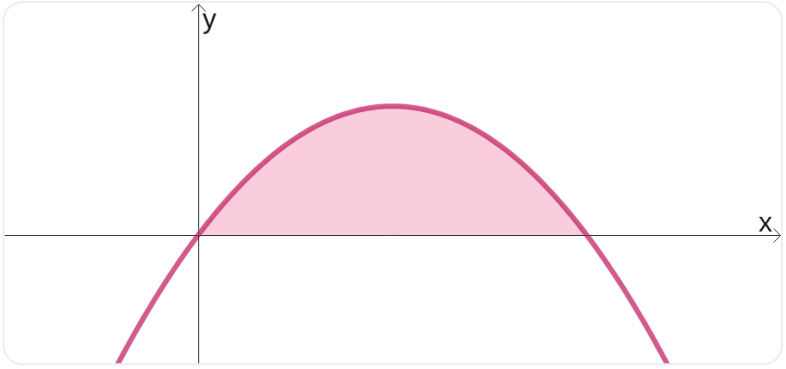
23 בציור גרף הפונקציה $f(x)=x^2-6x+8$. חשבו את השטח הכלוא בין הגרף לציר x.



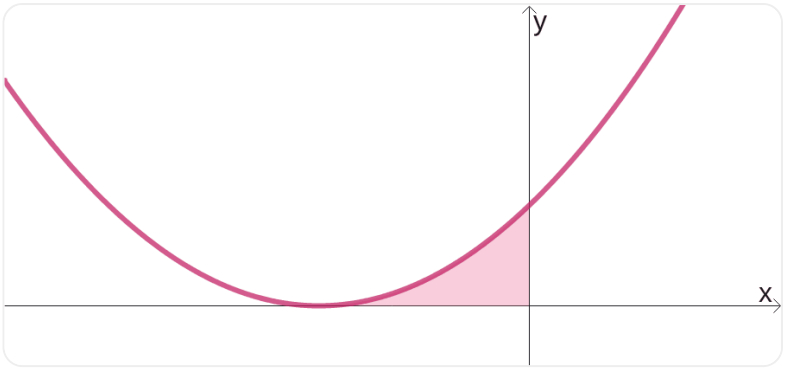
24 בציור גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ והישר $y=4$. חשבו את השטח הכלוא בין הגרף לישר.



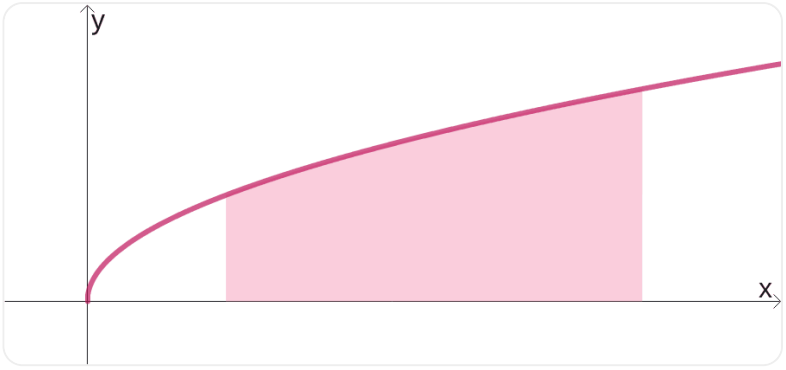
25 בציור גרף הפונקציה $f(x)=-x^2+2x$. חשבו את השטח הכלוא בין הגרף לציר x.



26 בציור גרף הפונקציה $f(x)=(x+1)^2$. חשבו את השטח המוגבל בין הגרף לבין שני הצירים.



27 בציור גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$. חשבו את השטח המוגבל בין הגרף, ציר x והישרים $x=1$ ו-$x=4$.



28 השטח המוגבל בין גרף $f(x)=kx^2$ (כאשר $k>0$), ציר x והישר $x=3$ הוא 18. מצאו את k.

29 השטח הכלוא בין גרף $f(x)=a-x^2$ (כאשר $a>0$) לבין ציר x הוא 36. מצאו את a.

30 הישר $x=t$ (כאשר $t>0$) יחד עם הגרף $f(x)=x$ וציר x מגבילים משולש ששטחו 8. מצאו את t בעזרת אינטגרל, ובדקו בעזרת שטח משולש.

31 $\int_0^4\left(x^2-4x\right)dx=-\frac{32}{3}$. הסבירו מדוע האינטגרל שלילי, ומהו השטח הכלוא בין $f(x)=x^2-4x$ לציר x.

32 $f(x)$ חיובית בתחום $0<x<2$ ושלילית בתחום $2<x<5$. השטח בין הגרף לציר x ב-$0<x<2$ הוא 7, וב-$2<x<5$ הוא 4. חשבו את $\int_0^5 f(x)\,dx$.

✔ תשובות סופיות – נושא 20.2

1	36
2	9
3	$\frac{32}{3}$
4	6 ; טרפז: $\frac{(1+5)\cdot 2}{2}=6$
5	4
6	2
7	$\frac{1}{2}$
8	9
9	$\frac{1}{2}$
10	18
11	$(0,0)\ ,(2,4)\ ;\ \frac{4}{3}$
12	$\frac{125}{6}$
13	$\frac{9}{2}$
14	$\frac{64}{3}$
15	$\frac{9}{2}$
16	$(0,0)\ ,(4,2)\ ;\ \frac{4}{3}$
17	$y=4x-4\ ;\ \frac{2}{3}$
18	12
19	4
20	$\frac{1}{2}$
21	$\frac{32}{3}$
22	9
23	$\frac{4}{3}$

24	$\frac{32}{3}$
25	$\frac{4}{3}$
26	$\frac{1}{3}$
27	$\frac{14}{3}$
28	$k=2$
29	$a=9$
30	$t=4$
31	הגרף מתחת לציר x בתחום ; השטח $\frac{32}{3}$
32	3

פרק 20 סיכומון סוף פרק – אינטגרלים

פונקציה קדומה

- $F(x)$ קדומה של $f(x)$ אם $F'(x)=f(x)$.
- לכל פונקציה יש אינסוף קדומות – הן נבדלות בקבוע C (הזזה אנכית).
- נקודה נתונה על הגרף ← מציבים ומוצאים את C.

נוסחאות יסוד

- $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ (לכל $n\neq -1$).
- $\int k\,dx=kx+C$.
- $\int \frac{1}{x^2}\,dx=-\frac{1}{x}+C$.
- $\int \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$; $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+C$
- $\int (ax+b)^n\,dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C$.

טכניקות

- מכפלה – פותחים סוגריים לפני האינטגרל.
- מנה עם מכנה של איבר אחד – מחלקים כל איבר במכנה.
- שורשים וחזקות שליליות – כותבים כחזקה.

אינטגרל מסוים

- $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ – בלי $+C$.
- אינטגרל יכול לצאת שלילי או 0 – זה לא שטח!

שטח בין גרף לציר x

- מוצאים את נקודות החיתוך עם ציר x בתחום.
- מחשבים כל חלק בנפרד; חלק מתחת לציר – לוקחים בערך מוחלט.
- סוכמים את כל החלקים.

שטח בין שני גרפים

- מוצאים נקודות חיתוך: $f(x)=g(x)$.
- $S=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$ כאשר $f(x)$ העליונה.
- אם הגרפים מתחלפים – מפצלים את השטח.

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לשכוח את $+C$ באינטגרל לא מסוים.
- לחבר שטח שמתחת לציר כמספר שלילי.
- לחסר תחתונה פחות עליונה – יוצא שטח שלילי.
- $\int \frac{1}{x^2}dx$ אינו $\frac{1}{x^3}$ – כותבים x^{-2} ומעלים חזקה.

💡 **הטיפ של אילון:** לפני כל חישוב שטח – סרטטו סקיצה וצבעו את השטח. ברגע שרואים מי למעלה ומי למטה, האינטגרל כותב את עצמו.

פרק 21

בעיות קיצון

מבעיה מילולית לפונקציה – ומהנגזרת לתשובה הטובה ביותר

📌 סיכומון הפרק – כל הנוסחאות והכללים בעמוד אחד ←

21.1 בעיות קיצון – אלגבריות, גרפיות וגיאומטריות

35 תרגילים

🎬 סרטוני הסבר מהערוץ – סרקו וצפו



מפה – בעיות קיצון 5-4 יחידות מתמטיקה

YouTube · 3:43



בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

YouTube · 13:54



בעיות קיצון גיאומטריות

YouTube · 10:22

🎛️ המחשות אינטראקטיביות – סרקו ושחקו בגרף



מעבדת בעיות קיצון

גררו מלבן מתחת לפרבולה וראו בזמן אמת את גרף השטח ואת נקודת המקסימום.

21.1 בעיות קיצון – אלגבריות, גרפיות וגיאומטריות

שלבי עבודה: (1) בוחרים משתנה x ומסמנים אותו בציור. (2) מבטאים את הגודל שרוצים להגדיל/להקטין כפונקציה של x בלבד (בעזרת הנתון הקבוע). (3) קובעים את התחום של x. (4) גוזרים, משווים לאפס, ומוודאים בטבלה שזה אכן מקסימום/מינימום. (5) עונים בדיוק על מה שנשאל.

צפו לפני שמתחילים:

מפה – בעיות קיצון 4–5 יחידות מתמטיקה
YouTube · 3:43

בעיות קיצון גיאומטריות
YouTube · 10:22

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים
YouTube · 13:54

קיצון קצה / פנימי, מוחלט / מקומי
YouTube · 7:52

1. סכום שני מספרים חיוביים הוא 20. מצאו את המספרים שמכפלתם מקסימלית, ואת המכפלה.

2. סכום שני מספרים הוא 10. מצאו את המספרים שסכום ריבועיהם מינימלי.

3. מכפלת שני מספרים חיוביים היא 16. מצאו את המספרים שסכומם מינימלי.

4. סכום שני מספרים חיוביים הוא 12. מצאו את המספרים שעבורם מכפלת הראשון בריבוע השני מקסימלית.

5. סכום שני מספרים חיוביים הוא 9. מצאו את המספרים שעבורם מכפלת ריבוע הראשון בשני מקסימלית.

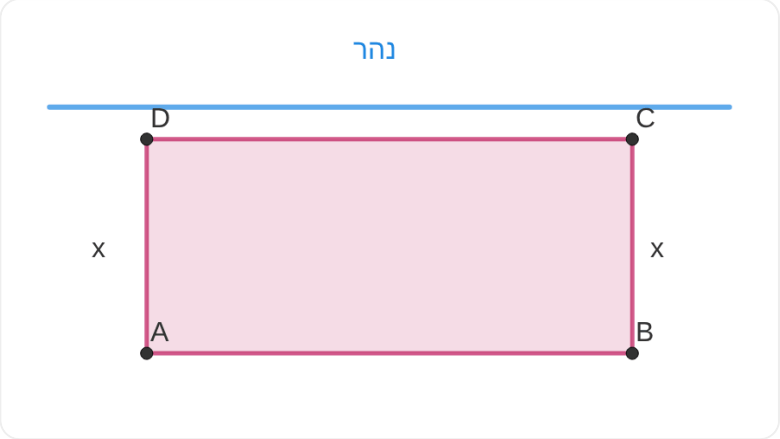
6. מצאו את המספר החיובי שההפרש בינו לבין ריבועו הוא הגדול ביותר.

7. מכפלת שני מספרים חיוביים היא 50. מצאו את המספרים שעבורם סכום פעמיים הראשון והשני מינימלי.

8 סכום שני מספרים אי-שליליים הוא 8. מצאו את המספרים שעבורם סכום הראשון וריבוע השני מינימלי.

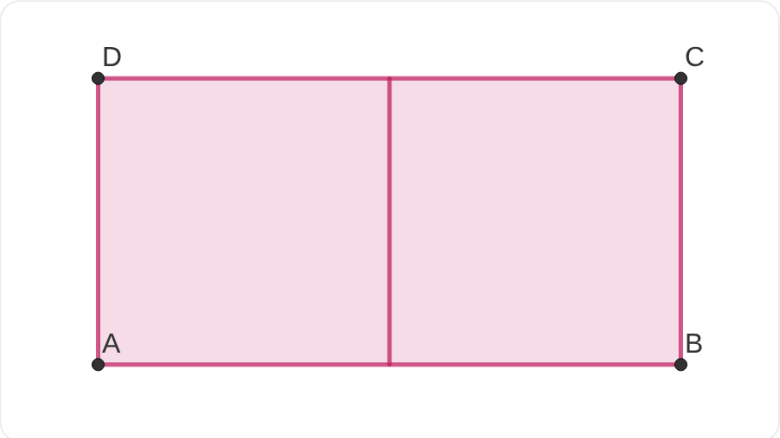
9 היקפו של מלבן הוא 60 ס"מ. מצאו את מידות המלבן ששטחו מקסימלי, ואת השטח.

10 חקלאי רוצה לגדר שטח מלבני הצמוד לנהר בעזרת 100 מ' גדר (בצד הנהר אין גדר). מצאו את מידות השטח הגדול ביותר.



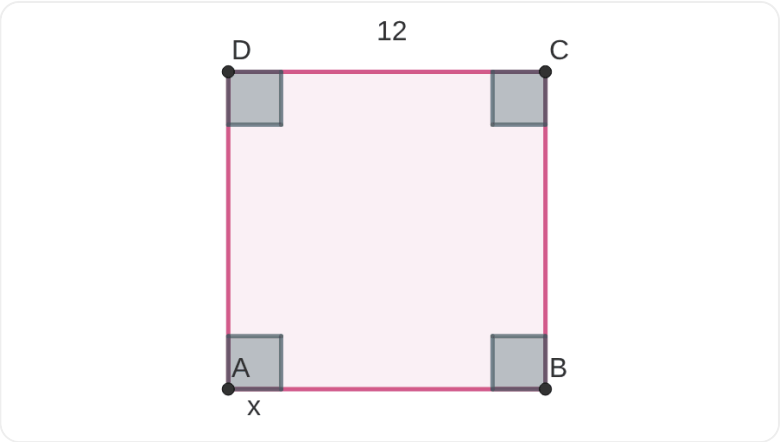
11 שטחו של מלבן הוא 64 סמ"ר. מצאו את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.

12 רוצים לבנות מכלאה מלבנית המחולקת בגדר פנימית אחת לשני חלקים (מקבילה לאחת הצלעות), בעזרת 120 מ' גדר בסך הכול. מה השטח המקסימלי?



13 בעזרת 40 מ' גדר בונים שטח מלבני הצמוד לקיר של בית. מצאו את השטח המקסימלי.

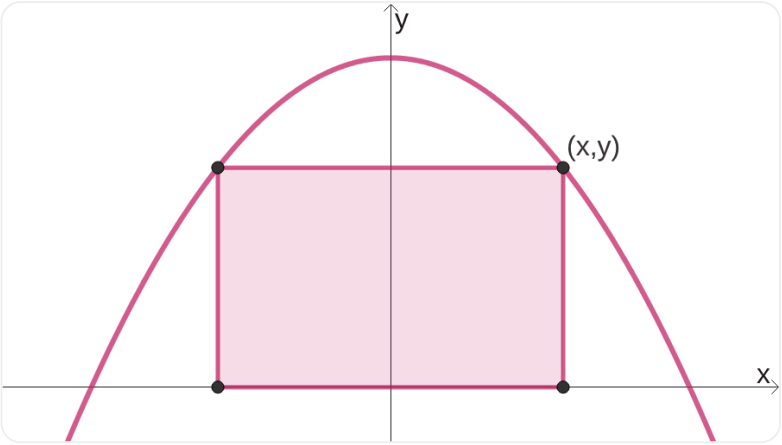
14 מגיליון קרטון ריבועי שצלעו 12 ס"מ חותכים בכל פינה ריבוע שצלעו x, ומקפלים לקופסה פתוחה. מצאו את x שעבורו נפח הקופסה מקסימלי, ואת הנפח.



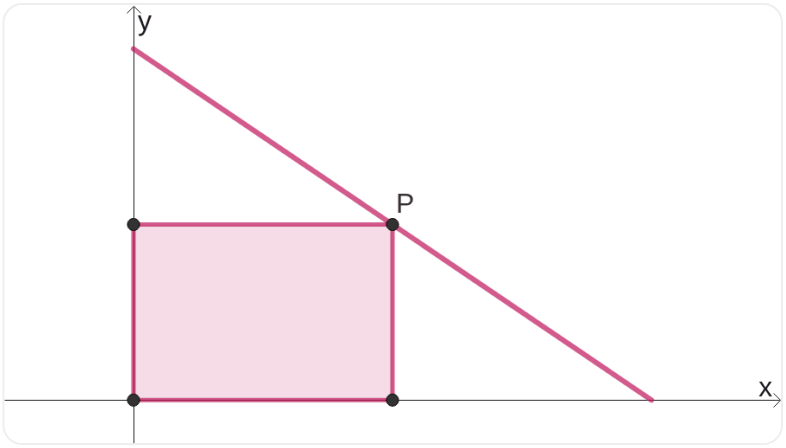
15 מגיליון מלבני שמידותיו 10×16 ס"מ חותכים ריבועים בפינות ומקפלים לקופסה פתוחה. מצאו את צלע הריבוע שעבורה הנפח מקסימלי.

16 קופסה בעלת בסיס ריבועי ללא מכסה, ונפחה 32 סמ"ק. מצאו את מידות הקופסה שעבורן שטח הפנים מינימלי.

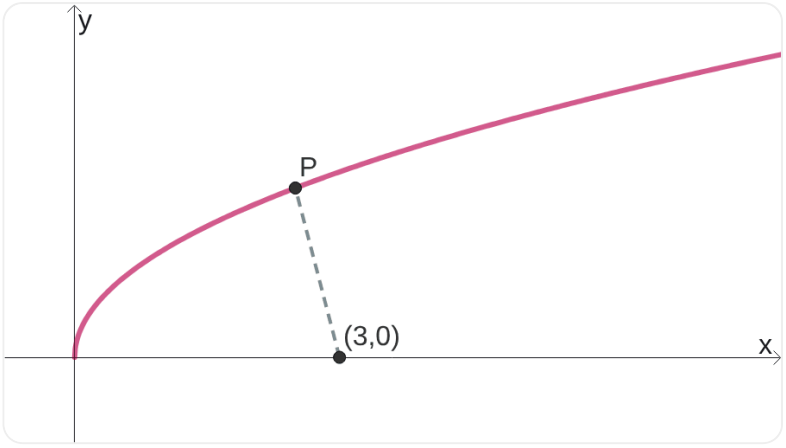
17 בציור הפרבולה $y = 12 - x^2$ ומלבן שקודקודיו העליונים על הפרבולה וצלעו התחתונה על ציר x. מצאו את המלבן ששטחו מקסימלי.



18 בציור הישר $y=8-2x$ ומלבן שאחד מקודקודיו בראשית, צלעותיו על הצירים והקודקוד הנגדי על הישר. מצאו את השטח המקסימלי.



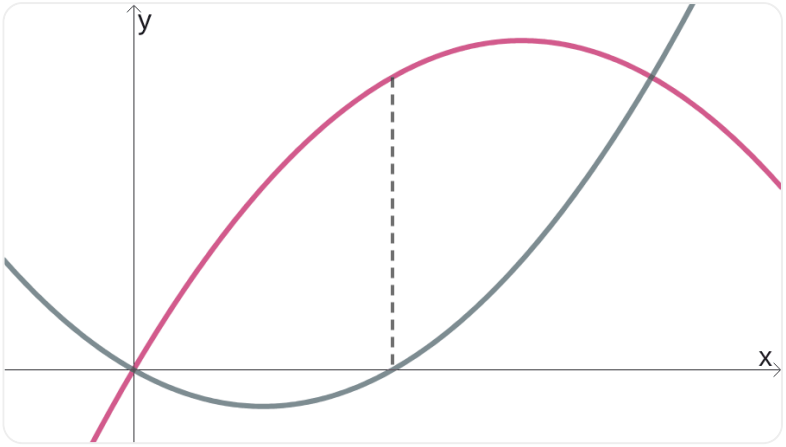
19 מצאו את הנקודה על גרף $y=\sqrt{x}$ הקרובה ביותר לנקודה $(3,0)$, ואת המרחק.



20 מצאו את הנקודות על הפרבולה $y=x^2$ הקרובות ביותר לנקודה $\left(0,\frac{7}{2}\right)$.

21 נקודה P נמצאת על גרף $y=27-x^2$ ברביע הראשון. מורידים ממנה אנכים לצירים ונוצר מלבן. מצאו את P שעבורה שטח המלבן מקסימלי.

22 $f(x)=-x^2+6x$ ו- $g(x)=x^2-2x$. ישר מאונך לציר x חותך את שני הגרפים בתחום $0<x<4$. מצאו את x שעבורו אורך הקטע בין הגרפים מקסימלי, ואת אורכו.



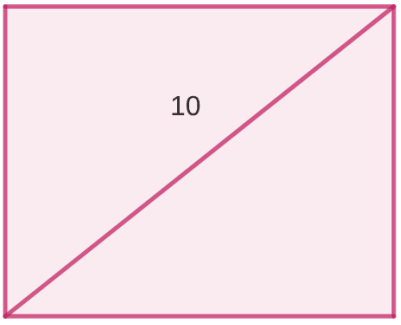
23 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$. מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של $f(x)$ בתחום $0\le x\le 4$ (שימו לב לקצוות).

24 מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של $f(x)=x^2-4x+7$ בתחום $0\le x\le 5$.

25 במשולש ישר זווית סכום הניצבים הוא 10. מצאו את הניצבים שעבורם שטח המשולש מקסימלי.

26 במשולש ישר זווית סכום הניצבים הוא 10. מצאו את הניצבים שעבורם היתר קצר ביותר, ואת אורכו.

27 אלכסון של מלבן הוא 10 ס"מ. מצאו את מידות המלבן ששטחו מקסימלי.



28 משולש שקודקודיו $(-t,0)$, $(t,0)$ והנקודה $(0,12-t^2)$, כאשר $0<t<\sqrt{12}$. מצאו את t שעבורו שטח המשולש מקסימלי.

29 מחיר מוצר הוא x ש"ח, ומספר היחידות שנמכרות ביום הוא $50-x$. באיזה מחיר ההכנסה היומית מקסימלית?

30 עלות ייצור מוצר היא 10 ש"ח. כאשר מחירו x ש"ח נמכרות $60-x$ יחידות. מצאו את המחיר שעבורו הרווח מקסימלי.

31 עלות הייצור של x יחידות (באלפי ש"ח) לכל יחידה היא $x+\frac{400}{x}$. מצאו את מספר היחידות שעבורו העלות מינימלית.

32 חוט באורך 32 ס"מ מכופף למלבן. הוכיחו שמבין כל המלבנים, לריבוע השטח הגדול ביותר, ומצאו אותו.

33 היקף מלבן הוא $4a$ (כאשר $a>0$). הביעו באמצעות a את השטח המקסימלי של המלבן.

34 מצאו את k אם ידוע שהערך הקטן ביותר של $f(x)=x^2-6x+k$ הוא 4.

35 נקודה P על הישר $y=2x-5$. מצאו את P הקרובה ביותר לראשית הצירים (היעזרו בפונקציית ריבוע המרחק).

✔ תשובות סופיות – נושא 21.1

1. 10 ו-10 ; 100
2. 5 ו-5 ; סכום הריבועים 50
3. 4 ו-4 ; הסכום 8
4. 4 ו-8 ; 256
5. 6 ו-3 ; 108
6. $\frac{1}{2}$; ההפרש $\frac{1}{4}$
7. 5 ו-10 ; 20
8. $\frac{15}{2}$ ו-$\frac{1}{2}$; $\frac{31}{4}$
9. ריבוע 15×15 ; 225 סמ"ר
10. 50×25 (הצלע המקבילה לנהר 50) ; 1250 מ"ר
11. ריבוע 8×8 ; היקף 32
12. 600 מ"ר (צלעות 20 ו-30)
13. 200 מ"ר (צלעות 10 ו-20)
14. $x=2$; 128 סמ"ק
15. $x=2$; 144 סמ"ק
16. בסיס 4×4, גובה 2 ; שטח 48 סמ"ר
17. קודקוד ב-$x=2$; מידות 4×8 ; שטח 32
18. קודקוד $(2,4)$; שטח 8
19. $\left(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$; מרחק $\frac{\sqrt{11}}{2}$
20. $\left(\pm\sqrt{3},3\right)$; מרחק $\frac{\sqrt{13}}{2}$
21. $P\left(3,18\right)$; שטח 54
22. $x=2$; אורך 8

23 הגדול ביותר: 5 (ב-$x=1$ וב-$x=4$) ; הקטן ביותר: 1 (ב-$x=0$ וב-$x=3$)

24 הקטן ביותר: 3 (ב-$x=2$) ; הגדול ביותר: 12 (ב-$x=5$)

25 5 ו-5 ; שטח $\frac{25}{2}$

26 5 ו-5 ; יתר $5\sqrt{2}$

27 ריבוע שצלעו $5\sqrt{2}$; שטח 50

28 $t=2$; שטח 16

29 $x=25$; הכנסה 625 ש"ח

30 $x=35$; רווח 625 ש"ח

31 $x=20$; 40

32 צלע 8 ; שטח 64 סמ"ר

33 ריבוע שצלעו a ; שטח a^2

34 $k=13$

35 $P(2,-1)$; מרחק $\sqrt{5}$

פרק 21 סיכומון סוף פרק – בעיות קיצון

שלבי פתרון

- בוחרים משתנה x ומסמנים אותו בציור.
- כותבים את הגודל שרוצים להגדיל/להקטין.
- משתמשים בנתון הקבוע כדי שהגודל יהיה פונקציה של x **בלבד**.
- קובעים את התחום של x (אורכים חיוביים!).

מציאת הקיצון

- גוזרים ומשווים לאפס.
- מוודאים בטבלת סימנים (או בנגזרת שנייה) שזה מקסימום/מינימום.
- בתחום סגור – בודקים גם את הקצוות.

בעיות מספרים

- סכום קבוע S: המספר השני $S-x$.
- מכפלה קבועה P: המספר השני $\frac{P}{x}$.

בעיות גיאומטריות

- מלבן עם היקף קבוע – השטח המקסימלי בריבוע.
- גדר ליד נהר/קיר – רק שלוש צלעות בגדר.
- קופסה מגיליון: גובה x, בסיס $(a-2x)$.
- אלכסון/יתר – משתמשים בפיתגורס.

בעיות גרפיות

- נקודה על גרף: $(x,\ f(x))$.
- מרחק: $d^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$ – מספיק למזער את d^2.
- קטע אנכי בין גרפים: $f(x)-g(x)$ (עליונה פחות תחתונה).

⚠ טעויות נפוצות – שימו לב!

- לשכוח לבטא את הכול באמצעות משתנה אחד.
- לעצור ב-x ולא לענות על מה שנשאל (שטח, מידות, נקודה).
- לא לבדוק שהערך שהתקבל בתוך התחום.
- לגזור את המרחק עם השורש – עדיף לגזור את d^2.

💡 **הטיפ של אילון:** ציור קודם! כל בעיית קיצון מתחילה בשרטוט מסודר עם x מסומן – חצי מהפתרון כבר שם.